Étude didactique de l'ambiguité propre à la structure syntaxique de la notation "petit o" de Landau

Didactic study of the ambiguity specific to the syntactic structure of Landau's "little o" notation

Rahim Kouki[1]

Imed Kilani[2]

RÉSUMÉ

La notation « petit o » de Landau est une notation largement utilisée en analyse. Sa simplicité syntaxique dissimule une complexité sémantique qui pourrait brouiller certains étudiants. Ceci découle principalement de l'usage du symbole de l'égalité dans l'ostensif qui paradoxalement ne joue pas, dans cet ostensif, le rôle d'une égalité au sens classique. A cette difficulté s'ajoute une autre, à savoir l'interférence de la conception commune de la négligeabilité sur la même notion en mathématiques. Les analyses que nous avons menées à partir d'un échange, dans une classe ordinaire de mathématiques, entre des étudiants et leur enseignant confirment les difficultés de certains à manipuler convenablement cet ostensif.

Mots-clés : *Ostensif ; non-ostensif ; syntaxe ; sémantique ; égalité ; négligeabilité.*

ABSTRACT

Landau's "little-o" notation is a notation widely used in analysis. Its syntactic simplicity hides a semantic complexity that could confuse some students. This stems mainly from the use of the symbol of equality in the ostensive which paradoxically does not play, in this ostensive, the role of an equality in the classical sense. To this difficulty is added another, namely the interference of the common conception of negligibility on the same notion in mathematics. The analyzes that we carried out from an exchange, in an ordinary mathematics class, between students and their teacher confirm the difficulties of some students in properly handling this ostensive.

Keywords : *Ostensive ; non-ostensive ; syntax ; semantics ; equality ; negligibility.*

Introduction

[1]. Université de Tunis el Manar, IPEI El Manar, ECOTIDI UR 16 ES 10. E-mail: rahim.kouki@ipeiem.utm.tn

[2]. Université Virtuelle de Tunis, ISEFC, ECOTIDI UR 16 ES 10. E-mail: kilanis2006@yahoo.fr

Les notations de négligeabilité ou de prépondérance « petit o » et de dominance « grand O » connues aujourd'hui sous le nom de « notations de Landau » sont largement utilisées en analyse. Très souvent, et à l'occasion d'un développement limité d'une fonction f à l'ordre n au voisinage de 0, les mathématiciens font appel à la notation $o(x^n)$ pour remplacer l'expression $x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. $o(x^n)$ signifie un reste, non précisé, dont le quotient par x^n converge vers 0 lorsque x tend vers 0. Ce qui se traduit symboliquement par $\lim_{x\to 0}\frac{o(x^n)}{x^n} = 0$.

Les historiens des mathématiques renvoient la paternité de la notation « grand O » au mathématicien Paul Bachmann qu'il l'a introduit pour la première fois en 1894 dans son ouvrage Die analytische Zahlentheorie. Quant à la notation « petit o », elle a été introduite par son disciple Edmund Landau qui s'est inspiré de la notation « grand O » de son maître. Mais la diffusion de ces deux notations revient principalement à Landau qui les a utilisés abondement dans ses publications et notamment dans son livre Handbuch der Lehrer von der Verteilung der Primzahlen (2000) publié en allemand pour la première fois en 1909. Dans cet article nous nous limitons à l'étude des ambiguïtés relatives à la notation « petit o » pour les fonctions négligeables localement devant d'autres.

Nous montrerons que la simplicité syntaxique de cette notation, qui a certes des avantages, cache en fait une complexité sémantique qui pourrait ne pas être transparente pour certains étudiants. Nous mettons l'hypothèse que cette opacité provient, entre autres, de l'ambigüité relative à la forme de l'ostensif lui-même. Celui-ci joue certainement un rôle important dans la conceptualisation de la notion de fonctions négligeables localement devant d'autres, mais il a aussi des défaillances qui pourraient être sources de beaucoup de difficultés pour un non averti. Cet ostensif non seulement ne prend pas en charge la complexité du concept de négligeabilité, mais aussi et à travers certaines propriétés qui en découlent, il « viole » la sémantique habituelle du signe de l'égalité.

Dans le premier paragraphe nous étudierons l'intérêt de considérer la notation « petit o » en tant que notion entretenant des rapports entre l'objet ostensif et l'objet non-ostensif. Le deuxième paragraphe sera consacré à la mise en évidence de l'incompatibilité mathématique de cette notation avec l'usage du symbole de l'égalité qu'elle implique.

Dans le troisième paragraphe nous analyserons les interférences entre la conception du sens commun de la négligeabilité avec le sens et l'usage de cette notion en mathématiques. Le dernier paragraphe sera dédié à l'analyse d'un échange entre des étudiants et leur professeur autour des ambigüités syntaxiques et sémantiques relatives à la notation « petit o ».

La notation « petit o » entre l'objet ostensif et l'objet non-ostensif

Dans l'approche anthropologique, Bosch et Chevallard (1999) modélisent le savoir mathématique en termes d'objets et d'interrelation entres objets. Ils s'intéressent particulièrement aux objets mathématiques qui sont habituellement appelés « concepts » ou « notions ». De la question de la « nature » et de la « fonction » de ce type d'objets, ils établissent une distinction essentielle entre deux types d'objets : les objets ostensifs et les objets non ostensifs. La distinction entre ces deux objets résulte principalement du fait que les premiers, et non les seconds, sont perceptibles et peuvent concrètement être manipulés. A propos des objets ostensifs, ils expliquent que :

> Nous parlerons d'objet ostensif - du latin *ostendere*, « montrer, présenter avec insistance » - pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible ». (BOSCH ; CHEVALLARD, 1999, p. 90).

Ces objets ostensifs jouent un rôle important dans l'activité du mathématicien et entretiennent des relations avec les objets non ostensifs appartenant au même champ de savoir. Bosch et Chevallard précisent que :

> Les objets non ostensifs sont … tous ses « objets » qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement- au sens où on leur attribue une existence- sans pourtant être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours) (BOSCH ; CHEVALLARD, 1999, p. 90).

Ainsi, la notation $f \underset{x_0}{=} o(g)$ est un objet mathématique ostensif. La notion de fonctions négligeables localement autour d'un point devant une autre fonction est un objet mathématique non ostensif. Ce lien entre l'objet ostensif et l'objet non ostensif dans la notation de Landau est explicité dans la définition suivante dite « définition de négligeabilité » :

Soient fet g deux fonctions réelles définie sur I. soit $x_0 \in \overline{IR}$ et x_0 adhérent à I.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage x_0 s'il existe un voisinage Vde x_0 et une fonction $\varepsilon : I \cap V \to IR$ pour lesquels : $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

On note alors $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(g(x)\big)$ et on dit que « f est égal à petit o de g au voisinage de x_0.

Lorsque la fonction g ne s'annule pas en x0 :

$$f \underset{x_0}{=} o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

La modélisation, selon l'approche anthropologique, de l'activité mathématique en termes de tâche, technique, technologie et théorie (CHEVALLARD, 1992 ; CHEVALLARD, 2003), conduit à traduire :

> […] La mise en œuvre d'une technique…par une manipulation d'ostensifs réglée par des non ostensifs. Les ostensifs constituent la partie perceptible de l'activité, c'est-à-dire ce qui, dans la réalisation de la tâche, se donne à voir, aussi bien à l'observateur qu'aux acteurs eux-mêmes (Ibid, p. 92).

Bosch et Chevallard mettent en garde que le rapport aux ostensifs ne doit pas s'arrêter à un rapport dépendant uniquement de la perception et de la manipulation syntaxique mécanique. Cette dernière nécessite un appel sémantique des objets non ostensifs qui sont rattachés aux objets ostensifs. Les ostensifs ne sont donc pas libres. Ils entretiennent des rapports avec différents non ostensifs : "Les objets ostensifs, bien que directement accessibles aux sens, ne sont pas pour autant de purs donnés. Parce qu'il n'y a pas d'ostensifs sans non ostensifs [...]" (Ibid, p. 92).

La non prise en compte de cette dialectique conduit à considérer la notation mathématique comme un simple objet ostensif suffisamment transparent vérifiant un certain nombre de propriétés. Cette manière de voir les choses mène à sous-estimer sa complexité et par conséquent à ne pas s'attarder sur elle pour l'analyser.

Didactiquement parlant, il est fondamental d'accorder de l'importance à l'analyse et l'étude de cette dialectique, *ostensifs/non ostensifs*, pour une manipulation consciente et correcte des objets *ostensifs* d'une part et pour une meilleure conceptualisation des objets *non ostensifs* d'autre part. La prise en charge de ce travail par l'enseignant est particulièrement nécessaire lorsque l'ostensif en lui-même n'est pas naturellement transparent et que sa manipulation dans certains contextes mathématiques est déroutante pour l'apprenant. La notation de Landau est un exemple qui illustre bien les dérapages possibles dus aux ambigüités syntaxiques qui se cachent dans cette notation et qui peuvent contrarier l'étudiant manipulant cette notation aux apparences simples. Ceci conforte le point de vue de Vergnaud (2002) et de Bloch (2015) qui soutiennent le fait que l'appel à usage de certains symboles mathématiques dans l'activité mathématique est source de difficultés pour les apprenants.

La principale problématique dans la notation « petit o » de Landau provient de l'emploi du signe de légalité dans l'ostensif.

Incompatibilité de la notation « petit o » avec le signe de l'égalité

L'intérêt des notations de Landau et notamment la notation « petit o » résulte du fait qu'on peut l'intégrer facilement dans les calculs et faciliter ainsi la comparaison asymptotique entre deux fonctions aussi bien au voisinage de l'infini qu'au voisinage d'un point. On peut par exemple considérer, au voisinage d'un point x_0, l'expression $\mathrm{f} = \mathrm{g} + \mathrm{o}(\mathrm{g})$ pour exprimer le fait que f est équivalente à g au voisinage de x_0. C'est aussi particulièrement pratique pour formaliser des approximations via la notion de développement de Taylor-Young. Ainsi, dire par exemple que $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 1 + 3\mathrm{x} - 5\mathrm{x}^2 + \mathrm{o}(\mathrm{x}^2)$ au voisinage de 0, signifie que f(x) est assimilable au polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{x}) = 1 + 3\mathrm{x} - 5\mathrm{x}^2$ au voisinage de 0, et que l'erreur commise par cette assimilation est négligeable devant les valeurs voisines de 0 que peut prendre le monôme du plus haut degré x2 de cette expression polynomiale. Ceci se traduit par l'objet ostensif (1) suivant : $o(x^2) \underset{x \to 0}{=} o(x^2)$. Cet objet ostensif est ambigu car le $\mathrm{o}(\mathrm{x}^2)$ qui se trouve à gauche du signe de l'égalité n'est pas le $\mathrm{o}(\mathrm{x}^2)$ qui se trouve à droite de ce même signe. Alors que le premier représente un élément, le deuxième représente un ensemble. L'expression ostensive (1) doit alors s'interpréter comme voulant dire que $o(x^2)$ (celui de gauche) est une fonction parmi d'autres qui appartiennent à l'ensemble $o(x^2)$ (celui de droite) des fonctions négligeables devant x^2. Ceci se traduit par $\lim\limits_{x \to 0} \frac{o(x^2)}{x^2} = 0$ (le $o(x^2)$ au numérateur est le $o(x^2)$ qui se trouve à gauche de l'*objet ostensif* (1)).

Donc, en écrivant $f \underset{a}{=} o(g)$, il faut être vigilant. Cette notation intègre le signe de l'égalité qui n'exprime pas, en réalité, une égalité au sens usuel. Il faut donc manipuler ce signe en gardant à l'esprit qu'il exprime une relation d'appartenance. Ainsi, $f \underset{a}{=} o(g)$ signifie que f appartient à l'ensemble $o(g)$ des fonctions négligeables devant g au voisinage de a. Chaque élément de o(g) représente une fonction négligeable devant g, mais a priori inconnue et différente d'un éventuel autre élément de o(g). Il convient donc de garder en mémoire, qu'en pratique, à chaque fois que l'expression o(g) apparaît, elle correspond a une nouvelle (autre) fonction ε telle qu'elle est définie dans la définition de négligeabilité citée ci-dessus. Par exemple, pour montrer que $o(x^n) + o(x^m) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)\ \forall n \leq m$, on écrit :

$$o(x^n) = x^n\varepsilon_1(x) avec \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$$

$$o(x^m) = x^m\varepsilon_2(x) avec \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$$

Donc $o(x^n) + o(x^m) = x^n\varepsilon_1(x) + x^m\varepsilon_2(x) = x^n\varepsilon_1(x) + x^{n+(m-n)}\varepsilon_2(x) = x^n(\varepsilon_1(x) + x^{(m-n)}\varepsilon_2(x)) = x^n\varepsilon(x)$où $\varepsilon(x) = (\varepsilon_1(x) + x^{(m-n)}\varepsilon_2(x)) \to 0\ quand\ x \to 0\ puisque\ n \leq m, \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0\ et\ \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$

Ainsi $o(x^n) + o(x^m) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)\ \forall n \leq m$

Lorsque nous perdons de vue le lien avec la définition et on oubli la relation première entre la notation « petit o » et la fonction ε avec tous les détails, on risque de commettre des erreurs qui sont motivées par la syntaxe que met en avant l'*objet ostensif* $f \underset{x_0}{=} o(g)$. Par exemple, si nous considérons les deux expressions suivantes $f \underset{a}{=} o(g)$ et $f' \underset{a}{=} o(g)$ nous risquons de conclure que $f = f'$ au voisinage de a. Ce qui est bien évidement faux. En effet, $x = o(x^2)$ au v(+∞) et $x + 1 = o(x^2)$ au v(+∞) mais ceci ne donne pas le droit de dire que $x = x + 1$ car pour tout $x \in IR, x \neq x + 1$. Aussi, écrire $f + o(h) = g + o(h)$ ne nous donne pas le droit de simplifier par $o(h)$ et dire en conséquence que $f = g$.

Le signe de l'égalité figurant dans l'expression $f \underset{a}{=} o(g)$, en plus de sa complexité, n'est pas symétrique, contrairement à son sens usuel. Par exemple, l'*objet ostensif* $x^2 + o(\ln(x)) = o(\mathrm{x}^2)$ doit se comprendre comme voulant dire que : $\forall h(x) \in o(\ln(x)), \exists g(x) \in o(x^2)$ tel que $x^2 + h(x) = g(x)$. Par contre, l'*objet ostensif* $o(x^2) = x^2 + o(\ln(x))$ doit se comprendre comme voulant dire que : $\forall g(x) \in o(x^2), \exists h(x) \in o(\ln(x))$ tel que

$g(x) = x^2 + h(x)$. Ainsi, $x^2 + o(\ln(x)) = o(\mathrm{x}^2)$ est une chose, $o(x^2) = x^2 + o(\ln(x))$ en est une autre. Il faut noter aussi que cet exemple soulève la problématique de la quantification implicite dans les énoncés mathématiques (DURAND-GUERRIER, 2003 ; DURAND-GUERRIER, 2016).

Comment peut-on aussi réaliser, par exemple, pour m > n que $o(x^n) = o(x^m)$ lorsque x est au voisinage de +∞ et que « paradoxalement » $o(x^m) \neq o(x^n)$ au voisinage de +∞, si on ne manipule pas l'égalité dans l'expression avec beaucoup de prudence et revenir à la définition originelle du « petit o ». De même, comment peut-on concevoir au premier abord que $o(\lambda \mathrm{f(x)}) = \mathrm{o}(\mathrm{f(x)})\ \forall\lambda \in \mathrm{IR}$ et que $o(\mathrm{f(x)}) = \mathrm{o}(\lambda\mathrm{f(x)})$ seulement ∀λ

$\in \mathrm{IR}^*$.

Ces exemples illustrent bien la non symétrie du signe de l'égalité dans la notation « petit o » de Landau. Abandonner, à l'occasion de cette notation, la symétrie dans la relation d'égalité n'est pas une chose simple. Car, l'usage habituel de ce symbole repose exactement sur cette relation. Il est ainsi difficile de concevoir et d'utiliser le signe de l'égalité diminué de la relation de symétrie qui lui est naturellement liée.

Dire que « f est un o(g) » ne donne pas, rigoureusement, le droit d'utiliser le signe de l'égalité « = » dans l'*objet ostensif* et écrire ainsi $f = o(g)$. Reynes (1994) souligne que l'égalité, à un niveau élémentaire, n'est qu'une traduction mathématique d'une propriété linguistique du verbe être : « 12 est le double de 6 » se traduit naturellement et formellement par $12 = 6 \times 2$. Le signe de l'égalité est une traduction du verbe « être » dans la phrase. Le signe « = » met en avant qu'un même objet possède deux dénominations différentes ou encore qu'un même signifié (la valeur 12) admet deux signifiants différents (le nombre 12 et le nombre 6x2) (VERGNAUD, 2002). Reynes (1994) met en garde que le « est » dans une phrase comme « 12 est un nombre pair » ne joue pas le même rôle du fait que le « un » dans l'expression « un nombre pair » est un article indéfini. Ainsi, « 12 » et « un nombre pair » sont deux expressions qui renvoient à deux signifiés différents et donc le « est », dans la phrase, qui les relie ne peut se traduire par une égalité : « …le "est" ne signifie pas ici "est la même chose que" et ne peut donc pas être traduit par "=" » (REYNES, 1994, p. 63).

Il ajoute un peu plus loin que : « ...la phrase "truc = machin" signifie que les deux écritures truc et machin sont deux dénominations d'UN SEUL et même objet, deux noms pour la même chose. » (Ibid, p. 63).

Nous pensons, et pour les mêmes raisons, qu'il est troublant, voir contresens, de traduire l'expression « f est un o(g) » par « $f = o(g)$ » car « f » et « un o(g) » revoient à deux signifiés différents et ne sont donc pas deux signifiants différents d'un même signifié : « f » désigne une fonction, alors que « o(g) » désigne un ensemble de fonction.

La problématique de l'usage du signe de l'égalité dans la notation de Landau et les ambigüités syntaxiques et sémantiques qu'elle pourrait produire chez certains étudiants, soulève la question de ce qu'est une bonne notation en mathématiques.

Biletch, et al. (2015) ont développés un modèle d'analyse permettant de distinguer une bonne notation d'une mauvaise en mathématiques. Ils sont arrivés à synthétiser et à fixer quatre critères : la Concision (the Conciseness) (1), la Non-Ambiguïté et Cohérence (the Unambiguity and Consistency) (2), la Compatibilité avec les Conventions Existantes (the Compatible with Existing Conventions) (3) et la Facilité à Produire Typographiquement (the Easy to Produce Typographically) (4).

Relativement à notre problématique, nous nous limitons à présenter, ici, le deuxième et le troisième critère.

A propos du deuxième critère « *La Non Ambiguité et Cohérence* » de l'écriture mathématique, les auteurs soulignent que le respect de ce critère reste un objectif recherché par tous les mathématiciens de tous les temps. Pour l'assurer et éviter les confusions, ils notent dans la page 34, qu'une même notation doit satisfaire deux exigences: la première consiste à éviter d'utiliser la même notation pour des usages différents. Ceci garantit principalement la non-ambiguïté de la notation ; la deuxième consiste à éviter d'utiliser une autre notation différente pour désigner la même notion. Ceci garantit principalement la cohérence du texte mathématique. Selon eux, ce critère est d'une grande importance car: «… when notations are ambiguous, mathematical writing becomes incomprehensible or at best confusing.» (BILETCH et al., 2015, p. 41).

Le troisième critère « *La Compatibilité avec les Conventions Existantes* » est, par rapport à notre problématique, le plus important. Biletch,B et al (2015) soulignent qu'une notation mathématique est vivable dans le monde des notations déjà existantes, si, entre autres, elle se trouve compatibilité avec les notations et les conventions déjà là. C'est d'ailleurs l'une des difficultés les plus importantes que rencontrent les mathématiciens en introduisant, à chaque fois, une nouvelle notation mathématique.

Une notation compatible avec les notations et les conventions existantes est donc nécessaire pour faciliter la communication et éviter les quiproquos qui rendent les écrits mathématiques difficiles à déchiffrer ce qui va exactement à l'encontre des objectifs du formalisme mathématique.

Ce critère de compatibilité avec les conventions existantes est, pour nous en tant que didacticiens, d'une importance capitale car tout désaccord entres les conventions de notation soit petit qu'il soit peut engendrer des malentendus et des difficultés de conceptualisation pour un apprenant non expert.

Dans la notation « petit o » de Landau, nous remarquons que ce troisième critère d'une bonne notation mathématique n'est pas respecté. En effet, la notation $f \underset{a}{=} o(g)$ engage le symbole de l'égalité qui est historiquement beaucoup plus ancien que la notation de Landau. Selon Lipscombe (2012), il a été introduit pour la première fois par le mathématicien Robert Ricorde en 1557 dans son ouvrage *The Whetstone of Witte*. Ce symbole comme nous l'avons vu plus haut doit mettre en relation deux expressions représentant le meme objet mathématique. Or, ce symbole d'égalité tel qu'il est impliqué dans la notation « petit o » de Landau met en relation deux expressions qui représentent deux objets mathématiques différents.

En effet, dans la notation $f \underset{a}{=} o(g)$, alors que le f représente une fonction, le $o(g)$ représente un ensemble de fonctions à savoir celui des fonctions négligeables devant g au voisinage du point a. Ainsi, le symbole de l'égalité dans la notation « petit o » de Landau « viole » le sens classique de l'égalité en mathématiques. Les répercussions de cette incompatibilité peuvent être considérables pour un non averti comme nous l'avons précisé plus haut et comme nous le verrons dans le dernier paragraphe de cet article. Cette incompatibilité va aussi, inéluctablement, influer sur le critère 2 (La Non Ambiguité et Cohérence). En effet, les deux opérations élémentaires de l'addition et de la soustraction par exemple vont d'un seul coup perdre leur sens usuel et familier lorsqu'ils se présentent dans des expressions mathématiques comme $o(g) + o(g) = o(g)$ (1) ou $o(g) - o(g) = o(g)$ (2). Ces deux écritures peuvent être embarrassantes pour certains du fait du décalage qu'elles expriment par rapport à la norme usuelle. Certes $o(g) + o(g) = 2o(g)$ et $2o(g) = o(g)$, mais cette dernière propriété pourrait paraitre étrange et non évidente pour un non averti. La deuxième écriture, ne peut passer aussi sous silence. Elle pourrait sembler manquer de rigueur et de clarté. Pour lever les ambigüités, il faut dépasser la syntaxe en jeu dans l'ostensif et faire, par exemple, une lecture de cet ostensif dans un langage ensembliste : soit $A = o(g)$ l'ensemble des fonctions négligeables devant g et soit $B = o(g) - o(g) = A - A$ l'ensemble des différences de deux fonctions de A. $B = A$ signifie que B est inclus dans A. En d'autres termes $o(g) - o(g) = o(g)$ doit se comprendre comme voulant dire que la différence de deux fonctions quelconques négligeables devant g est une fonction négligeable devant g.

Nous savons que l'un des objectifs de l'introduction des notations dans l'activité mathématique est de guider et d'aider l'esprit à raisonner et d'alléger la charge cognitive. Nous pensons que cet objectif est difficile à atteindre pour certains étudiants dans le cas de la notation « petit o ». Cette notation demande une manipulation syntaxique prudente nécessitant beaucoup de vigilance. Certes, un expert ne va pas être gêné face à ce type d'écriture du fait de sa maîtrise des différentes dimensions syntaxiques et sémantiques dissimulées dans cette notation. Mais, en tant que didacticiens nous trouvons que cette incompatibilité et les conséquences qu'elle engendre en termes d'ambigüités et d'incohérences interne relativement à cette notation ne peut qu'accroître les difficultés de certains étudiants manipulant cette notation surtout lorsque le lien entre cette notation et la définition de négligeabilité est très vite abandonné pour laisser la place quasi exclusive à cette notation dans l'activité mathématique.

Nous enregistrons ici une vraie rupture de contrat exprimant un décalage incontestable existant entre le sens ordinaire du signe de l'égalité et le sens de ce même signe dans les notations de Landau. Cette situation est inaccoutumée en mathématiques. Le symbole élémentaire de l'égalité qui a un sens bien installé et bien familier depuis les premières années de l'école et qui a gardé son sens tout au long de la scolarité perd d'un seul coup, à l'occasion des notations de Landau, tout son sens usuel.

En plus de l'incompatibilité du signe de l'égalité avec son usage dans la notation « petit o », un autre problème, inattendu, a émergé à savoir l'interférence de la conception commune de la négligeabilité avec la notion mathématique de négligeabilité.

La négligeabilité entre le sens mathématique et celui du sens commun

La négligeabilité n'est pas seulement une notion mathématique. C'est aussi un terme couramment utilisé dans la vie de tous les jours. Il est saturé de sens ce qui pourrait s'avérer problématique dans la classe de mathématiques.

Dans Le Robert en ligne, le terme « négligeable » est un adjectif qui se rapporte à ce « *Qui peut être négligé, qui ne vaut pas la peine qu'on en tienne compte.* ». Il est synonyme de « *dérisoire* », « *minime* », « *insignifiant* »…Larousse en ligne propose : « *Qui peut être négligé, dont on ne peut pas tenir compte.*». Pour illustrer cette définition, Larousse propose l'expression suivante : « *Traiter quelqu'un ou quelque chose comme (une) quantité négligeable, ne pas tenir compte de leur existence, de leur opinion, les estimer sans importance.*». En arabe le terme *négligeable* peut se traduire par les locutions suivantes : « bila kima » (بلا قيمة), « dha-il » (ضئيل), « mouhmalon » (مهمل), « mouhamachon » (مهمّش)… Selon le contexte on utilise l'une ou l'autre des locutions. Mais, en référence au dictionnaire arabe en ligne « Al Maany »[3], l'idée en commun se dégageant de toutes ces locutions est, comme dans le français : « ce qui est sans importance », « insignifiant », « petit »…

Deux différences majeures peuvent émerger en confrontant le terme de négligeabilité

[3] Al Maany en ligne : https://www.almaany.com/

entre son usage en mathématiques et son usage dans la vie courante.

En mathématiques, la négligeabilité admet une définition qui précise, sans équivoque, son sens et qui implique plusieurs notions mathématiques. La négligeabilité dans son usage courant ne se réfère pas à une définition. Son sens est profondément ancré dans les usages quotidiens selon les exigences de la situation et de l'état socio-psychologique de l'individu : ce qui est négligeable aujourd'hui peut ne pas l'être demain. Ce qui est négligeable ici peut ne pas l'être ailleurs. La négligeabilité dans son usage courant est une appréciation subjective.

En mathématiques, la négligeabilité est une notion relative et non absolue. On ne parle pas de fonction négligeable, on parle plutôt d'une fonction négligeable devant une autre. La négligeabilité en mathématiques est une relation de comparaison explicite entre deux fonctions. Dans son usage courant, la négligeabilté n'exige pas la comparaison explicite. On n'est pas obligé de relativiser. Le contexte pourrait suffire pour comprendre le sens recherché par l'usage du mot négligeable, même si ce sens peut susciter des désaccords. Camus (1947), par exemple, dans « La peste » souligne la manipulation jouée par l'agence de renseignement Ransdoc qui annonçait un jour la collecte d'environ huit mille rats et le lendemain elle « …annonça que le phénomène avait cessé brutalement et que le service de dératisation n'avait collecté qu'une quantité négligeable de rats morts. La ville respira. » (p.21).

Par cette deuxième annonce l'agence Ransdoc, et pour des raisons politiques, veut banaliser le phénomène en soufflant qu'il est négligeable, insignifiant ne méritant pas de continuer la polémique.

Ces différences nous conduisent à chercher à comprendre les effets didactiques éventuels du sens de la négligeabilité dans la vie de tous les jours sur la conceptualisation de la notion de négligeabilité en mathématiques et notamment en développement limité, chez certains étudiants.

Quand on écrit un développement limité d'une fonction en un point, on fait une approximation polynomiale de cette fonction au voisinage de ce point. C'est-à-dire on écrit cette fonction comme la somme d'une fonction polynomiale et d'une fonction négligeable devant cette fonction polynomiale au voisinage du point considéré. Par exemple le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 d'une fonction f n-fois dérivable est donné par : $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$. $P_n(x)$ est la fonction polynomiale et $o(x^n)$ est une fonction négligeable devant $P_n(x)$ au voisinage de 0. Dire que $o(x^n)$ est négligeable devant $P_n(x)$ a bien un sens en mathématiques. « Etre négligeable devant », ne veut en aucun cas dire « être insignifiant ». Or, dans la vie courante « être négligeable » signifie très souvent « être insignifiant ». Cette conception, du sens commun, de la négligeabilité pourrait impacter la conceptualisation de la négligeabilité dans la classe de mathématiques surtout lorsque la notation “petit o” reste énigmatique renfermant des zones d’ombres et donc superficiellement assimilée.

La négligeabilité est donc un concept a double coloration. Il est à la fois un concept quotidien et un concept mathématique. A ce sujet, Brossard (2008) souligne la force et la faiblesse des concepts quotidiens et des concepts scientifiques étudiés à l’école :

> […] Les concepts quotidiens sont « forts » en ce qu’ils sont saturés d’expériences concrètes…mais ils ont un faible degré de généralité (là est leur faiblesse). Inversement les concepts scientifiques ont un haut degré de généralité et sont mis en œuvre consciemment et volontairement (là est leur force) mais au moment de leur transmission, du fait de leur pure généralité, ils ne permettent pas encore de conceptualiser les expériences concrètes (là réside leur faiblesse) (BROSSARD, 2008, p. 76).

Relativement à notre questionnment, nous trouvons que ce passage est plus signifiant lorsaque nous remplaçons le terme « généralité » par le terme « précision ». Ce conflit entre concept quotidien et concept scientifique pourrait amener certains étudiants à considérer, inconsciemment, le concept quotidien alors que la situation exige de faire appel au concept scientifique (BOERO; DOUEK, 2008) et (VYGOTSKI, 1934-1997). Ceci pourrait s’expliquer par le fait que le concept quotidien est « *saturé d’expériences concrètes* » (c’est sa force) et le concept scientifique ne rend pas vraiment compte des expériences concrètes (c’est sa faiblesse). Brossard (2008, p.76) souligne que pour amener l’apprenant à adopter le concept scientifique, il est nécessaire de tenir compte du concept quotidien qui lui est associé et de le prendre comme point de départ pour une meilleure conceptualisation du concept scientifique.

Dans notre cas, la complexité syntaxique, qui peut brouiller l’accès aux aspects sémantiques (DUVAL, 2006) dans la notation de Landau, peut être source d’erreurs pour un non averti. Cette complexité pourrait conduire ce dernier à ne retenir du concept mathématique que l’idée de la négligeabilité en faisant fi de tous les détails dissimulés par la notation. Or, ne tenir compte dans la notation de Landau que l’idée de la négligeabilité qui interfère avec l’idée de la négligeabilité dans son usage quotidien pourrait dérouter certains étudiants. Voici un exemple d’erreur possible :

Déterminer un développement limité au voisinage de 0 de $h(x) = e^x \cos(x)$ sachant qu’au voisinage de 0, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.

Un non averti peut procéder comme suit :

$$(1+x+\frac{x^2}{2})\left(1-\frac{x^2}{2}\right)=1-\frac{x^2}{2}+x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}=1-x-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}.$$

Donc au voisinage de 0, $h(x)=e^x\cos(x)=1-x-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}+o(x^4)$.

Or ceci est faux. En effet :

$$h(x)=e^x\cos(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)=1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)+x-\frac{x^3}{2}+x\,o(x^3)+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}o(x^3)+o(x^2)-\frac{x^2}{2}o(x^2)+o(x^2)o(x^3)=1-x-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}+\left(o(x^3)+x\,o(x^3)+\frac{x^2}{2}o(x^3)+o(x^2)-\frac{x^2}{2}o(x^2)+o(x^2)o(x^3)\right)=1-x-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}+\left(o(x^3)+\ o(x^4)+o(x^5)+o(x^2)+o(x^4)+o(x^5)\right)=\ 1-x-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}+o(x^2)\ car\ o(x^n)+\ o(x^m)=o\left(x^{\min(n,m)}\right)\ au\ voisinage\ de\ 0.$$

Donc

$$h(x)=e^x\cos(x)=\ 1-x+x^2\left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+o(1)\right)=1-x+x^2\left(o(1)\right)$$
$$=1-x+o(x^2)$$

Nous pensons que le retour vers l'écriture première $x^n\,\varepsilon(x)=o(x^n)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)\ =0$ peut aider à éviter certaines difficultés que pourrait engendrer la notation "petit o" déconectée de sa definition première. En effet, une fois arrivé à cette expression :

$$h(x)=e^x\cos(x)=1-x-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}+\left(o(x^3)+x\,o(x^3)+\frac{x^2}{2}o(x^3)+o(x^2)-\frac{x^2}{2}o(x^2)+o(x^2)o(x^3)\right)$$

nous pouvons écrire :

$$h(x)=e^x\cos(x)=1-x-\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{4}+\left(x^3\,\varepsilon_1(x)+x^4\,\varepsilon_2(x)+x^5\varepsilon_3(x)+x^2\varepsilon_4(x)-x^2\varepsilon_5(x)+x^5\varepsilon_6(x)\varepsilon_7(x)\right)$$

avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_i(x)\ =0, \forall i\in\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$$donc\ h(x)=e^x\cos(x)=1-x+x^2\left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+x\,\varepsilon_1(x)+x^2\,\varepsilon_2(x)+x^3\varepsilon_3(x)+\varepsilon_4(x)-\varepsilon_5(x)+x^3\varepsilon_6(x)\varepsilon_7(x)\right)=1-x+x^2\varepsilon(x)$$

puisque

$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+x\,\varepsilon_1(\mathrm{x})+x^2\,\varepsilon_2(\mathrm{x})+x^3\varepsilon_3(\mathrm{x})+\varepsilon_4(\mathrm{x})-\varepsilon_5(\mathrm{x})+x^3\varepsilon_6(\mathrm{x})\varepsilon_7(\mathrm{x})\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

D'où $h(x)=e^x\cos(x)=\ 1-x+o(x^2)$.

Dans ce qui suit, nous analyserons un échange qui a eu lieu entre des étudiants et leur enseignant dans une classe ordinaire de mathématiques autour des problématiques relatives à la notation « petit o » de Landau.

Des difficultés relatives à la notation de Landau dans une classe

En discutant par hasard, au mois d'avril 2021, avec un collègue de mathématiques sur les problématiques soulevées dans cet article, il me témoigne qu'il a rencontré, récemment, dans l'un de ses cours ce type de problèmes auprès de ses étudiants (Il s'agit d'une dizaine d'étudiants travailleurs inscrits en première année universitaire en Licence Génie Mécanique. Le cours est dispensé dans la langue française). Il m'informe qu'à l'occasion d'un calcul simple relatif au développement limité, un échange entre les étudiants l'a interpelé. Il m'ajoute que malheureusement il n'était pas suffisamment sensible par rapport aux difficultés qui ont jaillis. Cet échange a eu lieu dans une classe ordinaire (LABORDE *et al.* (2002, p. 95) lors d'un cours en ligne enregistré au mois de mars 2021 pendant la période de confinement (en cette période le coronavirus est en plein prolifération en Tunisie et les enseignements en ligne sont encouragés).

L'enseignant me passe l'enregistrement et me montre l'échange en question.

L'échange porte sur un exercice d'application simple de développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de la fonction $\frac{1}{1-x}-\ e^x$.

Quelques minutes après l'avoir proposé aux étudiants, une étudiante prend la parole et propose sa correction. L'enseignant note ses dires sur sa propre feuille. Les écrits s'affichent alors sur les écrans des étudiants :

E_1 (l'étudiante dicte et l'enseignant écrit) : *Au voisinage de 0 on a* $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+o(x^3)$ *et* $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$. *Donc* $\frac{1}{1-x}-\ e^x=1+x+x^2+x^3+o(x^3)$ - $(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\ =\frac{x^2}{2}+\frac{5}{6}x^3$

Après une dizaine de secondes de silence, l'enseignant intervient :

En (l'enseignant) : Vous êtes d'accord ?

E2 : Il manque le petit o
E1 : Il est parti on a $o(x^3)$moins $o(x^3)$

Certains étudiants disent qu'il faut mettre le « petit o » sinon ce n'est pas un développement limité.

E1 : C'est vrai…c'est bizarre…mais ils sont partis …
E2 : Il faut laisser un petit o…
E3 : Puisque le dernier terme est x^3 on met $o(x^3)$

L'enseignant (En) ajoute à la dernière expression le $o(x^3)$: $\frac{x^2}{2}+\frac{5}{6}x^3+o(x^3)$ et demande des explications.

En : Pourquoi il faut mettre le $o(x^3)$?
E2 : Le petit o ne part pas car ce n'est pas le même. C'est une quantité négligeable mais elle n'est pas la même…
E1 : J'ai pas compris…
E2 : Le premier petit o est une fonction négligeable le deuxième petit o est une autre fonction négligeable. Donc la différence c'est pas rien c'est une autre fonction qui est négligeable.
En : Voilà…c'est clair ?...On passe si c'est bon au deuxième exemple...

Mais une autre étudiante en donnant l'impression de plaisanter pose à l'enseignant la question suivante:

E4 : (son intonation témoigne qu'elle sourit) Est-ce que c'est faux si on ne met pas le zéro ?
En : Le zéro ?... Ce n'est pas un zéro. Faites attention…C'est un petit o…
E4 : Oui oui le petit o…il est négligeable… au final c'est rien …donc ça ne change rien…
En : Mais bien sûr il faut mettre le petit o sinon il n'y aura pas d'égalité…c'est négligeable oui mais c'est pas rien…le petit o représente l'écart entre la fonction et le polynôme il est petit mais c'est pas rien… c'est clair ?
E2 : Oui oui ça va…
En : Faites attention hein… on passe alors au deuxième exemple…

Avant d'analyser cet échange, nous tenons à noter que suite à des discussions informelles avec l'enseignant, il nous a informé que les propriétés relatives au maniement de la notation « petit o » n'ont pas été explicitement enseignés dans ce cours. Il a juste introduit cette notation à l'occasion de la définition première de négligeabilité. Il nous a indiqué que son choix est justifié par le fait que cette notation n'est qu'un outil et qu'elle ne représente pas, en elle-même, un objectif d'enseignement, ceci d'une part et d'autre part par le fait que faute de temps alloué au chapitre « développements limités », il ne peut pas trop s'attarder sur cette notation. Ceci montre que la dialectique, *ostensifs*/*non ostensifs*, dans le cas de la notation « petit o », n'a pas vraiment été travaillée par cet enseignant. On retrouve dans ce positionnement le constat important de Bosch et Chevallard (1999):

> La méprise qui consiste à supposer que la perception des ostensifs serait naturelle – c'est-à-dire non construite – explique dans une large mesure ce que la théorie des situations a mis en évidence sous le nom de stratégies didactiques d'ostension. On désigne par ce terme la pratique d'enseignement où le professeur se limite à montrer aux élèves un objet ostensif en croyant qu'il se créera spontanément un rapport adéquat à cet ostensif et, surtout, aux non ostensifs auxquels il est censé renvoyer (p. 92).

Analysons maintenant les interventions transcrites, ci-dessus, entre les étudiants et l'enseignant.

Ce bref échange montre la difficulté de certains étudiants à conceptualiser le sens et le rôle de l'expression $o(x^3)$ dans le développement limité.

L'étudiante E_1 semble considérer $o(x^3)$ comme une fonction particulière de sorte que, pour elle, $o(x^3) - o(x^3)$ donne 0 comme par exemple le fait de dire que $f(x) - f(x) = 0$ où f est une fonction réelle quelconque. Malgré l'expression de sa perplexité, elle avoue ne pas comprendre son erreur même après la remarque faite par l'étudiant E_2 lorsqu'il affirme que « *Le petit o ne part pas car ce n'est pas le même. C'est une quantité négligeable mais elle n'est pas la même…* ». L'erreur commise par l'étudiante E_1 révèle sa difficulté à saisir le sens mathématique de la notation $o(x^3)$. Elle semble ne pas réaliser que $o(x^3) - o(x^3)$ représente la différence de deux fonctions quelconques, chacune est négligeable devant x^3 et que par conséquent cette différence n'est pas nulle mais plutôt égale à $o(x^3)$.

L'étudiant E_3 semble avoir une conception du « petit o » qui consiste à considérer $o(x^n)$ comme une expression qui s'impose et qui doit figurer dans l'expression d'un développement limité, non pas pour des raisons mathématiques claires, mais pour des raisons d'ordres formels *: le terme qui suit la fonction polynômiale de monôme de plus haut degré x^n est $o(x^n)$*. L'usage du mot « *puisque* » dans son intervention nous semble révélateur de cette conception. D'ailleurs, il n'a pas défendu son point de vue par la suite, ce qui pourrait témoigner de son incapacité à expliquer mathématiquement sa conception du sens et du rôle de l'expression $o(x^n)$ dans un développement limité.

L'étudiante E_4 soulève par son intervention, à la fin du passage étudié, la problématique du sens commun de la négligeabilité (Il faut noter que cette intervention inattendue était à l'origine du développement du paragraphe ci-dessus intitulé « La négligeabilité entre la connotation mathématique et celle du sens commun »). Nous pensons que l'usage du mot « zéro » pour exprimer le « petit o » est un lapsus révélateur de sa représentation de cet ostensif qui prend place à la fin du développement limité. Il nous semble que, pour elle, cet ostensif ne joue pas un rôle mathématique important voir même sans intérêt dans le développement limité. Pour elle, le « petit o » n'est finalement « rien » comme elle le dit dans son intervention. Or, dans le sens commun le « zéro » est synonyme de « rien ». Pour se convaincre, il suffit de se rappeler l'expression familière « *partir de zéro* » qui signifie commencer quelque chose de « rien » avec ses propres capacités. L'idée de « rien » n'est pas loin de l'idée de la négligeabilité. Comme nous l'avons expliqué plus haut, dans l'usage commun, ce qui est négligeable est souvent synonyme de « rien » ou de « presque rien ». D'ailleurs l'étudiante E_4 le dit explicitement dans son intervention: *« Oui oui le petit o…il est négligeable… au final c'est rien …».*

Cette conception de la négligeabilté semble être à l'origine de son questionnement : « *Est-ce que c'est faux si on ne met pas le zéro ? ».* En réponse à ses difficultés, l'enseignant précise que d'une part, le « petit o » n'est pas un « zéro » et que d'autre part, cet ostensif dans l'expression du développement limité joue bien un rôle et que son absence entraine l'illégitimité de l'usage du symbole de l'égalité. Il souligne que ce « petit o » représente *« …l'écart entre la fonction et le polynôme… »* et ajoute que certes *« …il est petit mais c'est pas rien ».* Ses explications peuvent sensibiliser et convaincre certains apprenants du rôle et du sens du « petit o », mais il nous semble que le recours à une représentation graphique dans laquelle l'enseignant précise le sens du « petit o » est essentiel et peut aider les non avertis à donner plus de sens à cet ostensif. Dans un article soumis à publication, nous avons montré à travers un exemple numérique que le reste du développement limité n'est pas toujours négligeable et que le problématique lié à l'ostensif « petit o » est beaucoup plus complexe qu'elle n'y paraît.

A travers cet échange, nous remarquons que l'enseignant, avant l'intervention de l'étudiante E_4, n'a pas vraiment problématisé les difficultés des étudiants E_1 et E_3. Il s'est suffi et s'est appuyé sur l'intervention de l'étudiant E_2, qui semble bien conceptualiser la notation $o(x^n)$, pour faire avancer son cours comme si cette intervention est suffisante et suffisamment transparente pour les autres pour lever leurs difficultés. Cette pratique est classique lorsque l'enseignant se trouve sous l'emprise du temps didactique et que:

> Prendre en compte les réponses non-attendues des élèves comporte un coût qu'il juge dans l'action sans doute trop important au regard de l'avancement, de la progression à assurer. Ce coût serait celui de retarder la production du temps didactique. (COTRET; GIROUX, 2003, p. 166).

Il est aussi possible que l'enseignant, relativement à ses objectifs de cours, ne voyait pas dans les difficultés des étudiants relativement à cette notation quelque chose sur laquelle il convient de s'arrêter. Mais la question de l'étudiante E_4 l'a surpris et il s'est retrouvé dans l'obligation de clarifier certaines choses bien que selon nous ses remarques, comme nous l'avons expliqué ci-dessus, restent insuffisantes pour une bonne conceptualisation de la notation « petit o ».

Les diverses difficultés qui se sont manifestées à travers ce bref échange entre les étudiants et l'enseignant montrent l'importance et la légitimité de notre problématique. Elles dévoilent spécifiquement la complexité syntaxique et sémantique de l'ostensif « petit o » de Landau aux apparences simples. Si, beaucoup d'étudiants peuvent dépasser cette complexité, d'autres, non suffisamment avertis, peuvent mal conceptualiser cette notation.

Conclusion

Dans cet article nous avons étudié l'opacité relative à l'ostensif « petit o » de Landau. Nous avons montré que la simplicité de la structure syntaxique de cette notation n'est qu'apparente et qu'elle cache en réalité une complexité sémantique pouvant ne pas être décelé par certains étudiants. Ce travail de recherche a permis de mettre en évidence que l'usage du symbole de l'égalité dans cette notation bien qu'il représente un atout d'utilité, il est source de difficultés, pour un non averti, du fait que le symbole de l'égalité figurant dans cette notation « viole » la sémantique classique de la notion mathématique d'égalité. Ceci nous conduit à ranger cette notation parmi les mauvaises en référence au modèle de Biletch et al. (2015) puisqu'elle transgresse le troisième critère d'une bonne notation mathématique à savoir « *La Compatibilité avec les Conventions Existantes* ».

La négligeabilité, qui est intimement liée à la notation « petit o » de Landau, est à la fois un concept mathématique et un concept quotidien. Ce dernier, qui renvoie dans la conception commune à l'idée de « rien » ou «de « presque rien », peut impacter la conceptualisation de la négligeabilité dans la classe de mathématiques chez certains étudiants surtout lorsque la notation de Landau est superficiellement assimilée. Les analyses que nous avons menées à partir d'un échange, dans une classe ordinaire de mathématiques, entre des étudiants et leur enseignant montrent l'interférence du concept quotidien de négligeabilité dans l'activité mathématique. Les analyses ont montré également que certains étudiants n'ont pas construit le sens mathématique de cette notation et que leurs difficultés sont en lien avec l'usage du symbole de l'égalité dans la notation de Landau.

Ce travail de recherche demande à être enrichi sur de nombreux points, notamment l'observation d'un grand nombre d'étudiants manipulant la notation « petit o » de Landau dans des situations mathématiques plus complexes. Une étude didactique auprès des enseignants de mathématiques et de physique dans des classes ordinaires ne peut que nous éclairer davantage sur les difficultés réelles relatives à l'enseignement et l'apprentissage de cette notation. Une étude comparable à celle-ci concernant la notation « grand O » est également souhaitable.

Recebido em: 16/12/2022

Aprovado em: 24/08/2023

Références

BILETCH, B.; KAY, K; AND YU, H. **An Analysis of Mathematical Notations**: For Better or For Worse. Document source. Worcester Polytechnic Institute, 2015.

BLOCH, I. Concepts, objets, symboles, enseignement des mathématiques… Quelques réflexions sur l'épistémologie et la didactique. **Petit x**, n. 97, p. 71-79, 2015.

BOERO, P. ; DOUEK, N. La didactique des domaines d'expérience. **Carrefours de l'Éducation**, n. 26, v. 2, p. 99-114, 2008.

BOSCH, M. ; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, n. 19, v. 1, p.77-124, 1999.

BROSSARD, M. Concepts quotidiens/ concepts scientifiques : Réflexions sur une hypothèse de travail. **Carrefours de l'Éducation**, v.26, n. 2, p.67- 82, 2008.

CAMUS, A. **La Peste**. Paris: Gallimard, 1947.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 12, n.1, p. 73-111, 1992.

CHEVALLARD, Y. Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In: S. MAURY, S.; CAILLOT, M. (Eds.), **Rapport au savoir et didactiques**. Paris : Fabert, 2003, p. 81-104.

DURAND-GUERRIER, V. Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. **Educational Studies in Mathematics**, n. 53, v. 1, p. 5-34, 2003.

DURAND-GUERRIER, V. Négation et quantification dans la classe de mathématiques. In: DAVAL, R. ; FRATH, P.; HILGERT, E.; PALMA, S. (Eds.). **Négation et référence.** Reims : ÉPURE - Éditions et Presses universitaires de Reims, 2016, p. 269-288.

DUVAL, R. Quelle sémiotique de l'activité et des productions mathématiques ? **Relime**, Numero Especial, p. 45-81, 2006.

LABORDE, C. ; COQUIDÉ, M. ; TIBERGHIEN, A. Les situations de formation en vue de l'apprentissage du savoir scientifique et mathématique. In: TIBERGHIEN, A. (Ed.), **Des connaissances naïves au savoir scientifique**. Programme « École et sciences cognitives », 2002, p. 81-108.

LANDAU, E. **Handbuch der Lehrer von der Verteilung der Primzahlen**, American Mathematical Society, 2000.

NÉGLIGEABLE. **Dictionnaire Larousse**, 2022. Extrait : le 10 janvier 2022 de https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/n%C3%A9gligeable/54069.