emd Ensino da Matemática em Debate

Estudo didático da ambiguidade própria à estrutura sintática da notação “o pequeno” de Landau

Étude didactique de l'ambiguité propre à la structure syntaxique de la notation "petit o" de Landau

Didactic study of the ambiguity specific to the syntactic structure of Landau’s “little o” notation

Rahim Kouki[1]

Imed Kilani[2]

RESUMO

A notação "o pequeno" de Landau é uma notação amplamente utilizada em análise. A sua simplicidade sintática dissimula uma complexidade semântica que pode confundir alguns estudantes. Isto resulta principalmente da utilização do símbolo da igualdade no ostensivo que paradoxalmente não desempenha, neste ostensivo, o papel de uma igualdade no sentido clássico. A esta dificuldade acrescenta-se uma outra, nomeadamente a interferência da concepção comum de negligenciabilidade sobre a mesma noção em matemática. As análises que realizámos a partir de uma troca, numa aula normal de matemática, entre os estudantes e o seu professor confirmam as dificuldades que algumas pessoas para manipular de modo convenente esse ostensivo.

Palavras-chave: Ostensivo; não ostensivo; sintaxe; semântica; igualdade; negligênciabilidade

RÉSUMÉ

La notation « petit o » de Landau est une notation largement utilisée en analyse. Sa simplicité syntaxique dissimule une complexité sémantique qui pourrait brouiller certains étudiants. Ceci découle principalement de l’usage du symbole de l’égalité dans l’ostensif qui paradoxalement ne joue pas, dans cet ostensif, le rôle d’une égalité au sens classique. A cette difficulté s’ajoute une autre, à savoir l’interférence de la conception commune de la négligeabilité sur la même notion en mathématiques. Les analyses que nous avons menées à partir d’un échange, dans une classe ordinaire de mathématiques, entre des étudiants et leur enseignant confirment les difficultés de certains à manipuler convenablement cet ostensif.

Mots-clés : *Ostensif ; non-ostensif ; syntaxe ; sémantique ; égalité ; négligeabilité.*

ABSTRACT

Landau's notation " little o " is a notation widely used in analysis. Its syntactic simplicity hides a semantic complexity that could confuse some students. This stems mainly from the use of the symbol of equality in the ostensive which paradoxically does not play, in this ostensive, the role of an equality

[1]. Université de Tunis el Manar, IPEI El Manar, ECOTIDI UR 16 ES 10. E-mail: rahim.kouki@ipeiem.utm.tn

[2]. Université Virtuelle de Tunis, ISEFC, ECOTIDI UR 16 ES 10. E-mail: kilanis2006@yahoo.fr

in the classical sense. To this difficulty is added another, namely the interference of the common conception of negligibility on the same notion in mathematics. The analyzes that we carried out from an exchange, in an ordinary mathematics class, between students and their teacher confirm the difficulties of some students in properly handling this ostensive.
Keywords : *Ostensive ; non-ostensive ; syntax ; semantics ; equality ; negligibility*.

Introdução

As notações de negligênciabilidade ou de preponderância "o pequeno" e de dominância "O grande" conhecidas hoje sob a denominação de "notações de Landau" são amplamente utilizadas em análise. Frequentemente, e por ocasião de um desenvolvimento limitado de uma função f de ordem n na vizinhança de 0, os matemáticos usam a notação $o(x^n)$ para subsituir a expressão $x^n\varepsilon(x)$ com $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$. $o(x^n)$ significa um resto, não prciso, para o qual o quociente por x^n converge a 0 quando x tende a o. O que se traduz simbólicamente por $\lim_{x\to 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$.

Os historiadores da matemática atribuem a autoria da notação "O grande" ao matemático Paul Bachmann, que a introduziu pela primeira vez em 1894 em sua obra Die analytische Zahlentheorie. Quanto à notação "o pequeno", foi introduzida por seu discípulo Edmund Landau que se inspirou na notação de seu mestre "O grande". Mas a divulgação dessas duas notações deve-se principalmente a Landau que as utilizou extensivamente em suas publicações e em particular no seu livro Handbuch der Lehrer von der Verteilung der Primzahlen (2000) publicado em alemão pela primeira vez em 1909. Neste artigo, limitemo-nos ao estudo das ambiguidades relacionadas à notação "pequeno o" para funções que são localmente negligenciáveis diante de outras.

Nós mostraremos que a simplicidade sintática dessa notação, que certamente apresenta vantagens, esconde na verdade uma complexidade semântica que pode não ser transparente para alguns estudantes. Nossa hipótese é que essa opacidade provém, entre outras coisas, da ambiguidade relativa à forma do próprio ostensivo. Isto certamente desempenha um papel importante na conceituação da noção de funções localmente negligenciáveis diante de outras, mas também apresenta falhas que podem ser fontes de muitas dificuldades para uma pessoa desinformada. Esse ostensivo não só não cuida da complexidade do conceito de negligenciabilidade, mas também e através de certas propriedades que dela resultam, "viola" a semântica habitual do sinal de igualdade.

No primeiro parágrafo estudaremos o interesse de considerar a notação "o pequeno" como uma noção que mantém relações entre o objeto ostensivo e o objeto não ostensivo. O segundo parágrafo será dedicado a destacar a incompatibilidade matemática dessa notação com a utilização do símbolo de igualdade que ela implica.

A notação «o pequeno» entre o objeto ostensivo e o objeto não-ostensivo

Na abordagem antropológica, Bosch e Chevallard (1999) modelam o conhecimento matemático em termos de objetos e inter-relações entre objetos. Eles estão particularmente interessados em objetos matemáticos que são geralmente chamados de "conceitos" ou "noções". A partir da questão da "natureza" e da "função" desse tipo de objeto, estabelecem uma distinção essencial entre dois tipos de objetos: objetos ostensivos e objetos não ostensivos. A distinção entre esses dois objetos resulta principalmente do fato de os primeiros, e não os segundos, serem perceptíveis e poderem ser concretamente manipulados. Sobre os objetos ostensivos, explicam que:

> Nós falaremos de objeto ostensivo - do latim *ostendere*, « mostrar, apresentar com insistência » - para nos referir a todo objeto tendo uma natureza sensível, uma certa materialidade, e que, desse fato, adquire uma realidade perceptível para o sujeito humano ». (BOSCH ; CHEVALLARD, 1999, p. 90).

Esses objetos ostensivos desempenham um papel importante na atividade do matemático e mantêm relações com objetos não ostensivos pertencentes ao mesmo campo do conhecimento. Bosch e Chevallard especificam que:

> Objetos não ostensivos são... todos esses "objetos" que, como ideias, intuições ou conceitos, existem institucionalmente - no sentido de que lhes é dada uma existência - sem no entanto serem vistos, ditos, ouvidos, percebidos ou mostrados por eles- mesmo: só podem ser evocados ou invocados pela manipulação adequada de certos objetos ostensivos associados (uma palavra, uma frase, um desenho gráfico, uma escrita, um gesto ou um discurso inteiro) (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 90).).

Assim, a notação $f \underset{x_0}{=} o(g)$ é um objeto matemático ostensivo. A noção de funções localmente desprezíveis em torno de um ponto na frente de outra função é um objeto matemático não ostensivo. Essa ligação entre o objeto ostensivo e o objeto não ostensivo na notação de Landau é explicada na seguinte definição chamada "definição de negligenciabilidade":

Sejam f e g duas funções reais definidas sobre I. $x_0 \in \overline{\mathrm{IR}}$ e x_0 aderente a I. Dizemos que f é negligenciável diante de g nas vizinhanças de x_0 se existe uma vizinhança V de x_0 e uma função ε: I∩V→IR para à qual: f(x)=ε(x)g(x) com $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$

Indicamos então $f \underset{x_0}{=} o(g)$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{=} o\big(g(x)\big)$ e dizemos que « f é igual a *o pequeno* de g nas vizinhanças de x_0.

Se a função g não se anular em x_0

$$f \underset{x_0}{=} o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

A modelização, segundo a abordagem antropológica, da atividade matemática em termos de tarefa, técnica, tecnologia e teoria (CHEVALLARD, 1992; CHEVALLARD, 2003), leva a traduzir:

> […] A implementação de uma técnica…por uma manipulação de ostensivos regulada por não ostensivos. Os ostensivos constituem a parte perceptível da atividade, ou seja, aquilo que, na execução da tarefa, é visível, tanto para o observador como para os próprios atores (Ibid, p. 92).

Bosch e Chevallard alertam que a relação com os ostensivos não deve se restringir a uma relação dependente apenas da percepção e da manipulação sintática mecânica. Essa última requer um apelo semântico de objetos não ostensivos que estão ligados a objetos ostensivos. Os ostensivos, portanto, não são livres. Mantêm relações com diferentes não ostensivos: "Objetos ostensivos, embora diretamente. (Ibid, p. 92).

A não consideração desta dialética leva a considerar a notação matemática como um simples objeto ostensivo que é suficientemente transparente e verifica um certo número de propriedades. Essa forma de ver as coisas leva a subestimar a sua complexidade e, consequentemente, a não se deter nela para analisá-la.

Didaticamente falando, é fundamental dar importância à análise e estudo dessa dialética, ostensiva/não ostensiva, para uma manipulação consciente e correta dos objetos ostensivos por um lado e para uma melhor conceituação dos objetos não ostensivos de outro. O professor encarregado desse trabalho é particularmente necessário quando o ostensivo em si não é naturalmente transparente e o seu manejo em determinados contextos matemáticos é confuso para o estudante. A notação de Landau é um exemplo que ilustra claramente os possíveis deslizes devido às ambiguidades sintáticas que estão escondidas nessa notação e que podem perturbar o aluno que lida com esta notação aparentemente simples. Isto apoia o ponto de vista de

Vergnaud (2002) e Bloch (2015) que apoiam o fato de o apelo ao uso de certos símbolos matemáticos em atividades matemáticas é uma fonte de dificuldade para estudantes.

O principal problema na notação "pequeno o" de Landau vem do uso do sinal de legalidade na forma ostensiva.

Incompatibilidade da notação "o pequeno" com o sinal de igualdade

O interesse das notações de Landau e em particular da notação "o pequeno" resulta do fato de poder ser facilmente integrada em cálculos e assim facilitar a comparação assintótica entre duas funções tanto nas vizinhanças do infinito como nas vizinhanças de um ponto. Podemos, por exemplo, considerar, nas proximidades de um ponto

Podemos, por exemplo, considerar, nas proximidades de um ponto x_0 a expressão f=g+o(g) para expressar o fato de que f é equivalente a g nas proximidades de x_0. É também, particularmente. prático para formalizar aproximações por meio da noção de expansão de Taylor-Young. Então, digamos por exemplo que $f(x) = 1 + 3x - 5x^2 + o(x^2)$) nas vizinhanças de 0, significa que f(x) é assimilável ao polinômio $P(x)=1+3x-5x^2$ nas vizinhanças de 0, e que o erro cometido por esta assimilação é negligenciável diante os valores vizinhos de 0 que pode assumir o monômio de graus mais altos que x^2 dessa expressão polinomial. Isso resulta no seguinte objeto ostensivo (1): $o(x^2) = \lim_{x \to 0} o(x^2)$. Este objeto ostensivo é ambíguo porque $o(x^2)$ que está à esquerda do sinal de igualdade não é $o(x^2)$que está à direita deste mesmo sinal. Enquanto o primeiro representa um elemento, o segundo representa um conjunto. A expressão ostensiva (1) deve então ser interpretada como significando que $o(x^2)$ (da esquerda) é uma função entre outras que pertencem ao conjunto $o(x^2)$ (da direita) das funções.

Portanto, ao escrever $f \underset{a}{=} o(g)$, devemos ter cuidado. Essa notação inclui o sinal de igualdade que, na realidade, não expressa igualdade no sentido habitual. Devemos, portanto, manipular este signo tendo em mente que ele expressa uma relação de pertencimento. Assim, $f \underset{a}{=} o(g)$, significa que f pertence ao conjunto o(g) de funções desprezíveis frente à g na vizinhança de a. Cada elemento de o(g) representa uma função desprezível em comparação a g, mas *a priori* desconhecida e diferente de um possível outro elemento de o(g). Deve-se, portanto, ter em mente que, na prática, cada vez que a expressão o(g) aparece, ela corresponde a uma nova (outra) função ε, tal como na definição de desprezibilidade citada acima. Por exemplo, para mostrar que $o(x^n) + o(x^m) = \lim_{x\to 0} o(x^n)\ \forall n \leq m$, escrevemos:

$$o(x^n) = x^n \varepsilon_1(x)\ com \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

$$o(x^m) = x^m \varepsilon_2(x)\ com \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

Portanto $o(x^n) + o(x^m) = x^n\varepsilon_1(x) + x^m\varepsilon_2(x) = x^n\varepsilon_1(x) + x^{n+(m-n)}\varepsilon_2(x) = x^n(\varepsilon_1(x) + x^{(m-n)}\varepsilon_2(x)) = x^n\varepsilon(x)$où $\varepsilon(x) = (\varepsilon_1(x) + x^{(m-n)}\varepsilon_2(x)) \to 0\ quando\ x \to 0\ para\ n \leq m, \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0\ e\ \lim_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$

Assim $o(x^n) + o(x^m) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)\ \forall n \leq m$

Quando perdemos de vista a ligação com a definição e esquecemos a relação primária entre a notação “ o pequeno” e a função ε com todos os detalhes, corremos o risco de cometer erros que são motivados pela sintaxe que apresenta o objeto ostensivo $f \underset{x_0}{=} o(g)$. Por exemplo, se considerarmos as duas expressões seguintes $f \underset{a}{=} o(g)$ e $f' \underset{a}{=} o(g)$ corremos o risco de concluir que $f = f'$ nas vizinhanças de a.. O que é obviamente falso.

De fato, $x = o(x^2)$ na v(+∞) e $x + 1 = o(x^2)$ na v(+∞) mas isso não dá o direito de dizer que $x = x + 1$ pois para todo $x \in IR, x \neq x + 1$. Também, escrever $f + o(h) = g + o(h)$ não nos dá o direito de simplificar por $o(h)$ e dizer em consequência que $f = g$.

O sinal da igualdade figurando na expressão $f \underset{a}{=} o(g)$ tem a mais sua complexidade, não é simétrica, contrariamente ao seu sentido usual. Por exemplo, o *objeto ostensivo* $x^2 + o(\ln(x)) = o(x^2)$ deve se compreender como dizendo que : $\forall h(x) \in o(\ln(x)), \exists g(x) \in o(x^2)$ tal que $x^2 + h(x) = g(x)$. Ao contrário, o *objeto ostensivo* $o(x^2) = x^2 + o(\ln(x))$ deve se compreender como dizendo que : $\forall g(x) \in o(x^2), \exists h(x) \in o(\ln(x))$ tal que

$g(x) = x^2 + h(x)$. Assim, $x^2 + o(\ln(x)) = o(x^2)$ é una coisa, $o(x^2) = x^2 + o(\ln(x))$ é uma outra. É preciso notar também que este exemplo levanta o problema da quantificação implícita em enunciados matemáticas (DURAND-GUERRIER, 2003 ; DURAND-GUERRIER, 2016).

Como podemos também perceber, por exemplo, para m > n que $o(x^n) = o(x^m)$ quando x está na vizinhança de +∞ e que “paradoxalmente” $o(x^m) \neq o(x^n)$ na vizinhança de +∞, se não tratarmos a igualdade na expressão com muita cautela e retornarmos à definição original de “o pequeno”. Da mesma forma, como podemos conceber à primeira vista que $o(\lambda f(x)) = o\big(f(x)\big)\ \forall\lambda \in$ IR et que $o(f(x)) = o\big(\lambda f(x)\big)$ somente $\forall\lambda \in$ IR*.

Estes exemplos ilustram claramente a não simetria do sinal de igualdade na notação "o pequeno" de Landau. Abandonar, por ocasião desta notação, a simetria na relação de igualdade não é algo simples. Porque o uso habitual deste símbolo se baseia exatamente nesta relação. É portanto difícil conceber e utilizar o sinal de igualdade reduzido pela relação de simetria que lhe está naturalmente ligada.

Dizer que "« f est un o(g) »não dá estritamente o direito de usar o sinal de igualdade "=" no objeto ostensivo e assim escrever $f = o(g)$. Reynes (1994) enfatiza que a igualdade, em nível elementar, é apenas uma tradução matemática de uma propriedade linguística do verbo ser: "12 é o dobro de 6" traduz-se natural e formalmente como 12=6×2. O sinal de igualdade é uma tradução do verbo "ser" na frase. O sinal "=" destaca que um mesmo objeto possui dois nomes diferentes ou que o mesmo significado (o valor 12) admite dois significantes diferentes (o número 12 e o número 6x2) (VERGNAUD, 2002). Reynes (1994) adverte que o "é" em uma frase como "12 é um número par" não desempenha o mesmo papel porque o "um" na expressão "um número par" é um artigo indefinido. Assim, "12" e "um número par" são duas expressões que se referem a dois significados diferentes e portanto o "é", na frase, que os liga não pode ser traduzido numa igualdade: "…o "é" não significa não aqui "é a mesma coisa que" e portanto não pode ser traduzido por "=""" (REYNES, 1994, p. 63).

Ele acrescenta um pouco mais que: "...a frase "truc = machin" significa que as duas escritas truc e machin são duas denominações de um único e do mesmo objeto, dois nomes para a mesma coisa. » (Ibid., p. 63).

Pensamos, e pelas mesmas razões, que é perturbador, até mesmo contraditório, traduzir a expressão "f é um o(g)" por "f=o(g)" porque "f" é "um o(g)" " referem-se a dois significados diferentes e, portanto, não são dois significados diferentes do mesmo significado: "f" designa uma função, enquanto "o(g)" designa um conjunto de funções.

O problema da utilização do sinal de igualdade na notação de Landau e das ambiguidades sintáticas e semânticas que ele pode produzir em certos estudantes levanta a questão do que é uma boa notação em matemática.

Biletch, et al. (2015) desenvolveram um modelo de análise para distinguir notações boas de notações ruins em matemática. Eles conseguiram sintetizar e definir quatro critérios: Concisão (a Concisão) (1), Não Ambiguidade e Coerência (a Inequívoca e

Consistência) (2), Compatibilidade com as Convenções Existentes (a Compatível com as Convenções Existentes) (3) e a Fácil Produzir Tipograficamente (4).

Relativamente ao nosso problema, limitamo-nos a apresentar, aqui, o segundo e o terceiro critério.

Quanto ao segundo critério "*A Não-Ambiguidade e Coerência*" da escrita matemática, os autores enfatizam que o respeito por este critério continua a ser um objetivo almejado por todos os matemáticos de todos os tempos. Para garantir isso e evitar confusão, observam na página 34 que a mesma notação deve satisfazer dois requisitos: o primeiro consiste em evitar usar a mesma notação para usos diferentes. Isto garante principalmente a inequívoca da notação; o segundo consiste em evitar utilizar outra notação diferente para designar o mesmo conceito. Isto garante principalmente a consistência do texto matemático. Segundo eles, este critério é de grande importância porque: "…quando as notações são ambíguas, a escrita matemática torna-se incompreensível ou, na melhor das hipóteses, confusa". (BILETCH et al., 2015, p. 41).

O terceiro critério "*A Compatibilidade com as Convenções Existentes*" é, em relação ao nosso problema, o mais importante. Biletch, B et al (2015) enfatizam que uma notação matemática é viável no mundo das notações já existentes, se, entre outras coisas, for compatível com as notações e convenções já existentes. Esta é também uma das dificuldades mais importantes que os matemáticos encontram ao introduzir, cada vez, uma nova notação matemática.

Uma notação compatível com as notações e convenções existentes é, portanto, necessária para facilitar a comunicação e evitar mal-entendidos que tornam os escritos matemáticos difíceis de decifrar, o que vai exatamente contra os objetivos do formalismo matemático.

Este critério de compatibilidade com as convenções existentes é, para nós, como didáticos, de capital importância porque qualquer desacordo entre as convenções de notação, por menor que seja, pode causar mal-entendidos e dificuldades de conceituação para um estudante não especialista. Na notação "o pequeno" de Landau, notamos que este terceiro critério de boa notação matemática não é respeitado. Na verdade, a notação $f \underset{a}{=} o(g)$ envolve o símbolo de igualdade que é historicamente muito mais antigo que a notação de Landau. Segundo Lipscombe (2012), foi introduzido pela primeira vez pelo matemático Robert Ricorde em 1557 em sua obra The Whetstone of Witte. Este símbolo, como vimos acima, deve relacionar duas expressões que representam o mesmo objeto matemático. No entanto, este símbolo de igualdade, tal como está implícito na notação “pequeno o” de Landau, conecta duas expressões que representam dois objetos matemáticos diferentes.

Na verdade, na notação $f \underset{a}{=} o(g)$, enquanto f representa uma função, o o(g) representa um conjunto de funções, nomeadamente aquela das funções desprezíveis frente à g nas vizinhanças do ponto a. Assim, o símbolo de igualdade na notação " o pequeno" de Landau "viola" o significado clássico de igualdade em matemática. As repercussões desta incompatibilidade podem ser consideráveis para os incautos, como especificamos acima e como veremos no último parágrafo deste artigo. Esta incompatibilidade também influenciará, inevitavelmente, o critério 2 (*Não Ambiguidade e Coerência*). De fato, as duas operações elementares de adição e subtração, por exemplo, perderão subitamente o seu significado habitual e familiar quando aparecerem em expressões matemáticas como o(g)+o(g)=o (g) (1) ou o(g) - o(g)=o(g) (2). Esses dois escritos podem ser embaraçosos para alguns devido à discrepância que eles expressam em relação à norma usual. Certamente o(g)+o(g)=2o(g) e 2o(g)=o(g), mas esta última propriedade pode parecer estranha e não óbvia para os desinformados. A segunda escrita também não pode ser ignorada. Pode parecer falta de rigor e clareza. Para remover as ambiguidades, devemos ir além da sintaxe envolvida no ostensivo e, por exemplo, ler este ostensivo em uma linguagem de conjunto: seja A=o(g) o conjunto de funções desprezíveis frente à g e seja B =o (g)-o(g)=A-A o conjunto de diferenças de duas funções de A. B=A significa que B está incluído em A. Em outras palavras o(g) - o(g) = o (g) deve ser entendido como significando que a diferença de quaisquer duas funções que são insignificantes em relação à g é uma função que é insignificante em relação à g.

Nós sabemos que um dos propósitos da introdução de notações na atividade matemática é orientar e ajudar a mente a raciocinar e aliviar a carga cognitiva. Acreditamos que este objetivo seja difícil de alcançar para alguns estudantes no caso da notação “o pequeno”. Esta notação requer manipulação sintática cuidadosa, exigindo muita vigilância. Certamente, um especialista não ficará constrangido ao se deparar com esse tipo de escrita devido ao seu domínio das diferentes dimensões sintáticas e semânticas escondidas nesta notação. Mas, como didáticos, constatamos que esta incompatibilidade e as consequências que ela gera em termos de ambiguidades e inconsistências internas relativas a esta notação só podem aumentar as dificuldades de alguns estudantes no manejo desta notação, especialmente quando a ligação entre esta notação e a definição de negligenciabilidade é rapidamente abandonada para deixar o lugar quase exclusivo para esta notação na atividade matemática.

Registramos aqui uma verdadeira quebra de contrato que expressa uma discrepância incontestável entre o significado comum do sinal de igualdade e o significado deste mesmo sinal nas notações de Landau. Esta situação é incomum em matemática. O símbolo elementar da igualdade, que tem um significado consolidado e familiar desde os primeiros anos de escolaridade e que manteve o seu significado ao longo da escolaridade, perde subitamente, durante as ocoasiões de Landau, todo o seu significado habitual.

Além da incompatibilidade do sinal de igualdade com a sua utilização na notação "pequeno o", surgiu outro problema inesperado, nomeadamente a interferência da concepção comum de negligenciabilidade com a noção matemática de negligenciabilidade.

A negligência entre o senso matemático e o do senso comum

A negligenciabilidade não é apenas um conceito matemático. É também um termo comumente usado na vida cotidiana. Está saturado de significado que pode ser problemático nas aulas de matemática.

Em Le Robert *online*, o termo "insignificante" é um adjetivo que se refere a "que pode ser negligenciado, que não vale a pena levar em conta. ". É sinônimo de "que se pode abandonar", "mínimo", "insignificante"… Larousse *online* sugere: "O que pode ser negligenciado, o que não deve ser levado em conta". Para ilustrar esta definição, Larousse propõe a seguinte expressão: "Tratar alguém ou algo como (a) quantidade insignificante, não levando em conta a sua existência, a sua opinião, considerando-os sem importância". Em árabe o termo insignificante pode ser traduzido pelas seguintes expressões: "bila kima" (بلا قيمة), "dha-il" (ضئيل), "mouhmalon" (مهمل), "mouhamachon" (مهمّش)… Dependendo do contexto, use uma ou outra das expressões. Mas, com referência ao dicionário árabe *online* "Al Maany", a ideia comum que emerge de todas estas expressões é, como em francês: "o que não é importante", "insignificante", "pequeno"…

Em matemática, a negligenciabilidade admite uma definição que especifica, de forma inequívoca, o seu significado e que envolve diversas noções matemáticas. Negligenciabilidade em seu uso comum não se refere a uma definição. O seu significado está profundamente ancorado nos usos quotidianos de acordo com as exigências da situação e do estado sócio-psicológico do indivíduo: o que é insignificante hoje pode não ser insignificante amanhã. O que é insignificante aqui pode não ser insignificante em outro lugar. A negligência em seu uso atual é uma avaliação subjetiva.

Em matemática, a negligência é uma noção relativa e não absoluta. Não estamos falando de uma função desprezível, mas sim de uma função desprezível comparada a outra. A negligenciabilidade em matemática é uma relação de comparação explícita entre duas funções. No seu uso comum, a negligência não requer comparação explícita. Não precisamos colocar as coisas em perspectiva. O contexto pode ser suficiente para compreender o significado buscado pelo uso da palavra insignificante, mesmo que esse significado possa suscitar questionamentos, desentendimentos. Camus (1947), por exemplo, em "A Peste" sublinha a manipulação exercida pela agência de inteligência Ransdoc que um dia anunciou a recolha de cerca de oito mil ratos e no dia seguinte "…anunciou que o fenómeno tinha parado repentinamente e que o serviço de controle de roedores coletou apenas uma quantidade insignificante de ratos mortos. A cidade respirava. » (pág.21).

Com este segundo anúncio, a agência Ransdoc, e por razões políticas, quer banalizar o fenómeno dizendo que é insignificante, e não merece continuar a polémica.

Estas diferenças levam-nos a procurar compreender os possíveis efeitos didáticos do significado da negligenciabilidade na vida quotidiana na conceitualização da noção de negligenciabilidade na matemática e em particular no desenvolvimento limitado, entre certos estudantes.

Quando escrevemos uma expansão limitada de uma função num ponto, fazemos uma aproximação polinomial desta função nas proximidades deste ponto. Ou seja, escrevemos esta função como a soma de uma função polinomial e uma função desprezível na frente desta função polinomial na vizinhança do ponto considerado. Por exemplo, a expansão limitada à ordem n na vizinhança de 0 de uma função f n-vezes diferenciável é dada por: $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$. $P_n(x)$ é a função polinomial e $o(x^n)$ é uma função insignificante comparada à $P_n(x)$ na vizinhança de 0. Dizer que $o(x^n)$ é insignificante comparado à $P_n(x)$faz sentido em matemática. “Ser insignificante diante” não significa de forma alguma “ser insignificante”. No entanto, na vida quotidiana “ser insignificante” muitas vezes significa “ser insignificante”. Essa concepção de negligência do senso comum poderia impactar a conceituação de negligenciabilidade na aula de matemática, especialmente quando a notação “o pequeno” permanece enigmática, contendo áreas cinzentas e, portanto, assimilada superficialmente.

A negligenciabilidade é, portanto, um conceito de dupla cor. É um conceito cotidiano e um conceito matemático. Sobre esse assunto, Brossard (2008) destaca a força e a fraqueza dos conceitos cotidianos e dos conceitos científicos estudados na escola:

> […] Os conceitos quotidianos são “fortes” na medida em que estão saturados de experiências concretas… mas têm um baixo grau de generalidade (esta é a sua fraqueza). Por outro lado, os conceitos científicos têm um elevado grau de generalidade e são implementados de forma consciente e voluntária (esta é a sua força), mas no momento da sua transmissão, devido à sua pura generalidade, ainda não permitem conceptualizar experiências concretas (aí reside sua fraqueza) (BROSSARD, 2008, p. 76).

Em relação ao nosso questionamento, descobrimos que esta passagem é mais significativa quando substituímos o termo “generalidade” pelo termo “precisão”. Esse conflito entre o conceito cotidiano e o conceito científico poderia levar alguns estudantes a considerar, inconscientemente, o conceito cotidiano quando a situação exige recorrer ao conceito científico (BOERO; DOUEK, 2008) e (VYGOTSKI, 1934-1997). Isto pode ser explicado pelo facto de o conceito quotidiano estar “saturado de experiências concretas” (esta é a sua força) e o conceito científico não ter realmente em conta as experiências concretas (esta é a sua fraqueza). Brossard (2008, p.76) enfatiza que para que o estudante adote o conceito científico é necessário levar em conta o conceito cotidiano a ele associado e tomá-lo como ponto de partida para uma melhor conceituação do conceito científico.

No nosso caso, a complexidade sintática, que pode confundir o acesso aos aspectos semânticos (DUVAL, 2006) na notação Landau, pode ser fonte de erros para os desinformados. Esta complexidade poderia levar este último a reter apenas a ideia de negligência do conceito matemático, ignorando todos os detalhes ocultos pela notação. Porém, apenas levar em conta na notação de Landau a ideia de negligenciável que interfere na ideia de negligenciável no seu uso cotidiano poderia confundir alguns estudantes. Aqui está um exemplo de um erro possível :

Determinar um desenvolvimento limitado nas vizinhanças de 0 de $h(x) = e^x \cos(x)$ sabendo que nas vizinhanças de 0, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ e $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$.

Um inadvertido pode proceder como segue:

$(1 + x + \frac{x^2}{2})\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 1 - \frac{x^2}{2} + x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} = 1 - x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4}$.

Logo na vizinhança de 0, $h(x) = e^x \cos(x) = 1 - x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$.

Ou isso é falso. De fato:

$$h(x) = e^x \cos(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) + x - \frac{x^3}{2} + x\, o(x^3) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} o(x^3) + o(x^2)$$

$$- \frac{x^2}{2} o(x^2) + o(x^2) o(x^3)$$

$$= 1 - x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4}$$

$$+ \left(o(x^3) + x\, o(x^3) + \frac{x^2}{2} o(x^3) + o(x^2) - \frac{x^2}{2} o(x^2) + o(x^2) o(x^3)\right)$$

$$= 1 - x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4}$$

$$+ \left(o(x^3) + o(x^4) + o(x^5) + o(x^2) + o(x^4) + o(x^5)\right)$$

$$= 1 - x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + o(x^2)\ car\ o(x^n) + o(x^m)$$

$$= o\left(x^{\min(n,m)}\right)\ au\ voisinage\ de\ 0.$$

Portanto,

$$h(x) = e^x \cos(x) = 1 - x + x^2\left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + o(1)\right) = 1 - x + x^2\left(o(1)\right)$$

$$= 1 - x + o(x^2)$$

Nós pensamos que o retorno à primeira escrita $x^n\, \varepsilon(x) = o(x^n)$ com $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$ pode ajudar a evitar certas dificuldades que poderiam gerar a notação “o pequeno” desconectada de sua definição primeira. De fato, uma vez chegado a esta expressão:

$$h(x) = e^x \cos(x)$$
$$= 1 - x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4}$$
$$+ \left(o(x^3) + x\, o(x^3) + \frac{x^2}{2} o(x^3) + o(x^2) - \frac{x^2}{2} o(x^2) + o(x^2) o(x^3) \right)$$

nós podemos escrever

$h(x) = e^x \cos(x) = 1 - x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \big(x^3\, \varepsilon_1(\mathrm{x}) + x^4\, \varepsilon_2(\mathrm{x}) + x^5 \varepsilon_3(\mathrm{x}) + x^2 \varepsilon_4(\mathrm{x}) - x^2 \varepsilon_5(\mathrm{x}) + x^5 \varepsilon_6(\mathrm{x}) \varepsilon_7(\mathrm{x})\big)$ avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon_{\mathrm{i}}(\mathrm{x}) \; = 0, \forall i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$donc\ h(x) = e^x \cos(x) = 1 - x + x^2 \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + x\, \varepsilon_1(\mathrm{x}) + x^2\, \varepsilon_2(\mathrm{x}) + x^3 \varepsilon_3(\mathrm{x}) + \varepsilon_4(\mathrm{x}) - \varepsilon_5(\mathrm{x}) + x^3 \varepsilon_6(\mathrm{x}) \varepsilon_7(\mathrm{x}) \right) = 1 - x + x^2 \varepsilon(\mathrm{x})$ puisque

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + x\, \varepsilon_1(\mathrm{x}) + x^2\, \varepsilon_2(\mathrm{x}) + x^3 \varepsilon_3(\mathrm{x}) + \varepsilon_4(\mathrm{x}) - \varepsilon_5(\mathrm{x}) + x^3 \varepsilon_6(\mathrm{x}) \varepsilon_7(\mathrm{x}) \right)$$
$$= \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

De onde $h(x) = e^x \cos(x) = \; 1 - x + o(x^2)$.

A seguir, analisaremos uma troca que ocorreu entre estudantes e seus professores em uma aula regular de matemática em torno de questões relacionadas à notação “pequeno o” de Landau.

Dificuldades relacionadas à notação Landau em uma aula

Ao discutir por acaso, em abril de 2021, com um colega matemático sobre as questões levantadas neste artigo, ele me contou que recentemente encontrou esse tipo de problema com seus estudantes em um de seus cursos. no primeiro ano universitário do curso de Engenharia Mecânica. O curso é ministrado em francês). Ele me informa que à ocasião de um cálculo simples relativo ao desenvolvimento limitado, uma troca entre os estudantes o interpelou. Ele acrescenta que infelizmente ele não se encontrava suficientemente sensível em relação às dificuldades que surgiram. Esta troca ocorreu em uma aula comum (LABORDE *et al.* (2002, p. 95) em um curso online que ocorreu no mês de março de 2021 durante o período de confinamento (neste período o corona vírus estava em plena proliferação na Tunísia e as aulas *online* são incentivadas).

O professor reproduz a gravação e me mostra a troca em questão.

A troca diz respeito a um simples exercício de aplicação de desenvolvimento limitado nas vizinhanças de 0 de ordem 3 da função $\frac{1}{1-x} - e^x$.

Poucos minutos depois de propor aos estudantes, um deles se manifesta e sugere sua correção. O professor anota o que diz em sua própria folha. Os escritos são então exibidos nas telas dos estudantes:

E1 (o estudante dita e o professor escreve): Nas vizinhanças de *0 tem-se* $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ *e* $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$. *portanto* $\frac{1}{1-x} - e^x = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$ - $(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3$

Após uma dezena de segundos de silencio, o professor intervém:

> *En (o professor) : Vocês concordam?*
> *E2 : Falta o o pequeno*
> *E1 Ele desaparece nós temos* $o(x^3)$*menos* $o(x^3)$

Alguns estudantes dizem que é preciso colocar o “ozinho” senão não é um desenvolvimento limitado.

> *E1 : É verdade... é estranho... mas eles desapareceram ...*
> *E2 : É preciso deixar um o pequeno…*
> *E3 : Como o último termo* é $o(x^3)$ *colocamos* $o(x^3)$

O professor (En) acrescenta à última expressão o $o(x^3)$: $\frac{x^2}{2} + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$ e pede explicações.

> *En : Por que é preciso colocar o* $o(x^3)$ *?*
> *E2 : O pequeno o não sai pois esse não é o mesmo. É uma quantidade negligenciável, mas ela não é a mesma…*
> *E1 : Eu não compreendi…*
> *E2 : O primeiro pequeno o é uma função negligenciável o segundo pequeno o é uma outra função negligenciável. Portanto a diferença não e nada é outra função negligenciável*
> *En : Pois é…está claro ?...passamos se está ao segundo exemplo...*

Mas outro estudante, dando a impressão de estar brincando, pergunta ao professor a seguinte questão:

E4: (sua entonação mostra que ele está sorrindo) Tem problema se não colocarmos o zero?

En: O zero?... Não é zero. Tenha cuidado…É um pouco…

E4: Sim sim um pouquinho...é insignificante...no final não é nada...então não muda nada...

En: Mas claro que tem que colocar o o pequeno senão não haverá igualdade...é desprezível sim mas não é nada...o o pequeno representa a diferença entre a função e o polinômio é pequeno mas não é nada … está claro?

E2: Sim, sim, está tudo bem...

En: Cuidado eh… passamos então para o segundo exemplo

Antes de analisar esta troca, gostaríamos de salientar que após discussões informais com o professor, ele nos informou que as propriedades relativas ao tratamento da notação “o pequeno” não foram explicitamente ensinadas neste curso. Ele acabou de introduzir esta notação durante a primeira definição de negligência. Disse-nos que a sua escolha se justifica pelo fato de esta notação ser apenas uma ferramenta e não representar, por si só, um objetivo de ensino, isto por um lado e por outro em parte devido ao fato de por falta de tempo alocado ao capítulo “desenvolvimentos limitados”, ele não pode se deter muito nesta notação. Isso mostra que a dialética, ostensiva/não ostensiva, no caso da notação “ozinho”, não foi realmente trabalhada por esse professor. Neste posicionamento encontramos a importante observação de Bosch e Chevallard (1999):

> O erro que consiste em supor que a percepção dos ostensivos seria natural – ou seja, não construída – explica em grande parte o que a teoria das situações tem destacado sob o nome de estratégias didáticas de ostensão. Por este termo designamos a prática em que o professor se limita a mostrar aos alunos um objeto ostensivo na crença de que se criará espontaneamente uma relação adequada com esse ostensivo e, sobretudo, com os não ostensivos aos quais se supõe. consulte (pág. 92).

Analisemos agora as intervenções acima transcritas entre os alunos e o professor. Esta breve troca mostra a dificuldade que alguns estudantes têm em conceituar o significado e o papel da expressão $o(x^3)$ no desenvolvimento limitado.

O estudante E1 parece considerar $o(x^3)$ como uma função particular de modo que, para ele, $o(x^3)$- $o(x^3)$ dá 0, por exemplo dizendo que f(x) -f(x) =0 sendo f qualquer função real. Apesar da expressão de sua perplexidade, ele admite não compreender seu erro mesmo após a observação feita pelo estudante E2 quando afirma que “O pequenino não sai porque não é o mesmo. É uma quantidade insignificante, mas não é a mesma coisa…”.

O erro cometido pelo aluno E1 revela sua dificuldade em compreender o significado matemático da notação $o(x^3)$. Ele parece não perceber que $o(x^3)$- $o(x^3)$representa a diferença de quaisquer duas funções, cada uma sendo insignificante comparada a x^3 e que, consequentemente, essa diferença não é zero, mas sim igual a $o(x^3)$).

O estudante E3 parece ter uma concepção do “ozinho” que consiste em considerar $o(x^n)$como uma expressão que é essencial e que deve aparecer na expressão de um desenvolvimento limitado, não por razões matemáticas claras, mas por razões formais: o termo que segue a função polinomial do monômio de maior grau é x^n. O uso da palavra "desde" na sua intervenção parece-nos ser indicativo desta concepção. Além disso, ele não defendeu o seu ponto de vista posteriormente, o que poderia testemunhar a sua incapacidade de explicar matematicamente a sua concepção do significado e do papel da expressão $o(x^n)$ num desenvolvimento limitado.

O estudante E4 levanta com sua intervenção, ao final do trecho estudado, o problema do senso comum da negligenciabilidade (Ressalte-se que esta intervenção inesperada esteve na origem do desenvolvimento do parágrafo acima intitulado "Negligenciabilidade entre conotação matemática e o do bom senso). Pensamos que o uso da palavra "zero" para expressar o "o pequeno" é um deslize que revela a representação desse ostensivo que se aparece no final do desenvolvimento limitado. Parece-nos que, para ele, esse ostensivo não desempenha um papel matemático importante ou mesmo sem interesse por um desenvolvimento limitado. Para ele, o "o" é, em última análise, "nada", como ela diz em seu discurso. Porém, no senso comum "zero" é sinônimo de "nada". Para se convencer, basta lembrar a conhecida expressão "começar do zero", que significa começar algo do "nada" com suas próprias habilidades. A ideia de "nada" não está longe da ideia de negligência. Como explicamos acima, no uso comum, o que é insignificante é muitas vezes sinônimo de "nada" ou "quase nada". Além disso, o estudante E4 diz isso explicitamente na sua intervenção: "Sim, sim, o pouco... é insignificante... no final não é nada...".

Esta concepção de negligência parece estar na origem do seu questionamento: "Será falso se não colocarmos o zero? ". Em resposta às suas dificuldades, o professor esclarece que, por um lado, o "o" não é um "zero" e que, por outro lado, este ostensivo na expressão do desenvolvimento limitado desempenha um papel e que a sua ausência leva à ilegitimidade do uso do símbolo da igualdade. Ele enfatiza que este "o" representa "…a lacuna entre a função e o polinômio…" e acrescenta que certamente "…é

Ele é pequeno, mas não é nada." As suas explicações podem sensibilizar e convencer certos estudantes do papel e significado do "o pequeno", mas parece-nos que a utilização de uma representação gráfica em que o professor especifique o significado do "o pequeno" é essencial e pode ajudar os não advertidos a dar mais sentido a esse ostensivo. Em artigo submetido para publicação, mostramos por meio de um exemplo numérico que o resto do desenvolvimento limitado nem sempre é desprezível e que o problema ligado ao ostensivo “o” é muito mais complexo do que parece.

Através dessa troca, percebemos que o professor, antes da intervenção do estudante E4, não problematizava realmente as dificuldades dos estudantes E1 e E3. Foi suficiente e se apoiou na intervenção do estudante E2, que parece conceituar a notação $o(x^n)$, para avançar seu curso como se esta intervenção fosse suficiente e suficientemente transparente para que os demais superassem suas dificuldades. Essa prática é clássica quando o professor está sob influência do tempo didático e que:

> Ter em conta as respostas inesperadas dos alunos envolve um custo que ele julga na ação ser, sem dúvida, demasiado elevado face ao avanço e progresso a garantir. Esse custo seria o de atrasar a produção do tempo didático. (COTRET; GIROUX, 2003, p. 166).

Também é possível que o professor, em relação aos objetivos do seu curso, não tenha visto as dificuldades dos alunos em relação a essa notação como algo que deveria ser focado. Mas a pergunta do aluno E4 surpreendeu-o e viu-se obrigado a esclarecer algumas coisas embora, em nossa opinião, as suas observações, como explicamos acima, continuem a ser insuficientes para uma boa conceitualização da notação “pequeno o”.

As diversas dificuldades que surgiram por esta breve troca entre os estudantes e o professor mostram a importância e a legitimidade do nosso problema. Eles revelam especificamente a complexidade sintática e semântica do aparentemente simples “o” ostensivo de Landau. Embora muitos estudantes consigam superar esta complexidade, outros, que não estão suficientemente informados, podem conceber mal esta notação.

Conclusão

Neste artigo estudamos a opacidade relativa ao “o” ostensivo de Landau. Mostramos que a simplicidade da estrutura sintática dessa notação é apenas aparente e que na realidade esconde uma complexidade semântica que pode não ser detectado por alguns aestudantes. Este trabalho de investigação permitiu destacar que a utilização do símbolo da igualdade nesta notação embora represente um bem útil, é uma fonte de dificuldades, para uma pessoa desinformada, devido ao fato de o símbolo da igualdade que aparece nesta a notação “viola” a semântica clássica da noção matemática de igualdade. Isto nos leva a considerar esta classificação entre as ruins com referência ao modelo de Biletch et al. (2015) uma vez que transgride o terceiro critério de boa notação matemática, nomeadamente “Compatibilidade com Convenções Existentes”.

A negligenciabilidade, que está intimamente ligada à notação "pequeno o" de Landau, é ao mesmo tempo um conceito matemático e um conceito cotidiano. Este último, que remete à concepção comum à ideia de “nada” ou “quase nada”, pode impactar a conceituação de negligenciabilidade na aula de matemática para determinados alunos, principalmente quando a notação de Landau é assimilada superficialmente. As análises que realizamos a partir de uma troca, em uma aula normal de matemática, entre alunos e seu professor mostram a interferência do conceito cotidiano de negligenciável na atividade matemática. As análises também mostraram que alguns alunos não construíram o significado matemático desta notação e que suas dificuldades estão ligadas ao uso do símbolo de igualdade na notação de Landau.

Este trabalho de investigação necessita de ser enriquecido em vários pontos, em particular a observação de muitos estudantes manipulando a notação “pequeno o” de Landau em situações matemáticas mais complexas. Um estudo didático com professores de matemática e física em aulas normais só poderá lançar mais luz sobre as reais dificuldades relativas ao ensino e aprendizagem desta notação. Um estudo comparável a este sobre a notação “Grande O” também é desejável.

Recebido em: 16/12/2022

Aprovado em: 24/08/2023

Referências

BILETCH, B.; KAY, K; AND YU, H. **An Analysis of Mathematical Notations**: For Better or For Worse. Document source. Worcester Polytechnic Institute, 2015.

BLOCH, I. Concepts, objets, symboles, enseignement des mathématiques… Quelques réflexions sur l'épistémologie et la didactique. **Petit x**, n. 97, p. 71-79, 2015.

BOERO, P. ; DOUEK, N. La didactique des domaines d'expérience. **Carrefours de l'Éducation**, n. 26, v. 2, p. 99-114, 2008.

BOSCH, M. ; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l’activité mathématique aux ostensifs. Objet d’étude et problématique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, n. 19, v. 1, p.77-124, 1999.

BROSSARD, M. Concepts quotidiens/ concepts scientifiques : Réflexions sur une hypothèse de travail. **Carrefours de l’Éducation**, v.26, n. 2, p.67- 82, 2008.

CAMUS, A. **La Peste**. Paris: Gallimard, 1947.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 12, n.1, p. 73-111, 1992.

CHEVALLARD, Y. Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In: S. MAURY, S.; CAILLOT, M. (Eds.), **Rapport au savoir et didactiques**. Paris : Fabert, 2003, p. 81-104.

DURAND-GUERRIER, V. Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. **Educational Studies in Mathematics**, n. 53, v. 1, p. 5-34, 2003.

DURAND-GUERRIER, V. Négation et quantification dans la classe de mathématiques. In: DAVAL, R. ; FRATH, P.; HILGERT, E.; PALMA, S. (Eds.). **Négation et référence.** Reims : ÉPURE - Éditions et Presses universitaires de Reims, 2016, p. 269-288.

DUVAL, R. Quelle sémiotique de l'activité et des productions mathématiques ? **Relime**, Numero Especial, p. 45-81, 2006.

LABORDE, C. ; COQUIDÉ, M. ; TIBERGHIEN, A. Les situations de formation en vue de l'apprentissage du savoir scientifique et mathématique. In: TIBERGHIEN, A. (Ed.), **Des connaissances naïves au savoir scientifique**. Programme « École et sciences cognitives », 2002, p. 81-108.

LANDAU, E. **Handbuch der Lehrer von der Verteilung der Primzahlen**, American Mathematical Society, 2000.

NÉGLIGEABLE. **Dictionnaire Larousse**, 2022. Extrait : le 10 janvier 2022 de https://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/n%C3%A9gligeable/54069.