emd Ensino da Matemática em Debate

Os conceitos wittgensteinianos entrelaçados no processo educativo da matemática nos anos iniciais

The wittgensteinian concepts interlated in the educational process of mathematics in the early years

Marcel de Almeida Barbosa[1]
Marisa Rosâni Abreu da Silveira (*in memoriam*)[2]

RESUMO

O artigo apresenta a Linguagem Matemática como umas das linhas de estudos e pesquisas na Educação Matemática, na perspectiva da Filosofia da Linguagem de Wittgenstein, e tem como objetivo mostrar como os conceitos wittgensteinianos podem contribuir no processo educativo da matemática, sobretudo nos anos iniciais do ensino fundamental. A linguagem matemática é governada por regras, logo o professor deve ensiná-las e dar sentido às regras. Realizamos uma pesquisa qualitativa, de caráter bibliográfico e de campo, tendo como sujeitos professores que ensinam matemática na educação básica. Embora, os professores tenham formação acadêmica adequada, eles apresentaram dúvidas, erros conceituais no ensino de operações com frações, assim, de acordo com o filósofo: "o professor não pode ensinar por meio da dúvida, e sim, partir de certezas".

Palavras-chave: *Conceitos Wittgensteinianos; Linguagem Matemática; Ensino de Matemática; Anos Iniciais do Ensino Fundamental.*

ABSTRACT
The article presentes Mathematical Language as one of the lines od study and research in Matehmatics Education, from the perspective of Wittgenstein's Philosophy of Language, and aims to show how Wittgenstein concepts can contribute to the educational process of mathematics, especially in the initial years of teaching fundamental. The mathematical languagem is governed by rules, so the teacher must teach them and give meaning to the rules. We carried out qualitative, bibliographical and field research, using as subjects teachers who teach Mathematics in basic education. Although the teachers have operatins with fractions, thus, according to the philosopher: "the teacher can't teach through doubt, but Rather, based on certainties".

Keywords*: Wittgensteinian Concepts. Mathematical Language. Mathematics Teaching. Early Years of Elementary School.*

Considerações Iniciais

[1] Doutorando pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM/UFPA). Professor de Matemática da Prefeitura Municipal de Afuá (Pará). E-mail: mab_marcel@hotmail.com. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9020-9227

[2] Doutora em Educação (UFRGS). Professora do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM/UFPA). ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3147-9478

A Matemática foi e é fundamental para o desenvolvimento da sociedade. É necessário que todos possam aprendê-la e compreendê-la, porém, para alguns, estar imerso no mundo da Matemática – onde há uma carga significativa de símbolos, regras, abstrações, torna-se algo inacessível, transformando-a em uma ciência elitista, de destaque, na qual apenas mentes consideradas brilhantes têm habilidades de demonstrar teoremas matemáticos, resolver cálculos dos aritméticos aos diferenciais e integrais.

A Educação Matemática debruça-se no intuito de melhorar o ensino e a aprendizagem desta disciplina, seja na educação básica, seja na educação superior estudando metodologias para atenuar as dificuldades de aprendizagem quando os alunos são apresentados à simbologia própria em contextos matemáticos – aritmético, algébrico, geométrico, por exemplo, como afirma Silveira (2008, p.5) "ensinar o aluno a ler um texto escrito nessa linguagem é como ensinar uma língua estrangeira".

De acordo com Wittgenstein (1996), o professor não pode ensinar por meio de dúvida, e sim partir de certezas, isto é, o professor não pode ensinar matemática com dúvidas sobre os conteúdos. Para Jesus (2017) ensinar matemática é um empreendimento complexo. É preciso conhecer os alunos, saber matemática e saber ensiná-la. Silveira (2017) esclarece que quando ensinamos a criança a contar, não podemos querer que por si só que ela descubra que depois do dezenove, vem vinte. O aluno aprenderá a contar após um certo hábito com a contagem, assim poderá aprender as operações com números, mas para que isso aconteça deve ser iniciado na aprendizagem da gramática que rege os textos matemáticos.

Diante o exposto, o presente artigo, fruto de uma pesquisa de mestrado, tem como objetivo mostrar como os conceitos wittgensteinianos podem contribuir no processo educativo da matemática, sobretudo nos anos iniciais do ensino fundamental. As reflexões de Wittgenstein, filósofo da linguagem e da matemática, destacam que o significado da palavra está no uso, na multiplicidade de funções que envolve o discurso, a palavra tem significado a partir dos jogos de linguagem, os quais se entrelaçam a partir da forma de vida. Wittgenstein ressalta que o ensino da linguagem não é uma explicação, mas, um treinamento, uma repetição.

A pesquisa teve abordagem qualitativa, e objetivo foi alcançado por meio da coleta de dados (pesquisas bibliográfica e de campo). Os sujeitos foram dois professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental na rede pública de ensino. Segundo Gerhardt e Silveira (2009) esclarecem que esta abordagem não se preocupa com a representatividade numérica, mas com o aprofundamento da compreensão de um grupo social, de uma organização, e o conhecimento do pesquisador é parcial e limitado.

Para tanto, o artigo está dividido em duas partes: na primeira apresentamos a Filosofia de Wittgenstein em sua segunda fase – *Investigações Filosóficas*; na segunda, discutimos como os conceitos do filósofo podem colaborar no ensino e na aprendizagem da matemática nos anos iniciais do ensino fundamental com foco nas operações com frações.

Filosofia da Linguagem de Wittgenstein

Teceremos considerações acerca da Filosofia da Linguagem de Wittgenstein, com base na obra *Investigações Filosóficas*, explicitando os conceitos de jogos de linguagem, semelhanças de família, ver-como, gesto ostensivo e seguir regras. O filósofo ressalta que o ensino da linguagem ocorre por meios dos jogos de linguagem, os quais seguem regras, assim como a linguagem matemática. Assim os conceitos wittgensteinianos quando entrelaçados com a educação matemática, podem mostrar caminhos propositivos ao processo educativo da matemática.

Ludwig Josef Johann Wittgenstein, filósofo da linguagem e da matemática, foi responsável pela virada linguística da filosofia e permitiu que a linguagem tivesse papel importante nas discussões filosóficas. Os comentadores de sua obra a dividem em duas fases de pensamento (HINTIKKA; HINTIKKA, 1994).

A primeira fase quando escreve o *Tractatus Logico-Philosophicus*, em que adotou uma concepção referencial da linguagem e tinha como função descrever, nomear objetos. Para Glock (1996), o significado de uma proposição *p* não é seu valor de verdade, mas o fato que a ele corresponde na realidade. Assim, temos que o sentindo de uma proposição elementar é determinado pelos significados de seus constituintes simples: os nomes, ou seja, o significado de um nome é o objeto que ele representa.

A segunda fase com a obra *Investigações Filosóficas*, o filósofo não considera suas reflexões de outrora como erradas, porém enfatiza que não são suficientes para explicar os problemas da linguagem. Nesta fase, o significado da palavra está no uso, na multiplicidade de funções que a palavra pode carregar na linguagem. Wittgenstein dá um conselho metodológico (Glock, 1996, p.30) “Não pergunte pelo significado, pergunte pelo uso!”

Para ilustrar, temos o exemplo das alavancas de uma locomotiva, elas têm aparências semelhantes, porém funções diferentes (uma pode abrir a bomba, a outra pode frear, uma terceira pode regular a abertura de uma válvula), o que vai determinar sua função é o movimento que o maquinista realizará.

A significação de uma palavra acontece no uso da linguagem (IF, §43). O sentido se dá no contexto de aplicação, ou seja, do jogo de linguagem a qual está inserida, como no exemplo: para o conceito de fração é concebível até sete significados, no entanto, destacamos apenas dois: o significado de quociente (uma maçã para dividir entre duas crianças) e significado de multiplicador

(1000mL de açaí e João consumiu ¼), usos diferentes, significados diferentes, porém têm o sentido: escrever a situação em números fracionários.

Nas *Investigações Filosóficas*, as definições de sentido e significado possuem uma certa distinção. Luna (2009) explica que o significado de um termo ou de uma frase é o seu uso, o seu emprego, a sua aplicação como habitualmente ou costumeiramente fazem aqueles que constituem o grupo social praticamente daquele termo ou daquela frase ou daquele jogo de linguagem. Já o sentido, refere-se ao que uma palavra, uma frase ou um jogo de linguagem quer comunicar, o que querem dizer, isto é, que finalidade querem alcançar. Em suma, o sentido é mais fluído, mutável, dinâmico, variado etc., e o significado é mais estático, regular, propenso a uma constância maior.

Para Wittgenstein "todo signo sozinho parece morto; o que lhe dá vida? No uso, ele vive" (IF, §342). Os sentidos atribuídos a uma expressão linguística ou palavra, bem como sua lógica de funcionamento ou técnicas de uso dependem do contexto no qual estão envolvidos, isto é, dos hábitos e costumes que temos ou empregamos, não em relação figurativa em meios às proposições e fatos (SILVEIRA; MEIRA; SILVA, 2014). O filósofo ressalta ainda que o ensino da linguagem não é uma explicação, mas sim um treinamento, uma repetição.

Desse modo, Wittgenstein diz que, ao explicar o significado de algumas palavras para alguém falante da língua francesa, é mais fácil explicá-las pelos correspondentes em francês, assim, "para quem, entretanto, ainda não possui esses *conceitos*, ensinarei a usar as palavras por *exemplos* e *exercícios*. – E, nesse caso, compartilho com ele não menos do que eu mesmo sei" (IF, §208). Gonçalves (2013) relata que, para Wittgenstein, na aquisição de uma língua, não há outra maneira de aprendê-la senão sendo justamente adestrado ou treinado, sem questionamentos e sem pedir justificativas, a observar e a seguir determinadas regras.

> Uma parte importante desse treinamento consistirá no fato de que quem ensinar mostra os objetos, chama atenção para eles, pronunciando então uma palavra, por exemplo, a palavra "lajota", exibindo essa forma. Não quero chamar isto de "elucidação ostensiva" ou "definição ostensiva", pois na verdade a criança ainda não pode perguntar sobre a denominação. Quero chamar de "ensino ostensivo das palavras" (IF, §6)

Para Oliveira e Silveira (2017, p.99), "o gesto de apontar para um objeto enquanto se pronuncia uma palavra (ostensão), nesta concepção, é o recurso pelo qual se processa o aprendizado da linguagem". O gesto ostensivo é imbricado por dois conceitos importantes: ensino ostensivo e definição ostensiva.

Wittgenstein ressalta que, *a priori*, a definição ostensiva encontra-se fora do jogo primitivo, uma vez que a criança não pergunta pelo significado das palavras, o qual será introduzido posteriormente, pois a palavra é ensinada sempre fazendo uma correspondência entre o nome e o objeto, e, normalmente, o adulto (ou professor) utiliza-se do gesto ostensivo para chamar atenção da criança enquanto fala a palavra “lajota”, por exemplo. Logo, o ensino ostensivo da linguagem é um treinamento, uma repetição.

Wittgenstein nos dá um exemplo pertinente a respeito da importância do treino, com o qual uma pessoa recebe gêneros literários e lê sílaba por sílaba, palavra por palavra, frase por frase e, a partir de então, começa a ler livros, cartas, jornais e consequentemente aprende a ler em sua língua materna. Considerando, assim, como uma máquina de leitura, lendo em voz alta e corretamente, às vezes, sem prestar atenção no que lê. Aqui não prestar atenção é no sentido de que a compreensão da leitura não é um processo mecânico.

Assim, as pessoas tornam-se como máquinas de leituras, ou seja, são treinadas para essa finalidade. O treinador diz que alguns já podem ler, e que outros ainda não. Tomemos o caso de um aluno que não passou pelo treinamento: se lhe mostramos uma palavra escrita, ele poderá às vezes proferir sons quaisquer, e aqui e ali acontecerá então, “por acaso”, de serem mais ou menos os certos. Mas, no caso da máquina viva de leitura, “ler” significa de tal ou tal modo a signos escritos (IF, §157).

Por outro lado, “a definição ostensiva concerne à elucidação do uso – a significação – da palavra, quando já é claro qual papel a palavra deve desempenhar na linguagem” (IF, §30). A criança pode ser capaz de perguntar pelo significado, por exemplo, o porquê de chamarmos a cadeira de cadeira. Outro exemplo pertinente acerca da definição é:

> Quando o professor aponta para o símbolo do ângulo reto no interior de um triângulo retângulo desenhado no quadro e diz: “isto é um ângulo reto”, é preciso que o aluno conheça a condição lógica da entidade definida para saber identificar o aspecto apontado pelo professor no desenho, já que o símbolo apontado apenas explica o que é o ângulo reto, não é um objeto que é o significado de ângulo reto (OLIVEIRA e SILVEIRA, 2017, p. 101)

A exemplo disso, podemos citar a expressão linguística usual do paraense quando alguém não quer sair sem guarda-chuva ou outro protetor para não se molhar enquanto chuvisca: Tu não és nem tapioca! Em nosso jogo de linguagem, a pessoa pode se molhar com a água da chuva, no entanto, não se dissolverá, assim como acontece com a tapioca, em contato com água (tapioca é o amido da mandioca e poder ser consumido igual a uma panqueca). A pessoa que não faz parte do jogo de linguagem (paraense) no qual está inserida, passa a compreender a expressão na medida que usamos com certa frequência.

O filósofo apresenta a ideia dos jogos de linguagem. É na prática que a criança aprende a usar as palavras e expressões da sua língua materna, é a partir desses jogos que a criança aprende o primeiro significado das palavras, ou seja, a linguagem primitiva estabelecida entre a criança e um adulto também é considerada jogos de linguagem, pois ela está inserida em um determinado contexto.

Para esse uso da linguagem, Wittgenstein (1996, p.166) afirma que “não se exige isso de um aluno: conceber a palavra, fora de um contexto, desse ou daquele modo, ou relatar de que maneira a concebeu", ou seja, na linguagem primitiva, não é necessário justificar seu ensino à criança, pois se consegue estabelecer uma comunicação.

Então, ele sugere que pensemos "nos vários usos de palavras que se faz nas brincadeiras de roda, chamarei a totalidade: da linguagem e das atividades com ela entrelaçadas, de "jogo de linguagem"" (IF, §7). Assim, exemplifica essa linguagem primitiva num jogo de linguagem entre o construtor A e um ajudante B:

> A executa a construção de um edifício com pedras apropriadas; estão à mão cubos, colunas, lajotas e vigas. B passa-lhe as pedras, e na sequência em que A precisa delas. Para esta finalidade, servem-se de uma linguagem constituída das palavras "cubos", "colunas", "lajotas", "vigas". A gritar essas palavras; B traz as pedras que aprendeu a trazer ao ouvir esse chamado (IF, §2).

Assim, a palavra tem significado por meio de jogos de linguagem nos quais ela esteja sendo usada, denominados por ele como o conjunto da linguagem e das atividades com as quais estão interligados e se entrelaçam a partir da forma de vida. A seguir temos alguns exemplos de tais jogos:

> Comandar, e agir segundo comandos;
> Descrever um objeto conforme a aparência ou conforme medidas;
> Produzir um objeto segundo uma descrição (desenho);
> Relatar um acontecimento;
> Conjecturar sobre o acontecimento;
> Expor uma hipótese e prová-la;
> Apresentar os resultados de um experimento por meio de tabelas e diagramas;
> Inventar uma história, ler;
> Representar teatro;
> Cantar uma cantiga de roda;
> Resolver enigmas;
> Fazer uma anedota, contar;
> Resolver um exemplo de cálculo aplicado;
> Traduzir de uma língua para outra;
> Pedir, agradecer, maldizer, saudar, orar (IF, §23)

Glock (1998) esclarece que Wittgenstein fazia uso do termo *forma de vida* para o entrelaçamento entre cultura, visão de mundo e linguagem, assim como salientava que o termo se refere a uma formação cultural ou social, à totalidade das atividades comunitárias em que estão imersos os nossos jogos de linguagem, isto é, as palavras e/ou expressões precisam fazer sentido para todos os sujeitos envolvidos nos jogos de linguagem.

Costa (2005) exemplifica a *forma de vida* utilizando o excerto de Blue Book escrito por Wittgenstein, a qual dentro dos jogos de linguagem tem como função importante dar significado às palavras e expressões.

> Se uma palavra da língua de nossa tribo é corretamente traduzida em uma palavra da língua portuguesa, isso depende do papel que a palavra desempenha na totalidade da vida da tribo, das ocasiões nas quais usada, as expressões de emoção que geralmente a acompanham, a idade que ela costuma despertar ou que incita o dizer etc., etc. (WITTGENSTEIN, 1975, p.55).

Wittgenstein ressalta que a palavra ganha significado no jogo de linguagem a que está entrelaçada, ou seja, é a partir do seu uso nos diferentes contextos de aplicação, nas diversas formas de vida. No exemplo abaixo, podemos observar alguns significados da palavra *luz* em jogos de linguagem distintos: i) Maria deu à *luz;* ii) A *luz* do poste está acesa; iii) O professor deu uma *luz* para resolver o cálculo matemático.

Notamos que a palavra *luz* foi usada de forma diferente, em contextos de aplicação distintos. Logo, podemos observar que não há um único significado da palavra que possibilite colocá-la em todo e qualquer jogo de linguagem, mas sim, é importante observar que a palavra não muda de conceito a cada novo contexto de aplicação, ela é vista de aspectos diferentes, pois não há um conceito único que a classifique, não há uma essência, pois pode haver outros novos usos para a palavra *luz*, o que Wittgenstein denomina como *semelhanças de família*. O conceito elucida que não há uma definição precisa entre os usos da mesma palavra, ora as semelhanças aparecem, ora desaparecem.

O filósofo exemplifica *semelhanças de família* com o termo “jogos”:

> Considere, por exemplo, os processos que chamamos de “jogos”. Quero dizer, jogos de tabuleiro, de carta, com bola, de combate, e assim por diante. O que todos eles têm em comum? – Não diga: “Tem que haver para eles algo em comum, senão eles não se chamariam “jogos” – mas veja se todas as coisas são comuns para eles. – Pois se você os examina, não vai ver, na realidade, algo que todo têm em comum, mas semelhanças, parentescos, e, na realidade toda uma série dessas coisas [...] passe agora para os jogos de carta: aqui você encontra muitas correspondências com aquela primeira classe, mas muitos traços comuns desaparecem e outros surgem (IF, §66).

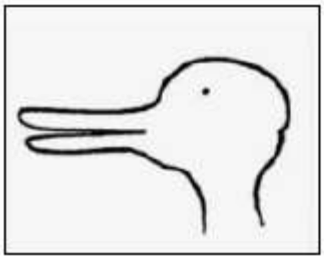
Dessa maneira, Silva (2011) expõe que Wittgenstein usa a expressão *semelhanças de família* para designar a semelhança entre os usos de palavras ou conceitos, não por sua posse comum de um conjunto de característica essenciais ou definidoras, mas por uma relação geral de similaridade entre os diferentes usos. O filósofo conclui:

> Eu não poderia caracterizar melhor essas semelhanças do que pela expressão semelhanças de família, pois assim se sobrepõem e se cruzam as distintas semelhanças que têm lugar entre os membros de uma família: altura, traços faciais, cor dos olhos, andar, temperamento etc. (IF, §67).

Dentre os conceitos de jogos de linguagem, formas de vida, semelhanças de família já apresentados da segunda fase da filosofia da linguagem de Wittgenstein, veremos outros conceitos abordados pelo filósofo como o *ver-como* e *cegueira para o aspecto* que são de suma importância.

Wittgenstein apresenta como aporte inicial para trabalhar o conceito de *ver-como* usando a figura do pato-lebre de Joseph Jastrow. O filósofo ressalta que o sujeito poderá dizer, observando a figura, que vê ora um pato, ora uma lebre, se ele já tiver compreendido os conceitos de pato e lebre, se ele tiver a vivência da significação desses conceitos, ou seja, se ele domina uma técnica.

Figura 1 - Pato-Lebre de Jastrow



FONTE: WITTGENSTEIN, 1996, p.XX

Para o filósofo, dominar uma técnica é uma habilidade. Assim, o aprendiz deve ser treinado para identificar, por exemplo, quando uma palavra ora tem função de verbo, ora função de substantivo numa oração: João *mente* para sua mãe; A *mente* humana é surpreendente.

A esse respeito, Gottschalk explica que

> Ver imediatamente na figura um coelho implica em já dominarmos uma série de técnicas de apresentação do simples. Já nos apresentaram coelhos, sabemos que se trata de um animal, que come cenouras, tem orelhas grande, comparamos vários coelhos, entre si etc. São esses diversos empregos da palavra “coelho” que nos permitem atribuir significado aos traços empíricos diante de nossos olhos e atribuir significado à figura. *Ver* a mesma figura *como* pato, também pressupõe que se tenha de antemão o conceito de pato, e que se possa lançar mão de determinadas técnicas de comparação, para que se atribua aos mesmos traços empíricos o significado de pato (GOTTSCHALK, 2006, pp.75-76)

Coadunando com a fala da autora, Wittgenstein (IF, parte II, IX) ressalta que “observar não produz o observado (esta é uma constatação conceitual)”. Quando o sujeito não consegue visualizar que a figura ora é pato, ora é coelho, o filósofo discute acerca da expressão *revelação do aspecto*, “observando um rosto e noto de repente sua semelhança com um outro. Eu vejo que não mudou; e, no entanto, o vejo diferente. Chamo esta experiência de “notar um aspecto”” (IF, parte II, XI).

Desta forma, se o sujeito não conseguiu identificar determinadas características da figura, logo não conseguiu revelar o aspecto concernente a ela, o que corrobora para uma dificuldade de compreender o objeto como um todo. Como bem ressalta Hebeche (2002), a cegueira para o aspecto faria com que se visse a figura pato-lebre, por exemplo, sempre de modo unilateral e, então, poderia dizer *agora vejo a lebre* ou *agora vejo o pato*.

Isso pode ocorrer quando o sujeito não tem a vivência da significação, ele é convidado a apreciar uma exposição de arte e, não consegue perceber as características, os traçados da escola barroca, renascentista, contemporânea etc. No entanto, o artista/especialista poderá dizer que um determinado traçado pertence à determinada escola ou a outra, pois ele domina a técnica, tem a vivência na área correlata.

Em suma, o filósofo Wittgenstein (IF, parte II, XI) ressalta que “a cegueira para o aspecto será aparentada com a ausência do “ouvido musical””. Hebeche (2002, p.109) sintetiza a fala do filósofo, “o cego não é aquele que nada vê, mas aquele que deixa escapar o modo “imponderável” de certos âmbitos da linguagem, isto é, passar em branco aquilo que parece escapar às regras”. Logo, o sujeito não tem o domínio de *ouvir-como*, de identificar pelas notas musicais um clássico de Beethoven, Mozart.

Conceitos Wittgensteinianos no Processo Educativo Da Matemática

É importante que professor que atua nos anos iniciais do ensino fundamental consiga dialogar com a linguagem matemática permeada de regras para oportunizar o aluno a expressar o que entendeu acerca do conteúdo ensinado. Como bem sintetiza Silveira (2015, p.158) "o professor precisa conhecer como o aluno lida com as regras matemáticas quando cria a sua demonstração e para que, por meio do diálogo, professor e aluno participem do mesmo universo discursivo".

Desta forma, durante o processo educativo da matemática em sala de aula há momentos em que o professor ensina um determinado conteúdo utilizando de regras matemáticas sem o devido sentido[3] ao aluno, ou seja, sem mostrar o passo a passo da resolução, bem como cometer alguns erros conceituais que podem corroborar na comunicação da matemática entre professor e aluno. Isso pode ocorrer, ou porque o professor traz consigo esta aprendizagem de quando era aluno na educação básica ou do seu processo de professor em formação inicial.

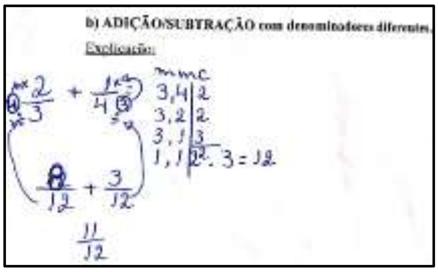
Para tanto, ressalta-se que a pesquisa fora realizada em uma escola pública do município de Belém (Pará), tendo sujeitos professores que atuam em turmas dos anos iniciais do ensino fundamental. Assim, o professor A (atua em turma do 4º ano) e o professor B (atua em turma do 5º ano), estes professores possuem formação inicial no curso de Licenciatura em Pedagogia

Assim, a seguir alguns excertos da pesquisa de mestrado que mostram como os conceitos wittgensteinianos podem contribuir no processo educativo da matemática nos anos iniciais do ensino fundamental no que tange o conteúdo de operações com frações. Para tanto, apresentamos dois tópicos dos quatro analisados: operações de adição/subtração com frações de denominadores diferentes e operação de multiplicação.

Primeiro, façamos consideraçõs a respeito da adição/subtração com denominadores diferentes: O professor A usou o recurso de calcular, primeiramente o MMC (mínimo múltiplo comum), visando determinar o denominador comum para, em seguida, calcular fazendo uso da regra: de dividir pelo denominador e multiplicar pelo numerador da fração no intuito de encontrar a fração equivalente com o mesmo denominador. O professor resolveu as questões propostas usando a técnica de calcular primeiramente o MMC para, então, dar prosseguimento ao cálculo de frações.

[3]Destacamos que sentido não corresponde em justificar a regra matemática na empiria. No ensino de regras matemática há dois tipos de proposições: a proposição matemática/gramatical (normativa) e a proposição empírica (descreve fatos da realidade). Em sua obra Da Certeza, o filósofo Wittgenstein faz analogia das proposições gramaticais como proposições dobradiças.

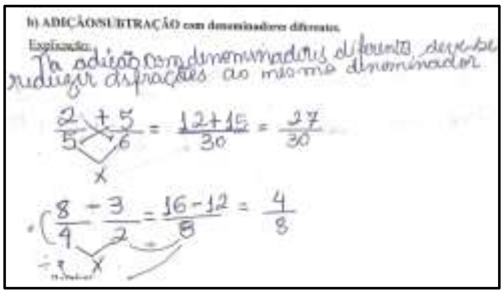
Figura 1 – Adição/subtração com denominadores diferentes.



FONTE: Autores

A professora B definiu que há a necessidade de “reduzir as frações ao mesmo denominador”. Porém, ao trabalhar a regra matemática, usou um artifício para solucionar o problema: primeiro multiplica-se entre si os denominadores; posteriormente, de forma “cruzada”, multiplica-se o denominador de uma fração com o numerador da outra fração; assim pode-se somar ou subtrair os denominadores e permanecer o denominador. A professora procedeu a resolução das questões propostas fazendo uso da mesma técnica de resolução do exemplo fornecido na explicação.

Figura 2 - Adição/subtração com denominadores diferentes.

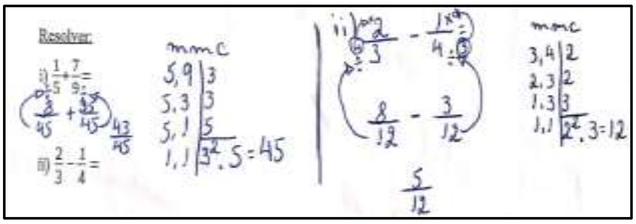


FONTE: Autores.

Ainda neste caso, os professores não explicaram o sentido da regra. É importante que, a cada passo da resolução, o professor possa dar sentido para o aluno entender a regra ora utilizada. Silveira (2015) explicita que a regra terá sentido se ela for interpretada conforme as exigências conceituais da matemática e, para que isso ocorra, é necessário que o professor e o aluno entrem no mesmo universo discursivo.

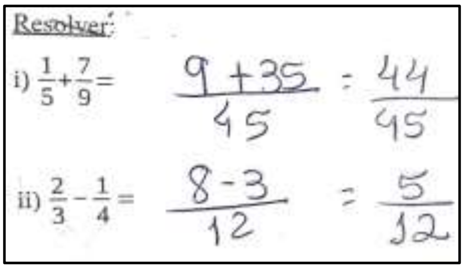
Assim, cada professor resolve a atividade proposta seguindo a regra por ele estabelecida:

Figura 3 – Adição/subtração com denominadores diferentes.



FONTE: Autores.

Figura 4 - Adição/subtração com denominadores diferentes.



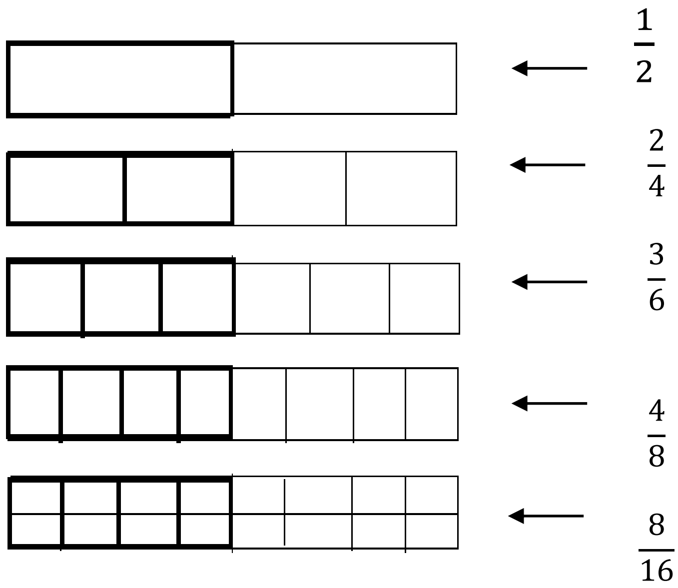
FONTE: Autores.

Bacquet ressalta que:

> Se resolvermos muitos exercícios parecidos com os alunos, alguns acabarão por dar as “boas” respostas, mas esse adestramento não funcionará. É por esta razão que me parece preferível insistir sobre a extensão e a importância do que se deve ser trabalhado sobre frações: compará-las entre elas, verificar se elas têm o mesmo numerador ou mesmo denominador ou nem um nem outro, achar aquelas que são inferiores (ou superiores) a 1, ordená-las, achar frações iguais, etc. (BACQUET, 2001, p. 99).

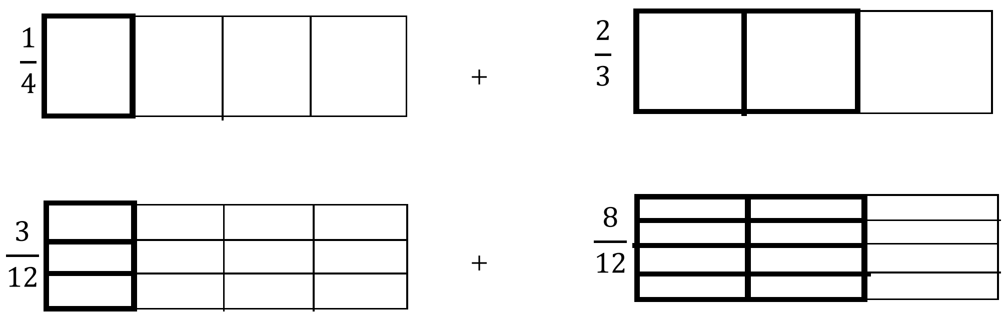
A educadora francesa ressalta que o adestramento é a forma mecânica de resolver adição/subtração de frações com mesmo denominador, sem levar o aluno a entender o porquê da regra. Portanto, indica que é possível explicar por meio de “frações iguais”, o que denominamos por equivalência de frações. Esclarecemos que o conceito de adestramento utilizado por Bacquet é diferente do conceito trabalhado por Wittgenstein, pois, nesta fase, o aluno já possui conhecimentos, ou deveria, acerca de frações que antecedem para adentrar às operações, logo já tem condições de perguntar por que se resolve desta ou daquela maneira.

Desta maneira, vamos explicitar o uso de frações equivalentes na tentativa de explicar a regra, que, por ora, pode ser explorado em sala de aula tal como:



Verificamos que as frações representam a mesma quantidade, logo temos que $\frac{1}{2},\frac{2}{4},\frac{3}{6},\frac{4}{8},\frac{8}{16}$ são frações equivalentes. Logo, o professor não precisa trabalhar com o algoritmo do MMC, num primeiro momento, para explicar a regra de adição/subtração com denominadores diferentes.

Já para a situação apresentada pela professora B, vejamos que pode ser resolvida da seguinte forma:



Logo,

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{3}{12}+\frac{8}{12}=\frac{11}{12}$$

A partir da explanação acima, é importante que o professor faça outros exercícios semelhantes no intuito de o aluno compreender a regra que está sendo utilizada. Como afirma Silveira (2015), é no uso que a regra adquire sentido; assim, quando o aluno tiver o domínio da técnica, não precisará mais do auxílio da representação geométrica para resolver exercícios similares, sobretudo em outros contextos matemáticos, tal como resolver equação algébrica, onde o resultado seja uma soma de frações com denominadores diferentes. Contudo, ela não apresenta uma justificativa para o uso da regra de maneira que o aluno não consegue interpretar a regra, tampouco a compreenderá. A regra usada fundamenta-se também no conceito de frações equivalentes e podemos justificá-la algebricamente, por exemplo:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ax\mathbf{d}}{bx\mathbf{d}}+\frac{cx\mathbf{b}}{dx\mathbf{b}}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

De maneira análoga, damos a justificativa para os exemplos usados na explicação para adição e subtração, respectivamente:

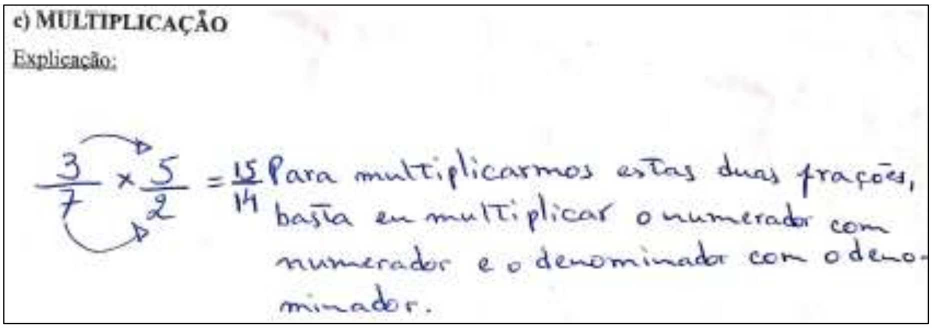
i) $\frac{2}{5}+\frac{5}{6}=\frac{2x6}{5x6}+\frac{5x5}{6x5}=\frac{12}{30}+\frac{25}{30}=\frac{37}{30}$

ii) $\frac{8}{4}-\frac{3}{2}=\frac{8x2}{4x2}-\frac{3x4}{2x4}=\frac{16}{8}-\frac{12}{8}=\frac{4}{8}$

Ressaltamos que o uso da regra na matemática deve ser ensinado com cautela, para que o processo de aplicação desta não seja classificado como mecânico, memorizado, como afirma a pesquisa de Machado (2007) quando propõe uma reconfiguração no ensino de operação de adição com fração com o intuito de o aluno não ficar escravo de regras memorizadas sem sentido para ele. Para Meira (2012), os alunos aplicam as regras dos algoritmos e processos de resolução sem se darem conta de que não compreenderão, porém, isso não significa que a compreensão seja algo mecânico. Nesse aspecto, Wittgenstein enfatiza que “a compreensão é efetuada pela explicação, mas também pelo exercício” (Z, § 186).

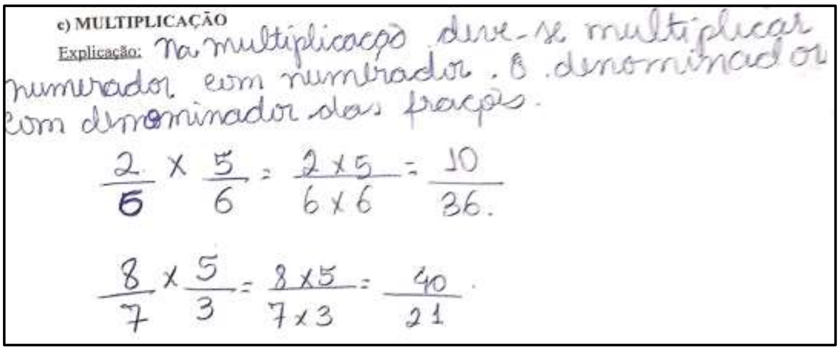
Em seguida, tem-se considarações para operação de multiplicação com frações. Nessa operação, ambos os professores usaram a regra clássica facilmente encontrada em livros didáticos: “multiplica-se numerador com numerador e denominador com denominador”.

Figura 5 - Multiplicação.



FONTE: Autores.

Figura 6 – Multiplicação.



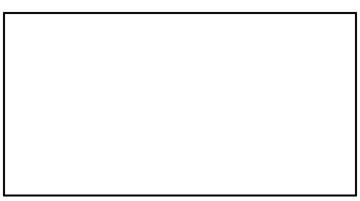
FONTE: Autores.

Ainda neste tópico os professores não explicaram de forma detalhada porque multiplicam-se os numeradores e denominadores, embora tenham aplicado corretamente a regra. Os professores usam como base, muitas vezes, o livro didático e de lá copiam as regras para ensinar aos alunos, mesmo não sabendo explicá-las. Para Wittgenstein, quando o indivíduo é ensinado por alguém ou este observa a ação de outrém na medida que há um costume, um hábito, o indivíduo segue a regra cegamente: “fui treinado para reagir de uma determinada maneira a este signo e agora reajo assim” (IF, § 198).

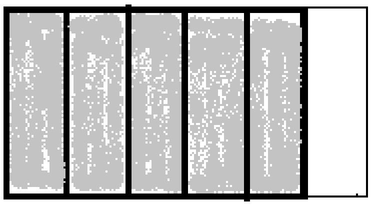
Vejamos no esquema a seguir, a interpretação da regra, a partir do exemplo dado pela professora Maria em $\frac{2}{6}\text{x}\frac{5}{6} = \frac{10}{36}$.

Observe que a multiplicação $\frac{2}{6}\text{x}\frac{5}{6}$ significa $\frac{2}{6}$ de $\frac{5}{6}$.

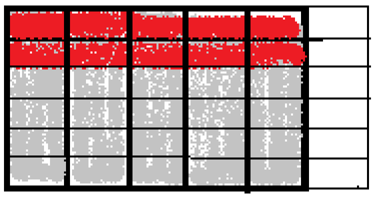
Então, considere o retângulo como um número inteiro:



Hachuramos de cinza $\frac{5}{6}$ do inteiro.



Agora hachuramos de vermelho $\frac{2}{6}$ destes $\frac{5}{6}$.

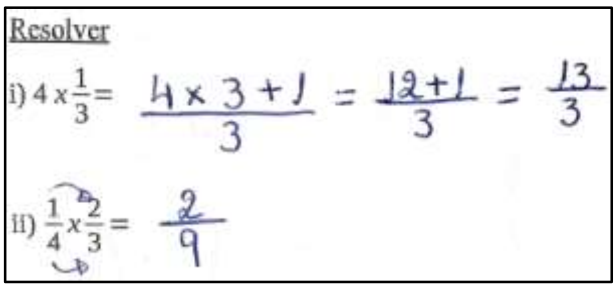


Logo, o retângulo (inteiro) agora está dividido em trinta e seis partes iguais e a multiplicação $\frac{2}{6}$x$\frac{5}{6}$ representa $\frac{10}{36}$.

Vale lembrar que, na multiplicação com números inteiros, a multiplicação perfaz um resultado maior que cada um dos fatores, 2 x 3 = 6. Porém, na multiplicação de frações próprias, como no exemplo acima, o mesmo não ocorre: $\frac{2}{6}\text{x}\frac{5}{6} = \frac{10}{36}$. Assim, ao multiplicarmos as frações, estamos dividindo o inteiro por seis e novamente dividimos cada uma dessas partes por seis, ficando com um resultado menor do que cada fator.

Embora os professores tenham se utilizado do método clássico para explicar a regra da multiplicação de fração, o que nos chamou atenção foi no momento da aplicação da regra nos dois exercícios propostos: no primeiro temos um número inteiro multiplicando uma fração e no segundo temos multiplicação de fração por fração.

Figura 7 - Multiplicação.



FONTE: Autores.

O professor A resolveu a segunda multiplicação utilizando o conceito de fração mista como $4\frac{1}{3}$, o que percebemos, de acordo com Wittgenstein, é que uma regra que foi aprendida num contexto, por exemplo: $\frac{2}{5}$x$\frac{3}{4}$, pode também ser aplicada em outro contexto, como este do exercício proposto.

Outro conceito da filosofia de Wittgenstein que nos dá direcionamento é que o professor não conseguiu perceber que $4x\frac{1}{3}$ é o mesmo que $\frac{4}{1}x\frac{1}{3}$ e que é preciso, neste contexto, *ver* 4 *como* $\frac{4}{1}$, ou seja, ter habilidade para ver um número inteiro como uma fração.

Ainda neste exemplo, o professor pode propor a soma de parcelas iguais, assim: $4x\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$.

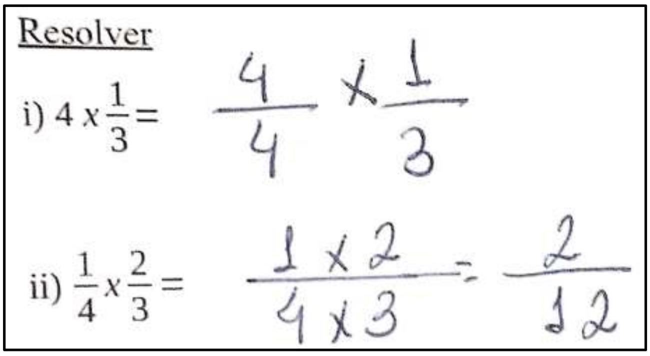
Sarrazy (1997 *apud* SILVEIRA, 2015) ressalta que as regras matemáticas não se atualizam independentemente dos contextos de resolução, porque, em cada contexto, a regra é diferente, na perspectiva do *aluno*. No entanto, a pesquisa de mestrado dissertada aqui versa na perspectiva do *professor*, este que deve ensinar ao aluno o sentido da regra, que deve orientar o aluno a "enxergar" que a mesma regra pode ser utilizada em contextos diferentes.

Em consonância ao exposto, uma pesquisa feita em São Paulo por Rosseti (1998) revelou que não só os alunos apresentam dificuldades em Matemática, mas também os erros cometidos são os mesmos de seus professores:

> Professores de 1ª a 4ª séries, de escolas públicas de São Paulo, acertaram, menos questões de multiplicação e divisão do que alunos de 5ª série de escola particular, em uma pesquisa piloto realizada a partir de duas teses de mestrado. [...] Sandra Magina, professora do Mestrado em Matemática da PUC, diz: O que ficou claro é que onde os professores erram, os alunos também erram (ROSSETI, 1998, p. 2).

Assim como o professor João, a professora Maria também teve equívocos na aplicação da regra no primeiro item de multiplicação com frações, como podemos ver abaixo:

Figura 9 - Multiplicação



FONTE: Autores.

Nesta situação, a professora apresenta dificuldades em analisar o contexto matemático para poder aplicar a regra corretamente e não percebe que, ao estar no contexto das operações com frações, precisa *ver* 4 *como* $\frac{4}{1}$, no entanto, ela segue a regra na multiplicação ao usar a ideia de número inteiro $\frac{4}{4}$. Neste episódio, além do conceito de *ver-como*, a professora é cega para o *aspecto*, de acordo com a filosofia de Wittgenstein.

Chauviré (2003 apud Silveira, 2015) afirma que nossa cegueira para as coisas ordinárias é fruto de podermos ver apenas aquilo que nos aparece aos olhos, como também é difícil descrevermos a periferia de nosso campo visual. Para reeducar o olhar, é preciso que nos apropriemos de jogos de linguagem que expliquem melhor as coisas vistas.

Para exemplificar, voltemos ao exemplo da soma de frações com denominadores diferentes, no qual a professora Maria, no cálculo de $\frac{2}{5} \text{x} \frac{5}{6}$, não compreendeu que, ao fazer a operação $\frac{2}{5} + \frac{5}{6} = \frac{12+25}{30} = \frac{37}{30}$, ela encontrou frações equivalentes a $\frac{2}{5}$ e $\frac{5}{6}$ com denominador comum para, assim, somar as frações. Logo, concluímos que há a cegueira para o sentido desta operação, isto é, há a cegueira para o *aspecto*.

Para Silveira (2017), na sala de aula, a cegueira visual é diagnosticada ao aluno que não consegue ver aquilo que é ensinado, não percebe um aspecto do objeto que é salientado pelo professor. O aluno cego para determinados aspectos precisa treinar sua visão para que consiga ver aquilo que está diante dos olhos. Todavia, este treino deve ser orientado por seu professor. A autora ressalta que o professor precisa treinar o aluno a ver os *aspectos* diante das transformações matemáticas, como a transformação de fração mista para fração imprópria.

Algumas Considerações Finais

O artigo é fruto de uma pesquisa desenvolvida no mestrado e teve como objetivo mostrar como a linguagem matemática contribui no processo educativo da matemática, sobretudo nos anos iniciais do ensino fundamental, o qual teve como aporte os conceitos wittgensteinianos. Assim, o professor em sala de aula pode ter um norte de como dialogar com essa linguagem que é permeada de regras, para que haja sentido ao aluno e para ensinar no intuito de não as tornar regras memorizadas, mecanizadas.

De acordo com Meira (2012) os alunos que aplicam as regras dos algoritmos sem perceber que não compreenderam, apenas reproduzem de forma mecânica, no entanto, a compreensão não é mecânica. Para Wittgenstein (1996) a compreensão é uma habilidade, é dominar uma técnica, o aluno deve ser treinado para identificar singularidades, tal como no contexto matemático: *ver* 4 *como* $\frac{4}{1}$.

A partir dos conceitos de jogos de linguagem, semelhanças de família, ver-como, gesto ostensivo e seguir regras cunhados por Wittgenstein podemos fazer aproximações para o processo educativo da matemática nos anos iniciais do ensino fundamental - como exemplificado com o conteúdo de operações com frações - no intuito de dar direcionamentos aos professores que ensinam matemática, que a regra tem sentido quando ela é interpretada de acordo com as exigências conceituais da matemática.

Embora, os professores participantes da pesquisa tenham anos de experiência em sala de aula, formação inicial em curso de Licenciatura em Pedagogia, eles apresentaram dúvidas, erros conceituais no ensinar, assim, de acordo com o filósofo: "o professor não pode ensinar por meio da dúvida, e sim, partir de certezas".

Para tanto, ressaltamos que por meios dos conceitos wittgensteinianos, a pesquisa de mestrado mostrou mais uma possibilidade ao professor que ensina matemática nos anos iniciais de ensinar as operações com frações a fim de minimizar as dificuldades no ensino e na aprendizagem, sobretudo se o professor estabelecer *jogos de linguagem* para que a regra seja compreendida.

Recebido em: 06/01/2023
Aprovado em: 24/03/2024

Referências

BACQUET, M. **Matemática sem dificuldades:** ou como evitar que ela seja odiada por seu aluno. Trad. Maria Elizabeth Schneider. Porto Alegre: ARTMED Editora, 2001.

COSTA, C. F. **Wittgenstein e a Gramática do Significado**. Natal: Servgráfica, 2005.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de Pesquisa**. Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

GLOCK, H. **Dicionário Wittgenstein**. Trad. Helena Martins. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

GONÇALVES, C. F. Adestrar para a autonomia: a crítica wittgensteiniana ao construtivismo. **Dissertação** (Mestrado) – Universidade Estadual do Norte Fluminense. Programa de Pós-Graduação em Cognição e Linguagem, Campos dos Goytacazes (RJ), 2013.

GOTTSCHALK, Cristiane M. C. Ver e ver como na construção do conhecimento matemático. In: IMAGUIRE, Guido; MONTENEGRO, Maria Aparecida; PEQUENO, Tarcísio (Org) **Colóquio Wittgenstein**. Fortaleza: Edições UFC, 2006, p. 73-93.

HEBECHE, Luiz. **O mundo da consciência**: ensaio a partir da filosofia da psicologia de L. Wittgenstein. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

HINTIKKA, J.; HINTIKKA, M. **Uma investigação sobre Wittgenstein**. Trad. Enid Abreu Dobranszky. Campinas: Papirus, 1994.

LUNA, José Marcos Gomes de. Sentido e jogos de linguagem nas investigações filosóficas. **Dissertação** (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CFCH. Filosofia, 2009.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e Língua Materna:** Análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 1990

MEIRA, Janeisi de Lima. Labirintos da compreensão de regras em matemática: um estudo a partir da regra de três. **Dissertação** (Mestrado) – Universidade Federal do Pará. Instituto de Educação Matemática e Científica. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Belém, 2012.

OLIVEIRA, Marcelo de Sousa; SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. Entre o empírico e o transcendental: gestos ostensivos wittgensteinianos no ensino da matemática. **Boletim Online de Educação Matemática**, v. 5, n. 8, p. 93-110, jan./jul, 2017.

SILVA, Paulo Vilhena da. O aprendizado de regras matemáticas: uma pesquisa de inspiração wittgensteiniana com crianças da 4ª série no estudo de divisão**. Dissertação** (Mestrado) – Universidade Federal do Pará. Instituto de Educação Matemática e Científica. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Belém, 2011.

SILVEIRA, M. R. A. **Interpretação e Comunicação em Matemática**. In: 2 Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Recife (PE), 2008.

SILVEIRA, M. R. A.; MEIRA, J. L.; SILVA, P. V. Os dicionários de Wittgenstein e de Baruk: o significado linguístico no ensino e no aprendizado da matemática. **Educação** (Porto Alegre, impresso), v. 37, n. 3, p. 390-399, set-dez, 2014.

SILVEIRA, M. R. A. **Matemática, discurso e linguagens**: contribuições para a educação matemática. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015

SILVEIRA, M. R. A. Jogos de linguagem entre professor e alunos: possibilidades de aprender e ensinar matemática. **Unión** (San Cristobal de La Laguna), v. 50, p. 78-91, 2017.

ROSSETI, F. **Professor de matemática não aprendeu a ensinar**. Folha de São Paulo, São Paulo, 1998.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas (IF)**. Trad. José Carlos Bruni. São Paulo: Editora Nova Cultural,1996

WITTGENSTEIN, L. **Observações sobre os Fundamentos da Matemática (OFM)**. Trad. João José R. L. de Almeida. S/D.