DOI: https://doi.org/ 10.23925/2358-4122.60556

Algumas reflexões sobre os métodos de resoluções utilizados em atividades propostas nas aulas de matemática na educação básica

Some reflections on the resolution methods used in activities proposed in mathematics classes in basic education

Paulo Ferreira do Carmo[1]

RESUMO

Algumas pesquisas na área de ensino de matemática demonstram que os estudantes aprendem de formas diferentes e que o professor deve diversificar suas estratégias de ensino para potencializar suas aprendizagens. O argumento utilizado nessas pesquisas é que os seres humanos aprendem de maneiras distintas, e que não faz sentido, nas aulas de matemática, privilegiar apenas um tipo de método — no caso da educação básica, o método algébrico — sob a justificativa de que a linguagem algébrica amplia o poder de resolução de problemas em diversas áreas do conhecimento. A abordagem desta pesquisa é de natureza qualitativa e utiliza procedimentos de pesquisa bibliográfica, pois recorre a materiais publicados sobre o assunto. Seu objetivo é discutir algumas atividades propostas em materiais didáticos de matemática e suas respectivas resoluções, com o intuito de potencializar o ensino e a aprendizagem de matemática na educação básica. Neste artigo, apresentamos parte de uma pesquisa em andamento que realiza um estudo histórico e didático dos métodos de resolução de problemas e de atividades nas aulas de matemática, com o propósito de favorecer o ensino e a aprendizagem da disciplina na educação básica. A partir das discussões apresentadas, podemos afirmar que o método mais utilizado foi o algébrico, sem uma exploração prévia de outros métodos, o que acaba por privilegiar apenas uma abordagem — que nem sempre é a mais adequada para a aprendizagem dos estudantes, conforme indicam algumas pesquisas relacionadas ao tema.

Palavras-chave: *Ensino de Matemática; Métodos de resolução de atividades matemáticas; Problemas de ensino e de aprendizagem; Formação de professores.*

ABSTRACT

Some research in mathematics teaching shows that students learn in different ways and that teachers should diversify their teaching strategies to enhance their learning. The argument used in this research is that human beings learn in different ways, and that it makes no sense, in mathematics classes, to prioritize only one type of method—in the case of basic education, the algebraic method—under the justification that algebraic language enhances problem-solving power in various areas of knowledge. This research approach is qualitative in nature and uses bibliographic research procedures, as it draws on published materials on the subject. Its objective is to discuss some activities proposed in mathematics teaching materials and their respective solutions, with the aim of enhancing the teaching and learning of mathematics in basic education. In this article, we present part of an ongoing research project that conducts a historical and didactic study of problem-solving methods and activities in mathematics classes, with the aim of promoting the teaching and learning of the subject in basic education. Based on the discussions presented, we can affirm that the most used method was the algebraic one, without prior exploration of other methods, which ends up favoring only one approach — which is not always the most appropriate for student learning, as indicated by some research related to the topic.

Keywords: *Teaching Mathematics; Methods of solving mathematical activities; Teaching and learning problems; Teacher training.*

[1] Doutor em Educação Matemática pelo PPG Educação Matemática - PUC/SP (2018); paulo.carmo@ufmt.br

Introdução

A partir do nascimento, os seres humanos aprendem a utilizar seus sentidos para suas interações sociais e seu desenvolvimento. De acordo com Pellini (2015, p. 4), “a maneira pela qual os sentidos são educados cria estruturas para ação e interpretação do mundo que oferecem e regulam possibilidades aos indivíduos”, e o autor ainda afirma que a visão é o sentido mais desenvolvido nos seres humanos. Recorrendo ao argumento desse autor, podemos afirmar que uma melhor exploração da visão — relacionada, por exemplo, ao método geométrico de resolução de problemas — pode contribuir para uma aprendizagem mais eficiente de conceitos matemáticos.

No que diz respeito aos modos de organizar o pensamento para a resolução de um problema matemático, não é diferente: existem diversas maneiras de estruturar essas informações para posterior resolução. Wielewski (2009) afirma que há uma certa predominância nas formas de pensar matematicamente ao resolver problemas, as quais denomina de estilos cognitivos.

Para D’Ambrosio (2017, p. 29):

> O pensamento ocidental é a subordinação do pensamento global, como era predominante nas culturas nas margens ao sul do Mediterrâneo, pelo pensamento sequencial, que se tornou uma característica da filosofia grega.

Segundo esse autor, “as ideias de comparar, classificar, quantificar, medir, explicar, generalizar, inferir e avaliar são formas de pensar presentes em toda a espécie humana” (D’Ambrosio, 2017, p. 31).

De acordo com D’Ambrosio (2017), a matemática se impregnou em várias áreas do conhecimento e em muitas atividades do mundo moderno. Esse autor afirma que:

> Sua presença no futuro será certamente intensificada, mas não na forma prática de hoje. Será, sem dúvida, parte integrante dos instrumentos comunicativos, analíticos e materiais. A aquisição dinâmica da matemática integrada nos saberes e fazeres do futuro depende de oferecer aos alunos experiências enriquecedoras (p. 46).

Concordamos com o autor que para favorecer a aprendizagem dos estudantes é preciso oferecer ‘experiências enriquecedoras’ e não só oferecer um único método de resolução. Para isso ocorrer, o professor deve explorar alguns modos de desenvolver atividades de forma a enriquecer essas aprendizagens.

D’Ambrosio (2017, p. 58) declara que “o processo de cada indivíduo gerar conhecimento como ação a partir de informações da realidade é também vivido por outro

[...]” e que essa “realidade é percebida diferentemente por cada indivíduo [...]”, pois “essas informações são processadas diferentemente e como resultado as ações são diferentes”.

Wielewski (2009), em sua pesquisa, afirma que a metodologia de resolução de problemas tem sido explorada nas aulas de matemática de forma mais intensa nos últimos anos, mas que “nem sempre todas as possibilidades de resolução são discutidas com os estudantes; às vezes, apenas um processo é abordado” (p. 46), o que prejudica alguns alunos que têm preferência por diferentes métodos de resolução.

Teles (2010), em sua pesquisa sobre a influência do campo algébrico na resolução de situações que envolviam fórmulas de área, trabalhou com 259 estudantes do Ensino Médio. Em sua conclusão, afirmou que os sujeitos apresentaram dificuldades para se expressarem simbolicamente em uma situação geral e que tiveram mais êxito nas tentativas numéricas, nas quais o domínio era o conjunto dos números naturais — o que demonstra uma aptidão (ou preferência) pelo método aritmético.

Para Devlin (2002, p. 11):

> Sem os símbolos algébricos, uma grande parte da matemática não existiria. Na verdade, trata-se de uma questão complexa que tem a ver com as capacidades cognitivas do ser humano. O reconhecimento de conceitos abstratos e o desenvolvimento de uma linguagem adequada são, de fato, os dois lados da mesma moeda.

As dificuldades de aprendizagem na educação básica são agravadas no início do ensino de álgebra — normalmente abordado no 7º ano do Ensino Fundamental — com a inserção da simbologia algébrica e de regras sem nenhum significado para os estudantes, tendo como objetivo o ensino de algoritmos por meio de procedimentos mecânicos e regras mnemônicas, conforme apontam algumas pesquisas da área de Educação Matemática relacionadas ao assunto (Ponte, 2005; Sessa, 2005; Fiorentini et al., 2005).

O método aritmético é explorado praticamente em todo o Ensino Fundamental, enquanto o geométrico é abordado em alguns anos, como no 6º e no 9º ano. Já o método algébrico é introduzido nos anos finais do Ensino Fundamental e permanece presente em todo o Ensino Médio. Algumas pesquisas indicam dificuldades de aprendizagem em conceitos geométricos e algébricos (Kaleff et al., 1994; Sessa, 2005; Fiorentini et al., 2005), o que nos leva à hipótese — baseada em anos de atuação na educação básica e na análise de diversos livros didáticos — de que há uma predominância do enfoque algébrico.

Os documentos oficiais apontam para esse direcionamento (o caminho algébrico), e os livros didáticos orientam as resoluções das atividades para esse método, com base no argumento de que "para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e de generalização, além de possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas" (Brasil, 1998, p. 115).

Segundo Tashima e Silva (s.d.), o Movimento da Matemática Moderna incentivou o ensino da matemática com ênfase no simbolismo, passando a exigir dos estudantes maior capacidade de abstração e distanciando-os da matemática relacionada ao mundo sensível. Outro fator apontado é que esses estudantes aprenderam muito pouco de geometria e não conseguiram relacionar esse conteúdo com sua realidade. Diante disso, os autores afirmam que os estudantes apresentaram diversas dificuldades de aprendizagem de conceitos relacionados à geometria.

Ribeiro e Cury (2021) realizaram um estudo sobre as dificuldades enfrentadas na aprendizagem de conceitos relacionados à equação e à função por estudantes da educação básica e do ensino superior, e afirmam:

> É interessante notar, nessas pesquisas realizadas e nas respostas dos participantes, que as manipulações geométricas, empregadas por gregos, árabes e hindus, parecem ter sido abandonadas no ensino atual; a ênfase nas soluções gerais e no caráter estrutural das equações pode ser um dos fatores que levam os alunos da educação básica a enfrentarem tantas dificuldades na construção do conceito de equação e na sua solução (p. 76).

No final da década de 1930, surgiu um grupo de matemáticos denominado Bourbaki, cujo principal objetivo era organizar logicamente e moldar parte da matemática moderna já consolidada em uma teoria coerente e de fácil aplicação (Eves, 2011). O grupo se baseava na "metafísica não demonstrável de que, para cada questão matemática, há, entre as muitas maneiras de lidar com ela, uma que é a melhor, ou ótima" (p. 691). Segundo esse grupo, as aulas de matemática deveriam focar no "estudo de um único método matemático, classificado como o melhor" (p. 692). De acordo com nossa experiência na educação básica, essa concepção ainda parece ser adotada em muitos livros didáticos e nas aulas de matemática.

Diante desse cenário, o objetivo deste artigo é discutir algumas atividades propostas em materiais didáticos de matemática e suas respectivas resoluções. Para isso, apresenta-se um estudo preliminar de cunho histórico relacionado aos métodos de resolução de determinados problemas e, em seguida, analisa-se como tais atividades foram exploradas em alguns livros didáticos, em uma avaliação diagnóstica da educação básica e em suas propostas de resolução. O intuito é favorecer uma discussão sobre os métodos de resolução, visando potencializar a aprendizagem da matemática, conforme os objetivos deste artigo.

O método da falsa posição utilizado pela civilização egípcia para resolver equações

De acordo com Eves (2011), o Egito Antigo permaneceu em isolamento por muito tempo, protegido naturalmente de invasões estrangeiras — visto que a região se localizava no norte do continente africano. O Papiro de Rhind é uma fonte primária que apresenta aspectos da antiga matemática egípcia. Nele aparecem os métodos de multiplicação e divisão utilizados pelos egípcios, o método da falsa posição para a resolução de equações polinomiais de 1º e 2º graus, a solução para o cálculo da área de um círculo e diversas aplicações da matemática em problemas práticos.

Esse autor ainda afirma que:

> Muitos dos 110 problemas dos papiros Rhind e Moscou mostram sua origem prática ao lidar com questões sobre o quão substanciosos eram o pão e a cerveja, sobre balanceamento de rações para gado e aves domésticas e sobre armazenamento de grãos. Para muitos desses problemas a resolução não exigia mais do que uma equação linear simples e o método empregado ficou conhecido mais tarde na Europa como regra de falsa posição (Eves, 2011, p. 74).

Eves (2011) apresenta a resolução de uma equação do 1º grau recorrendo a esse método/regra:

> Assim, para resolver $x + \frac{x}{7} = 24$ assume-se um valor conveniente para x, digamos $x = 7$. Então $x + \frac{x}{7} = 8$, em vez de 24. Como 8 deve ser multiplicado por 3 para se obter 24, o valor correto de x deve ser 3(7) ou 21 (p. 74).

Outro problema que Eves (2011, p. 74) apresenta está relacionado a resolução de uma equação de 2º grau, que em seguida é apresentado a resolução pelo método da falsa posição:

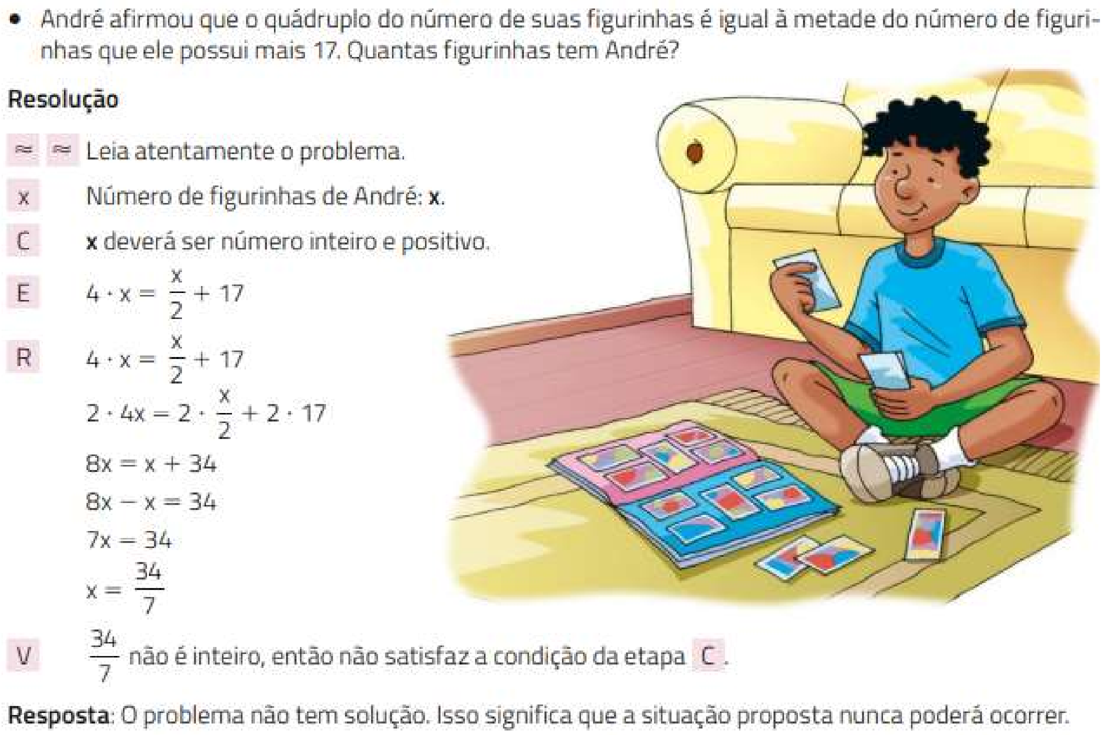
> Um papiro que data por volta de 1950 a.C., encontrado em Kahun, contém o seguinte problema: "Uma dada superfície de 100 unidades de área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão entre si como $1 : \frac{3}{4}$". Nesse caso temos $x^2 + y^2 = 100$ e $x = \frac{3y}{4}$. A eliminação de x fornece uma equação quadrática em y. Podemos, porém, resolver o problema por falsa posição. Para isso tomemos $y = 4$. Então $x = 3$ e $x^2 + y^2 = 25$ em vez de 100. Por conseguinte, devemos fazer a correção de x e y dobrando os valores iniciais, o que dá $x = 6$ e $y = 8$.

Pelo método algébrico (método por substituição) teríamos a seguinte resolução: $(\frac{3y}{4})^2 + y^2 = 100$ => $\frac{9y^2}{16} + y^2 = 100$, multiplicando ambos os membros por 16 temos: $9y^2 + 16y^2 = 1600$, reduzindo os termos semelhantes $25y^2 = 1600$ => $y = \mp\sqrt{\frac{1600}{25}}$ => $y = \mp\sqrt{64}$ => $y = \mp 8$ => $y = -8$ não convém, pois *y* representa uma medida, então $y = 8$, substituindo *y* por 8 temos que $x = \frac{3\,.\,8}{4}$ => $x = 6$.

Podemos observar que o método da falsa posição é mais intuitivo e, por isso, pode favorecer a aprendizagem dos estudantes.

No livro didático *Matemática e Realidade*, do 7º ano do Ensino Fundamental, é proposto o seguinte problema, que é resolvido da seguinte forma:

Figura 1 – Atividade proposta no livro didático sobre equação do 1º grau


- André afirmou que o quádruplo do número de suas figurinhas é igual à metade do número de figurinhas que ele possui mais 17. Quantas figurinhas tem André?

Resolução

≈ ≈ Leia atentamente o problema.

X Número de figurinhas de André: **x**.

C **x** deverá ser número inteiro e positivo.

E $4 \cdot x = \frac{x}{2} + 17$

R $4 \cdot x = \frac{x}{2} + 17$

$2 \cdot 4x = 2 \cdot \frac{x}{2} + 2 \cdot 17$

$8x = x + 34$

$8x - x = 34$

$7x = 34$

$x = \frac{34}{7}$

V $\frac{34}{7}$ não é inteiro, então não satisfaz a condição da etapa C.

Resposta: O problema não tem solução. Isso significa que a situação proposta nunca poderá ocorrer.

Fonte: Iezzi *et al.* (2018, p. 253).

Nessa proposta de resolução, observamos que a simbologia e os procedimentos de resolução de equações são mais explorados do que os procedimentos aritméticos — os mais utilizados pelos alunos da educação básica (Teles, 2010). O método da falsa posição pode potencializar a aprendizagem desses estudantes.

Um valor conveniente a ser escolhido nesse problema deve ser um número par, pois o enunciado menciona “metade do número de figurinhas que ele possui”. Por exemplo, ao testar o valor “6”: o quádruplo de 6 é 24, e a metade de 6 é 3; somando 3 com 17, temos 20 — o que mostra que a igualdade não é verdadeira ($24 \neq 20$). Trocando o valor para "4" e testando novamente: o quádruplo de 4 é 16, e a metade de 4 é 2; somando 2 com 17, temos 19 — novamente falso ($16 \neq 19$). Restando agora o valor "2": o quádruplo de 2 é 8, e a metade de 2 é 1; somando 1 com 17, temos 18 — falso mais uma vez ($8 \neq 18$).

Podemos, portanto, afirmar que esse problema não tem solução, pois a quantidade de figurinhas precisa ser um valor inteiro positivo. O ideal, para introduzir o método algébrico, seria trabalhar com problemas mais complexos, nos quais a resolução numérica por tentativa seja mais trabalhosa — evidenciando que o método algébrico, por meio de manipulações, é uma estratégia mais prática e segura de resolução.

O método geométrico utilizado pela civilização grega para resolver equações

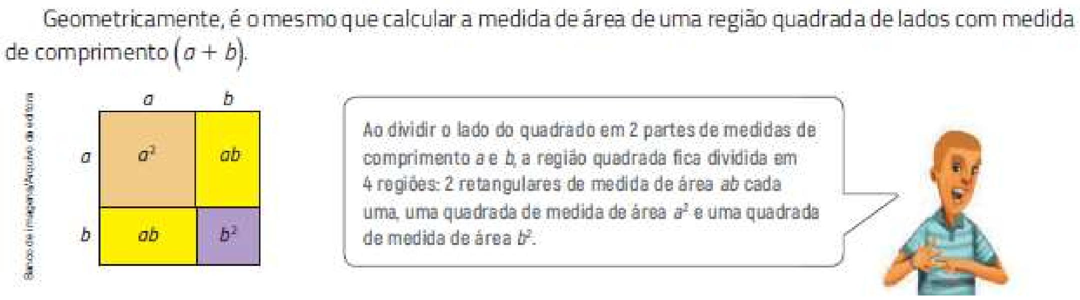
De acordo com Eves (2011), a matemática moderna nasceu em uma atmosfera de racionalismo, na região da costa oeste da Ásia Menor. Foi Tales de Mileto quem deu início à tradição da geometria demonstrativa. Tales é considerado um dos "sete sábios" da Antiguidade e viveu durante o século VI a.C.

Para Boyer e Merzbach (2012), a álgebra geométrica grega pode parecer excessivamente artificial e difícil para os leitores contemporâneos, mas, para os sábios daquela época — que se tornaram hábeis em sua utilização — foi um instrumento conveniente. Por exemplo, a lei distributiva $a(b+c+d) = ab+ac+ad$ era mais evidente para um estudioso grego do que para um estudante que inicia o estudo da álgebra hoje, pois, para os gregos, essa expressão podia representar as áreas de retângulos correspondentes à igualdade.

Segundo Eves (2011) a Proposição 4 do Livro II dos Elementos – de Euclides – estabelece geometricamente a identidade $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ decompondo o quadrado de lado $(a+b)$ em dois quadrados e dois retângulos de áreas a^2, b^2, ab e ba. O enunciado de Euclides para essa proposição é: "dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes" (Eves, 2011, p. 108). Essas representações geométricas de igualdades (identidades) são utilizadas em alguns livros didáticos de educação básica para introduzir alguns assuntos nas aulas de matemática tais como: operações com monômios e polinômios, produtos notáveis, ângulos correspondentes etc.

No livro didático *Telaris*, do 9º ano do Ensino Fundamental, essa identidade algébrica foi apresentada de forma geométrica, como nos *Elementos* de Euclides, demonstrando a igualdade. No entanto, para os estudantes, isso não é simples: muitos acreditam que $(a + b)^2$ é igual $a^2 + b^2$, o que revela uma dificuldade de aprendizagem relacionada à distributividade da multiplicação sobre a adição, conforme aponta o estudo de Ribeiro e Cury (2021).

Figura 2 – Identidade algébrica apresentada no livro didático

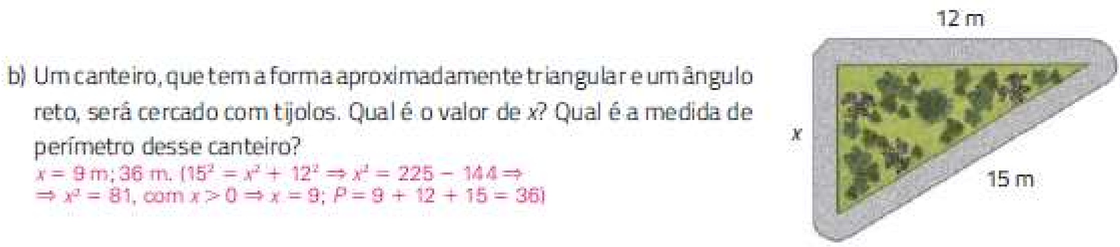


Fonte: Dante (2018, p. 36)

Após apresentar essa imagem o autor afirma que "podemos concluir que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$" (Dante, 2018, p. 36).

Outra atividade interessante foi proposta nesse mesmo livro e sua respectiva resolução será apresentada na Figura 3 a seguir:

Figura 3 – Atividade proposta no livro didático sobre triângulo retângulo



Fonte: Dante (2018, p. 187)

O método algébrico foi utilizado na resolução proposta pelo livro, mas, considerando as circunstâncias do problema, o jardineiro ou pedreiro poderia resolvê-lo medindo o perímetro com uma trena, sem precisar recorrer ao método algébrico. Alternativamente, o estudante poderia desenhar um triângulo com essas medidas (em escala) e, em seguida, medir seus lados com o auxílio de uma régua ou trena. Nota-se que o livro apresentou apenas um único método de resolução.

O método algébrico dos árabes de completar os quadrados para resolver equações quadráticas

De acordo com Boyer e Merzbach (2012), uma das maiores transformações no conhecimento matemático ocorreu com a expansão do islamismo na Idade Média. A partir de 622 d.C., ano da Hégira do profeta Maomé, o islamismo expandiu-se da Arábia até a Pérsia, alcançando também o norte da África e a Espanha.

Segundo esses autores, Mohammed Ibn Musa al-Khwarizmi (cerca de 780 a cerca de 850) escreveu diversos livros relacionados à astronomia e à matemática. Al-Khwarizmi produziu duas obras sobre aritmética e álgebra que desempenharam um papel fundamental na história da matemática.

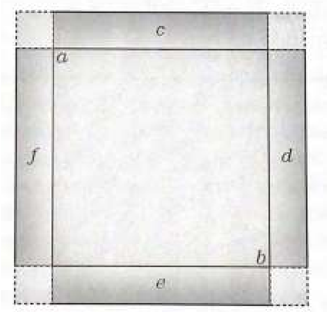
Na tradução latina do livro *Álgebra* (*Al-Jabr*), al-Khwarizmi apresenta um estudo de equações lineares e quadráticas, formadas por três tipos de quantidades: raízes, quadrados e números (isto é, x, x^2 e números inteiros). O livro é organizado em seis capítulos, e em cada um deles é apresentado um caso com três exemplos (com $a = 1$, $a < 1$ e $a > 1$).

Boyer e Merzbach (2012, p. 166) apresentam os casos de acordo com al-Khwarizmi:

> Cap. 1 - Quadrados iguais as raízes: $x^2 = 5x$; $\frac{x^2}{3} = 4x$ e $5x^2 = 10x$ (notação moderna);
> Cap. 2 - Quadrados iguais a números;
> Cap. 3 – Raízes iguais a números (raiz $x = 0$ não era reconhecida);
> Cap. 4 – Quadrados e raízes iguais a números;
> Cap. 5 – Quadrados e números iguais a raízes;
> Cap. 6 – Raízes e números iguais a quadrados.
> As soluções são dadas por "receitas" para "completar o quadrado". Em cada caso, só é dada a resposta positiva. Os seis casos de equações mencionados esgotam as possibilidades de equações lineares e quadráticas que têm uma raiz positiva.

De acordo com esses autores, a álgebra de al-Khwarizmi revela elementos da civilização grega, mas suas demonstrações apresentam algumas diferenças em relação à matemática grega clássica. Para evidenciar essas distinções, eles apresentam a resolução da seguinte equação: $x^2 + 10x = 39$ (Figura 4):

Figura 4 – Resolução geométrica da equação $x^2 + 10x = 39$ de acordo com al-Khwarizmi



Fonte: Boyer e Merzbach (2012, p. 167)

> Al-Khwarizmi traça um quadrado ab para representar x^2 e sobre os quatro lados desse quadrado coloca retângulos c, d, e e f, cada um com largura $2\frac{1}{2}$ unidades. Para completar o quadrado maior, é preciso acrescentar os quatros pequenos quadrados pontilhados nos cantos, para cada um dos quais tem uma área de $6\frac{1}{4}$ unidades. Portanto, para "completar o quadrado" deve somar 4 vezes $6\frac{1}{4}$ unidades ou 25 unidades, obtendo, pois, um quadrado de área total 39 + 25 = 64 unidades. O lado do quadrado grande deve, portanto, ser de 8 unidades, de que subtraímos 2 vezes $2\frac{1}{2}$ ou 5 unidades, achando $x = 3$ (Boyer, Merzbach, 2012, p. 167).

De acordo com al-Khwarizmi, esse caso é apresentado no capítulo 4 do livro *Álgebra*: "quadrados e raízes iguais a números". A resolução geométrica proposta é semelhante à resolução algébrica que, ao completar o quadrado, transforma a expressão algébrica do primeiro membro em um trinômio quadrado perfeito: $x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$ ao reduzir os membros chega-se a $(x + 5)^2 = 64$ => $x + 5 = \sqrt{64}$ => $x + 5 = 8$ => $x = 8 - 5$ => $x = 3$ (foi desprezado o valor negativo "-8" nessa resolução). Nesse tipo de resolução é necessário que o estudante tenha domínio em vários conceitos matemáticos, tais como: produtos notáveis, operações inversas, resolução de equações.

No livro *Matemática: Ciência e Aplicações*, Volume 1 do Ensino Médio, de Iezzi et al. (2013, p. 101), foi proposto o seguinte problema:

> Um grupo de alunos do Curso de Biologia programou uma viagem de campo que custaria no total de R$ 2400,00 – valor que dividiram igualmente entre si. Alguns dias antes da partida, quatro estudantes se juntaram ao grupo e, assim, cada participante pagou R$ 30,00 a menos. Quantas pessoas foram à viagem?

Se utilizarmos o método algébrico para resolver esse problema devemos encontrar as equações que representam a situação problema: inicialmente temos $y = \frac{2400}{x}$ com x representando a quantidade de alunos e y representando o custo em reais para cada aluno; e depois temos a seguinte situação $y - 30 = \frac{2400}{x+4}$ pois, acrescentou 4 alunos e o custo reduziu R$ 30,00, note que temos duas incógnitas (x e y). Igualando essas equações temos: $\frac{2400}{x} = \frac{2400}{x+4} + 30$, utilizando-se o mmc dos denominadores, reduzindo os termos semelhantes e simplificando por 30 obtemos a equação: $x^2 + 4x - 320 = 0$, resolvendo pelo método de completar os quadrados dos árabes temos: $x^2 + 4x + 4 = 320 + 4$ => $(x + 2)^2 = 324$ => $x + 2 = \pm\sqrt{324}$ => $x = \pm 18 - 2$ => $x = 16$ e $x = -20$ que não convém pois, x representa a quantidade de alunos.

Solução: Foram 20 pessoas na viagem $(16 + 4)$.

Pelo método aritmético (da falsa posição), pode-se tentar um valor conveniente: por exemplo *10* e verificaria $\frac{2400}{10} = 240$ e depois $\frac{2400}{10+4} \cong 171{,}43$, verificando que a diferença dos resultados não é de 30 reais. Tentando agora um valor maior que *10*, por exemplo *15*, temos: $\frac{2400}{15} = 160$ e $\frac{2400}{15+4} \cong 126{,}32$ e verificamos que a diferença é de $\cong$ *33* reais, bem próximo de 30 reais, para daí tentar *16*, que é a resposta correta, como já calculamos pelo método algébrico no parágrafo anterior.

Nota-se que esse método é mais intuitivo (método numérico), e por isso é o mais utilizado pelos estudantes de educação básica de acordo com a pesquisa de Teles (2010).

Atividade relacionada à matrizes (sistema lineares) – exemplo de uma situação real ocorrida em um Programa de Educação Tutorial (PET)

O grupo PET Matemática Araguaia desenvolveu atividades intituladas "Enigmas", com o intuito de favorecer a aprendizagem da matemática por meio de publicações nas redes sociais do grupo. Posteriormente, elaborou um material didático em formato digital, disponibilizado gratuitamente a professores e demais interessados. A seguir, vejamos um exemplo de atividade proposta por alunos do curso de Licenciatura em Matemática e sua respectiva resolução:

Figura 5 – Enigma: Quanto pesam?

Fonte: Instagram do PET Matemática Araguaia, 2021.

Proposta de resolução apresentada pelos alunos no material didático:

Primeiro, vamos representar os animais da seguinte forma:

$\boldsymbol{x} =$ gato, $\boldsymbol{y} =$ coelho , $\boldsymbol{z} =$ cão

Daí, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 10 \text{ (I)} \\ y + z = 20 \text{ (II)} \\ x + z = 24 \text{ (III)} \end{cases}$$

$x + y + z = ?\,\text{(IV)}$

Equação (I): $x + y - y = 10 - y$

$x = 10 - y$ (V)

Equação (II): $-y + y + z = 20 - y$

$z = 20 - y$ (VI)

Substituindo (V) e (VI) na equação (III), temos:

$10 - y + 20 - y = 24$

$-2y + 30 = 24$

$-2y \cdot (-1) = -6 \cdot (-1)$

$\mathrm{y} = 3$, ou seja, o peso do coelho equivale a 3 kg.

Substituindo o peso do coelho (y) na equação (I), encontramos que:

$x + 3 = 10$

$x + 3 - 3 = 10 - 3$

$x = 7$, ou seja, o peso do gato equivale a 7 kg.

Substituindo o peso do coelho (y) na equação (II), encontramos que:

$3 + z = 20$

$3 - 3 + z = 20 - 3$

$z = 17$, ou seja, o peso do cão equivale a 17 kg.

Logo, temos: o cão pesa 17 kg, o gato pesa 7 kg e o coelho pesa 3 kg.

Para descobrir o peso dos animais juntos: equação (IV) **(**$x + y + x =$?), basta somar o peso dos animais: $(7 + 17 + 3)$ kg $= 27$ kg

Ressaltando que esse não é o único modo de resolver esse enigma e que os alunos de educação básica podem resolver por tentativa e erro, que é um modo interessante para o desenvolvimento do pensamento aritmético dos alunos.

Observando atentamente a proposta de resolução dos licenciandos podemos verificar uma resolução mais prática; por exemplo: se somasse as 3 equações desse sistema linear obteríamos a seguinte equação: $2x + 2y + 2z = 54$ e depois dividindo os membros por 2 obteriam a resposta correta $x + y + z = 27$ sem a necessidade de calcular o peso de cada animal.

Nesta proposta de resolução, apresentada pelos licenciandos, verificamos indícios de uma aprendizagem vinculada ao conceito de incógnita.

Agora, vamos apresentar um exemplo semelhante de questão aplicada em uma avaliação diagnóstica no estado de São Paulo. Há algum tempo, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo (SEE/SP) utiliza uma avaliação diagnóstica denominada AAP (Avaliação da Aprendizagem em Processo), realizada ao final de cada bimestre, com o intuito de verificar a aprendizagem dos alunos no respectivo período. A partir desses resultados, busca-se definir ações que visem à recuperação das aprendizagens em defasagem dos estudantes naquele bimestre.

A seguir, apresentamos uma questão da AAP relacionada ao tema “matrizes – sistemas lineares”, abordado na 2ª série do Ensino Médio (2º bimestre), seguida de uma discussão sobre os métodos de resolução, proposta pelos autores deste artigo.

Figura 6 – AAP – Matemática – Matrizes – Sistemas Lineares

Questão 11

Uma papelaria recebeu um lote especial de cadernos, canetas e lapiseiras e fez a seguinte promoção:

Kit	Preço
Kit 1: 1 Caderno + 1 Caneta	R$ 15,00
Kit 2: 1 Caderno + 1 Lapiseira	R$ 13,00
Kit 3: 1 Caneta + 1 Lapiseira	R$ 12,00

Mantendo os mesmos preços da promoção, um novo kit com 1 caderno, 1 lapiseira e 1 caneta, deverá custar:

(A) R$ 13,00.

(B) R$ 16,00.

(C) R$ 20,00.

(D) R$ 28,00.

(E) R$ 40,00.

A maneira pela qual você pensou na resolução da questão é muito importante, portanto escreva no quadro a seguir, como você chegou à resposta.

Fonte: São Paulo (2017, p. 12)

Resolução tradicional: Chamando caderno de x, caneta de y e lapiseira de z podemos escrever o sistema a seguir:

$$\begin{cases} x + y = 15 \\ x + z = 13 \\ y + z = 12 \end{cases}$$

Isolando y na 1ª equação ($y = 15 - x$), isolando z na 2ª equação ($z = 13 - x$) e substituindo y e z na 3ª equação temos: $15 - x + 13 - x = 12$, e calculado o valor de x nesta equação temos: $x = 8$, depois calculando os valores de y e z temos: $y = 7$ e $z = 5$.

Portanto, cada caderno custa R$ 8,00, cada caneta custa R$ 7,00 e cada lapiseira custa R$ 5,00. Mas a questão pede o valor do kit: caderno + caneta + lapiseira ($x + y + z =?$), para isso, não era necessário calcular o valor unitário de cada item, o modo mais prático seria somar as 3 equações do sistema linear acima e simplificar por 2, equivalente ao problema do enigma apresentado anteriormente:

$$2x + 2y + 2z = 40\ (:2)$$

$$x + y + z = 20$$

Portanto o kit custa R$ 20,00, alternativa (C).

A maioria dos alunos calcula os valores de cada item para, em seguida, somá-los — assim como fazem os licenciandos — evidenciando um aprendizado vinculado ao conceito de incógnita. Esse tipo de abordagem é reforçado por nós, professores, ao oferecermos um único método de resolução e ao enfatizarmos a necessidade de conhecer o valor de cada incógnita.

Principais resultados

Este artigo teve como objetivo discutir algumas atividades propostas em materiais didáticos de matemática e suas respectivas resoluções, com o intuito de potencializar o ensino e a aprendizagem da matemática na educação básica. Algumas pesquisas na área de ensino de matemática mostram que os alunos apresentam dificuldades de aprendizagem nessa disciplina e que os métodos de resolução utilizados nas aulas devem favorecer a discussão de diferentes abordagens — o que nem sempre ocorre. Frequentemente, é oferecido apenas o método algébrico, com base no argumento de que se trata da forma mais poderosa de resolver diversos tipos de problemas (Brasil, 1998), negligenciando os estilos cognitivos dos estudantes (Wielewski, 2009).

As discussões sobre os métodos tornam-se importantes para potencializar a aprendizagem dos alunos e, assim, favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades previstas nos documentos oficiais para a educação básica.

Cabe ao professor planejar suas aulas e oferecer mais de um método de resolução, com o objetivo de promover discussões que estimulem a reflexão sobre o conteúdo estudado. A partir dessas discussões, é possível negociar o método mais adequado a ser utilizado em cada tipo de atividade. Convém ressaltar que não existe um “único método” de resolução, mas sim diferentes formas de pensar matematicamente — o que torna a matemática uma área de conhecimento essencial na formação do cidadão.

Referências

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. História da Matemática. Tradução Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental – Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

DANTE, L. R. Teláris Matemática, 9º ano: Ensino Fundamental, Anos Finais. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2018.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática: Elo entre as Tradições e a Modernidade. 5ª Edição. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2017. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

DEVLIN, K. Matemática - a ciência dos padrões: A procura de uma ordem na vida, na mente e no universo. Porto Editora, 2002. (Biblioteca Científica)

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTÓVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: Seminário Luso-Brasileiro de investigações matemáticas no currículo e na formação de professores, 2005.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. Tradução Hygino H. Domingues, 5ª edição – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

IEZZI, G.; MACHADO, A.; DOLCE, O. Matemática e Realidade. 7° ano do Ensino Fundamental, 9ª edição. São Paulo: Atual Editora, 2018.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. Matemática: Ciências e Aplicações, volume 1: Ensino Médio, 7ª ed. – São Paulo: Saraiva, 2013.

KALEFF, A. M.; HENRIQUES, A. S.; REI, D. M.; FIGUEIREDO, L. G. Desenvolvimento do Pensamento Geométrico – O Modelo de Van Hiele. Rio Claro: BOLEMA, 1994, v. 9, n. 10.

PELLINI, J. R. Arqueologia com sentidos. uma introdução à arqueologia sensorial. Campinas: Revista Arqueologia Pública, 2015, p. 1-12.

PONTE, J. P. Álgebra no curriculo escolar. Educação Matemática. In: XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática, Caminha, abril de 2005, p. 36-42.

TASHIMA, M. M.; SILVA, A. L. As lacunas no ensino-aprendizagem da geometria. (s.d.).

TELES, R. A. M. Um estudo sobre a influência do campo algébrico na resolução de situações que envolvem fórmulas de área. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 12, n. 1, pp. 129-142, 2010.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. Álgebra para a formação do professor: explorando conceitos de equação e de função. 2ª ed.; 1. reimp. – Belo Horizonte, Autêntica, 2021. (Coleção Tendências em Educação Matemática)

SÃO PAULO. Secretária da Educação do Estado de São Paulo. Avaliação da Aprendizagem em Processo – Matemática – 2ª série Ensino Médio – 2º bimestre de 2017 – SEE/SP.

SESSA, C. Iniciación al estúdio didáctico del Álgebra, Orígenes y perspectivas. Formación docente – Matemática. 1ª edição - 2005. Libros del Zorzal.

WIELEWSKI, G. D. Estilos cognitivos na matemática manifestados na resolução de problemas. In: Educação Matemática nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio. MARANHÃO, Cristina (org.). São Paulo: Musa Editora, 2009.

Recebido em: 01/03/2024
Aprovado em: 01/10/2025