Correlações entre os diferentes registros de representação das quádricas no Ambiente de Matemática Dinâmica do GeoGebra: uma proposta para discriminação dos possíveis casos de elipsoides

Correlations between the different representation registers of quadrics in GeoGebra's Dynamic Mathematics Environment: a proposal for discrimination of possibles cases of ellipsoids

Núbia Guimarães[1]

Márcia Notare[2]

RESUMO

Esse artigo apresenta a análise teórica de uma abordagem informática para discriminação dos possíveis casos de elipsoides. Conforme a Hipótese Fundamental de Aprendizagem de Duval, a compreensão de um conceito matemático depende da coordenação de ao menos dois registros de representação. E, essa coordenação entre registros, depende da correlação entre as diferentes representações semióticas. Esse estudo vem apresentar uma proposta que combina o uso do Ambiente de Matemática Dinâmica do GeoGebra com a abordagem de Duval, para viabilizar a correlação entre os diferentes registros de representação dos elipsoides. A análise realizada evidenciou que a proposta cumpre as condições necessárias para a correlação entre esses registros de representação.

Palavras-chave: *Superfícies Quádricas; Registros de Representação Semiótica; Ambiente de Matemática Dinâmica do GeoGebra; Objetos-de-pensar-com.*

ABSTRACT

This article presents the theoretical analysis of an informatics approach for discrimination of possibles cases of ellipsoids. According to Duval's Fundamental Learning Hypothesis, understanding a mathematical concept depends on the coordination of at least two representation registers. This coordination between records depends on the correlation between the different semiotic representations. This study presents a proposal that combines the use of GeoGebra's Dynamic Mathematics Environment with Duval's approach, to enable the correlation between the different representation records of ellipsoids. The analysis carried out showed that the proposal meets the necessary conditions for the correlation between these representation records.

Keywords*: Quadric Surfaces; Semiotic Representation Registers; GeoGebra Dynamic Mathematics Environment; Objetos-de-pensar-com.*

1. Introdução

Esse artigo tem por objetivo apresentar a análise teórica de uma abordagem informática para discriminação dos possíveis casos de elipsoides, associada a escolhas pedagógicas baseadas na hipótese de aprendizagem de Duval. Como parte de uma pesquisa de doutorado, que investiga o

[1]. Docente no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul - IFRS Campus Canoas e Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação (PPGIE) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). E-mail: nubia.guimaraes@canoas.ifrs.edu.br. ORCID: 0000-0002-1071-4862.

[2]. Docente do Departamento de Matemática Pura e Aplicada do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (DMPA/IME/UFRGS). Docente dos Programas de Pós-Graduação em Informática na Educação (PPGIE/UFRGS) e Ensino de Matemática (PPGEMAT/UFRGS). E-mail: marcia.notare@ufrgs.br. ORCID: 0000-0002-2897-8348.

processo de ensino e aprendizagem dessas superfícies, este estudo teve várias motivações. Uma delas refere-se à necessidade de enfrentamento dos obstáculos de aprendizagem comuns na prática docente em matemática.

A Geometria Analítica apresentou-se como um desafio pedagógico em diversas oportunidades, em especial, o conteúdo de superfícies quádricas. Englobando parte significativa dos conhecimentos neste domínio, esse conteúdo pode ter importante contribuição na formação do professor de matemática. Aliado a isso, está a questão da inserção tecnológica na prática docente, que ainda caminha a passos lentos no contexto brasileiro (MEDEIROS, 2020). Também a necessária mudança de paradigma em relação às concepções sobre o processo de ensino e aprendizagem, em especial, o apoiado pelas tecnologias (GRAVINA; SANTAROSA, 1999; GUIMARÃES et al, 2019; NOTARE; BASSO, 2018).

Com base nisso, investigando o estado do conhecimento sobre o processo de ensino e aprendizagem das superfícies quádricas, verificamos que as pesquisas apontam para um privilégio pelo uso do registro simbólico, pouca indicação do uso de software e de abordagem das quádricas a partir das cônicas. E, quando as propostas de ensino utilizam as seções planas das quádricas, as correlações semióticas costumam ser negligenciadas (LONDERO, 2017; SALCEDO et al, 2021; SIQUEIRA, 2018; SILVA, 2018).

Diante da complexidade epistemológica, cognitiva e didática que envolve a aprendizagem das quádricas, estudos sugerem estratégias de ensino que promovam maior engajamento dos estudantes; mesclar atividades com as mídias “lápis e papel” e software; uso de um procedimento informático em sintonia com a abordagem de Duval para correlacionar registros simbólicos e gráficos; uso das seções planas dessas superfícies e do GeoGebra para exploração dos aspectos visuais (LONDERO, 2017; SILVA, 2018; ALVEZ et al, 2019).

Apoiando-se nos conhecimentos já construídos e, como recorte de uma pesquisa que aprofunda a investigação sobre o processo de ensino e aprendizagem das quádricas, o presente artigo traz uma proposta para viabilizar a correlação entre os registros simbólicos, gráficos e em língua natural dos elipsoides.

Combinando o uso do Ambiente de Matemática Dinâmica do GeoGebra com uma abordagem elaborada por Duval, são propostas atividades concebendo a tecnologia como estruturadora do pensamento (MEDEIROS, 2020; NOTARE; BASSO, 2016; GRAVINA; SANTAROSA, 1999; GUIMARÃES et al, 2020).

2. Hipótese Fundamental de Aprendizagem

Segundo Duval, os problemas de compreensão em matemática estão relacionados ao caráter semiótico da atividade nessa área do conhecimento (DUVAL, 2003). Isso decorre do fato de que um objeto matemático não possui existência física, sendo necessário o uso de representações semióticas para acessá-lo e operar sobre ele. No exemplo deste estudo, o objeto cognitivo elipsoide pode ser representado por uma equação (representação simbólica) ou gráfico (representação gráfica).

A denominação dada a esse objeto matemático (elipsoide) é a sua representação em língua natural que, nesse caso, será dita geral. Uma representação em língua natural será considerada específica quando incluir termos que determinam a posição da superfície em relação ao sistema cartesiano ortogonal. Cada representação semiótica apresenta propriedades parciais do objeto representado e pertence a um registro de representação que possui regras próprias de funcionamento.

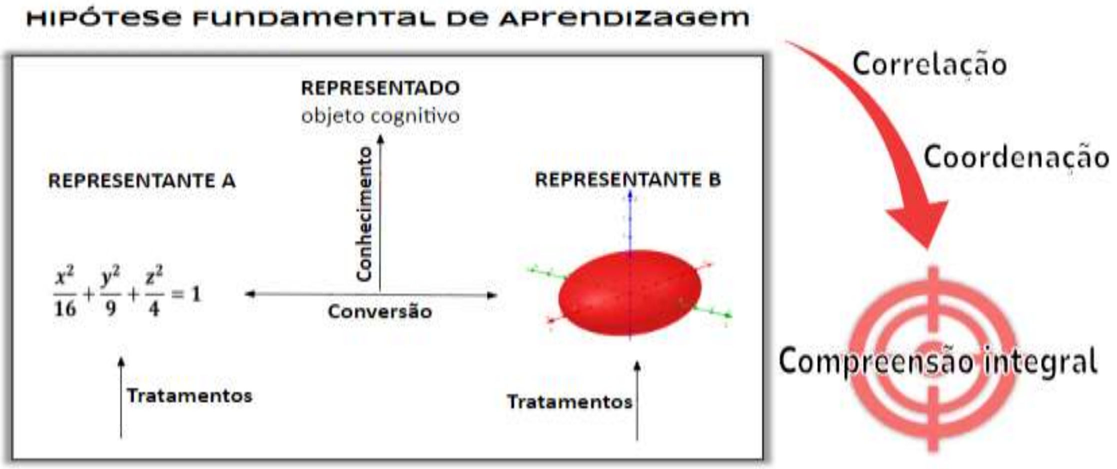
As operações sobre os registros de representação são classificadas em transformações internas (tratamentos) e externas (conversões). Os tratamentos são transformações dentro de um mesmo registro, como passar uma equação da forma implícita para a explícita. As conversões consistem na passagem da representação semiótica em um registro de representação para o outro, como por exemplo, a passagem da equação do elipsoide para o seu gráfico, ou vice-versa.

Aplicando um teste a estudantes franceses após o ensino de funções, Duval constatou que é na conversão entre registros de representação, que exige regras de correspondência semiótica, onde ocorrem os principais obstáculos à compreensão em matemática (DUVAL, 2011). Para avaliar a compreensão em matemática, Duval utilizou o reconhecimento como critério cognitivo, uma vez que compreender em matemática é, primeiramente, reconhecer os objetos matemáticos representados (DUVAL, 2012a). E, para Duval, uma atividade que envolva a conversão entre representações é o tipo de tarefa que permite estudar o reconhecimento dos objetos representados.

Tendo sido utilizado nas décadas de 80 e 90, esse critério cognitivo tornou-se a base para a Hipótese Fundamental de Aprendizagem de Duval, segundo a qual, para a compreensão integral de um conteúdo conceitual é necessária a coordenação de ao menos dois registros de representação. E esta coordenação consiste na rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão (DUVAL, 2012b).

Na Figura 1, apresentamos uma adaptação do esquema proposto por Duval para explicar como estrutura-se o funcionamento cognitivo do pensamento matemático.

Figura 1 - Modelo cognitivo de funcionamento do pensamento matemático de Duval.



Fonte: Autores (2023).

Neste esquema, o acesso ao objeto cognitivo "elipsoide" (representado) ocorre por meio de suas representações: simbólica (representação A) e gráfica (representação B). Além do reconhecimento do elipsoide em cada um desses registros de representação, é necessário saber operar no interior de cada registro de representação (tratamento) e transitar de um registro para o outro (conversão).

E, para a compreensão integral de um objeto matemático, torna-se necessária a coordenação entre ao menos dois registros. Essa coordenação ou trânsito espontâneo entre os registros, por sua vez, exige o estabelecimento da correlação entre as suas respectivas unidades significantes.

No modelo cognitivo proposto por Duval é possível ver que a apreensão conceitual (conceitualização) de um objeto matemático (conceito) depende da apreensão ou produção de representações semióticas. E, mais que isso, a conceitualização implica coordenação de registros de representação (DUVAL, 2012b) ou, segundo D'Amore, a conceitualização começa somente quando se coloca em ação a coordenação de dois registros de representação (MAGGIO, 2018).

Esse processo, que não é espontâneo no aprendiz, exige abordagem que oportunize tal coordenação. A Abordagem de Interpretação Global das Propriedades Figurais proposta por Duval, consiste na discriminação e correspondência entre as unidades significantes em cada registro. Permitindo que se identifique o que é visualmente diferente de modo significativo, essas unidades significantes favorecem a correlação entre os registros e o consequente trânsito entre estes (conversão), até a naturalização dessas conversões (coordenação).

No caso de representações pertencentes a registros simbólicos e gráficos, Duval constatou que a conversão de uma representação gráfica para simbólica não costuma ser tão facilmente realizada, como no caso contrário (DUVAL, 2009). Essas dificuldades aparecem inclusive em casos mais simples, como o da função linear, e mesmo após o seu ensino (MORETTI, 2003). As correlações geralmente utilizadas, abordagens ponto a ponto ou de extensão do traçado, não carregam as condições necessárias para superar essas dificuldades (DUVAL; MORETTI, 2011).

Vários autores têm investigado formas de abordar os conhecimentos matemáticos em sintonia com a abordagem de Duval (DUVAL; MORETTI, 2011; MORETTI, 2003; SILVA, 2018). A seção a seguir apresenta uma análise teórica das unidades significantes simbólicas e gráficas, estas últimas também conhecidas por variáveis visuais, para o caso do elipsoide.

3. Correlações entre registros simbólicos e gráficos dos elipsoides

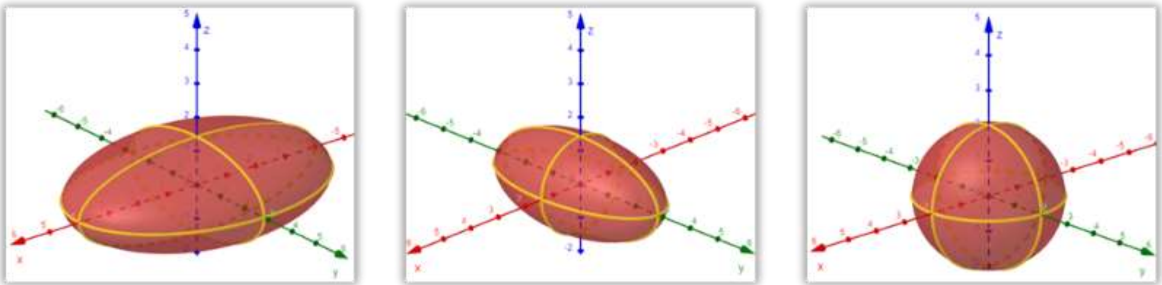
Nessa seção, será apresentada uma análise teórica das unidades significantes simbólicas e gráficas, que possibilita a distinção entre os tipos de elipsoides nos diferentes registros, a correlação entre esses registros e a constituição das representações em língua natural.

O procedimento inicia-se com a discriminação das unidades significantes gráficas a partir da identificação do que é visualmente diferente. Essa discriminação das unidades significantes pode ser obtida por meio da combinação dos valores de três variáveis visuais do elipsoide: “comprimento dos eixos”, “posição dos eixos em relação aos eixos coordenados” e “comprimento do eixo de medida diferente” (SILVA, 2018).

O elipsoide com centro na origem tem representação simbólica $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, com $a, b, c \in IR$ e não nulos. As unidades significantes simbólicas gerais, que diferenciam essa quádrica das demais, podem ser identificadas a partir da composição dos membros da equação. Um lado da equação consiste na soma de três termos quadráticos e de coeficientes positivos e, o outro, na constante unitária positiva.

As intersecções dessa superfície com os planos coordenados são três elipses, com eixos dois a dois comuns, que consistem nos três eixos do elipsoide (Figura 2).

Figura 2 - Valores da variável visual “comprimento dos eixos”.



(a) elipsoide em x e y **(b) esferoide alongado em y** **(c) esfera de raio 2**

Fonte: Autores (2023).

A variável visual “comprimento dos eixos” do elipsoide pode assumir três valores: três eixos com medidas diferentes, dois eixos com medidas iguais e três eixos com medidas iguais. As representações em língua natural específicas para esses três casos serão definidas, respectivamente, como: elipsoide em α e β, esferoide alongado (ou achatado) em α e esfera de raio r, onde α e β correspondem aos eixos coordenados (eixo x, y ou z) sobre os quais encontram-se os maiores eixos do elipsoide.

No caso dos elipsoides em α e β, a variável visual “posição dos eixos em relação aos eixos coordenados” pode assumir seis valores visuais. Se o eixo maior estiver sobre o eixo das abscissas, há duas possibilidades para a posição dos demais eixos: médio sobre o eixo das ordenadas e menor sobre o eixo das cotas (elipsoide em x e y) ou médio sobre o eixo das cotas e menor sobre o eixo das ordenadas (elipsoide em x e z).

De forma análoga, há mais quatro possibilidades, duas para o caso do eixo maior sobre o eixo das ordenadas (elipsoide em y e x, para o caso em que o eixo médio esteja sobre o eixo das abscissas; ou elipsoide em y e z, para o caso em que o eixo médio esteja sobre o eixo das cotas) e duas para o caso do eixo maior sobre o eixo das cotas (elipsoide em z e x, para o caso em que o eixo médio esteja sobre o eixo das abscissas; ou elipsoide em z e y, para o caso em que o eixo médio esteja sobre o eixo das cotas).

Por exemplo, a Figura 2a apresenta o caso em que o elipsoide tem eixo maior, médio e menor, respectivamente, sobre o eixo das abcissas, das ordenadas e das cotas. Assim, sua representação em língua natural específica fica “elipsoide em x e y”. As unidades significantes simbólicas específicas podem ser identificadas a partir dos denominadores dos termos quadráticos das suas equações. No caso deste exemplo, o maior denominador é o de x^2, o médio é o de y^2 e o menor é o de z^2, coincidindo com os eixos maior, médio e menor do elipsoide.

No caso dos esferoides, a variável visual “comprimento do eixo de medida diferente” tem dois valores visuais: o esferoide alongado em α, se a medida diferente for maior que as outras duas; e esferoide achatado em α, se a medida diferente for menor que as outras duas. Alongado (ou achatado) em α significa dizer que o eixo maior (ou menor) está sobre o eixo α, onde α é um dos eixos coordenados (eixo x, y ou z), o que resulta em um total de seis casos.

No exemplo da Figura 2b, o eixo de medida diferente do esferoide está sobre o eixo y e a medida deste eixo é maior do que a medida dos demais. Assim, a representação em língua natural específica para essa quádrica fica “esferoide alongado em y”. No caso dos esferoides, as unidades significantes simbólicas específicas referem-se à existência de dois denominadores iguais nos termos quadráticos das equações e ao fato do denominador diferente ser maior ou menor do que os demais. Nesse exemplo, os denominadores de x^2 e z^2 são iguais e o denominador de y^2 é maior do que os demais.

Por fim, no caso em que os três eixos do elipsoide têm medidas iguais, temos uma superfície esférica de raio 2 (Figura 2c). Dessa forma, obtemos treze possibilidades para o elipsoide: seis para o caso dos elipsoides com três eixos de medidas diferentes (elipsoide em α e β), seis para o caso em que dois eixos têm medidas iguais (esferoide alongado ou achatado em α) e um para o caso de três eixos com medidas iguais (esfera de raio r).

Nessa seção, foi possível perceber que a aprendizagem em matemática envolve um processo semiótico que inclui identificações, delimitações e regras de articulações entre registros. Como isso nem sempre é uma tarefa fácil, em especial no caso de superfícies, a seguir discutiremos uma forma de viabilizar a correlação entre registros com o apoio do Ambiente de Matemática Dinâmica do GeoGebra.

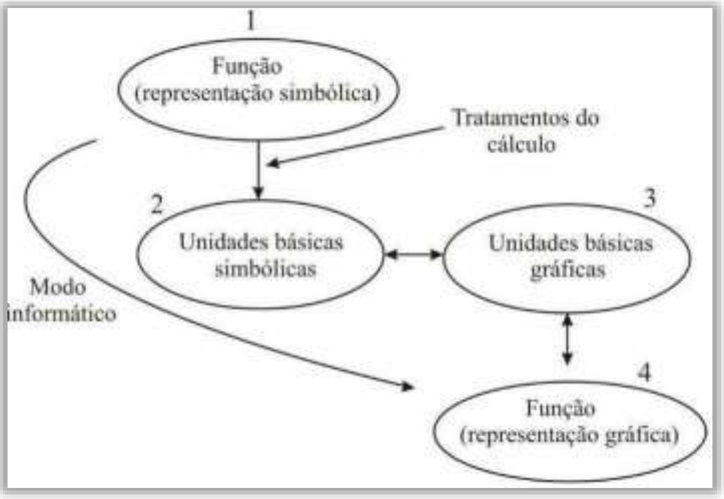
4. O GeoGebra na correlação entre os registros simbólicos e gráficos

O trânsito entre os registros simbólicos e gráficos proposto para o caso das retas (DUVAL; MORETTI, 2011) e das parábolas (MORETTI, 2003), exige um procedimento que inclua um software para objetos matemáticos mais complexos. O denominado Procedimento Informático de Interpretação Global, em sintonia com a abordagem proposta por Duval, permite a correlação entre as unidades significantes simbólicas e gráficas (MORETTI; LUIZ, 2010). O caminho informático para as conversões entre esses registros pode ser observado no esquema da Figura 3.

Para a correspondência entre as representações simbólicas (1) e gráficas (4), a conversão no sentido de (1) para (4) pode ser realizada por meio do uso de um software. E a volta, sentido de (4) para (1), pode ser obtida a partir das unidades significantes gráficas (3) e suas respectivas unidades significantes simbólicas (2). Este último caminho, consistindo em tratamentos em (1) para obter (2) e em (4) para obter (3) e correspondência entre as unidades significantes simbólicas (2) e gráficas (3) (MORETTI; LUIZ, 2010).

O GeoGebra é o software utilizado para a realização desse procedimento informático neste estudo, que é um recorte de uma pesquisa de doutorado que investiga o processo de ensino e aprendizagem das superfícies quádricas. O acesso às quádricas nessa pesquisa ocorre a partir de representações semióticas obtidas de diferentes recursos, que podem ser classificados em bi ou tridimensionais e em estáticos ou dinâmicos. O termo “dinâmico” opõe-se ao “estático” pela possibilidade de movimento.

Figura 3 - Procedimento Informático de Interpretação Global



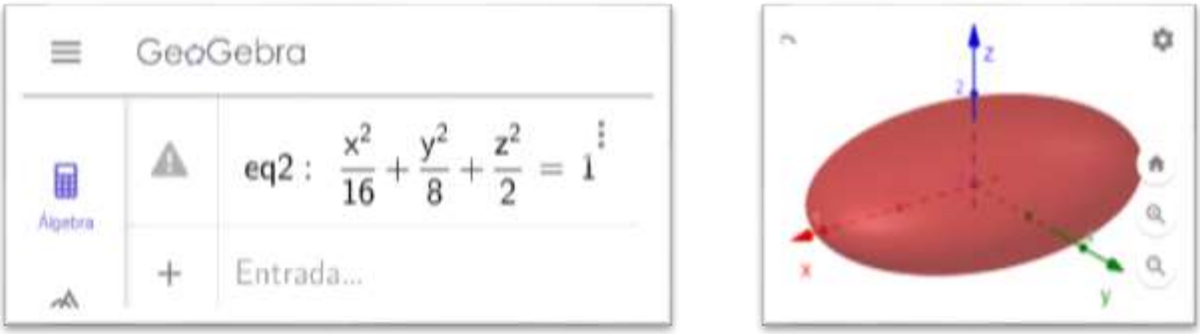
Fonte: Autores (2023).

O acesso a um objeto matemático tridimensional pode ser obtido por meio de um desenho no papel ou no quadro (representação 2D-estática), de um modelo produzido com a impressão 3D (representação 3D-estática) ou de um gráfico obtido na janela de visualização 3D (representação 2D-dinâmica), através de imagens anáglifas ou com Realidade Aumentada (representações 3D-dinâmicas).

Todas essas representações podem ser obtidas por meio do GeoGebra e, as suas potencialidades e limitações em revelar as propriedades do objeto matemático, consistem em objeto de análise da pesquisa de doutorado. No presente recorte dessa pesquisa, o acesso e a manipulação das representações gráficas do elipsoide será realizada por meio das representações semióticas oriundas do Ambiente de Matemática Dinâmica do GeoGebra.

Através de suas janelas de álgebra e de visualização, essa tecnologia permite o acesso e a manipulação das representações gráficas e simbólicas de objetos matemáticos bi ou tridimensionais (Figura 4).

Figura 4 - Representações simbólica e gráfica do elipsoide.



Fonte: Autores (2023).

A possibilidade de obter uma representação manipulável de um objeto matemático dá lugar a novas formas de pensar e fazer matemática (NOTARE; BASSO, 2016). Na Matemática apoiada no uso de software, diferente da baseada em lápis e papel, há uma moldagem recíproca entre pensamento e tecnologia (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2014). Esses autores destacam que a produção de conhecimento é condicionada pela tecnologia utilizada, que não é neutra, influenciando o pensamento matemático.

A expressão “matemática dinâmica” surge das novas possibilidades de “pensar-com tecnologias” que esses sistemas proporcionam à atividade matemática (BASSO; NOTARE, 2015). A movimentação oferecida pelo Ambiente de Matemática Dinâmica do GeoGebra possibilita o confronto entre a imagem mental do sujeito e a imagem oferecida pelo software (MEDEIROS; BASSO, 2020). A mediação proporcionada por essa tecnologia permite que os alunos testem e validem ou refutem suas hipóteses, (re)construindo seus conhecimentos.

Estudos que se dedicaram à análise do papel dos recursos digitais de matemática dinâmica na construção de conceitos, constataram que as representações de um objeto matemático obtidas por meio das tecnologias consistem em “objetos-de-pensar-com” (BASSO; NOTARE, 2015). Assim, na construção de uma situação-problema, a tecnologia precisa ser um instrumento necessário para a mobilização do pensamento matemático (BASSO; NOTARE, 2015).

É nesse sentido que as ferramentas se situam nesse estudo, não apenas como uma forma de acesso ao objeto de estudo, mas como estruturadora do pensamento matemático (MEDEIROS, 2020). E, com base nessa concepção, a seção seguinte propõe estratégias pedagógicas envolvendo registros de representação gráfico, simbólico e em língua natural dos elipsoides, visando conduzir o participante ao trânsito espontâneo entre eles.

5. Estratégias pedagógicas para a coordenação entre registros de representação dos elipsoides

As tecnologias digitais abrem novas possibilidades para o pensamento matemático, a partir de situações com potencial para levar o aluno à compreensão dos conceitos envolvidos (BASSO; NOTARE, 2015; MEDEIROS; BASSO, 2020). Para isso, os métodos de ensino não podem privilegiar a simples transmissão de conteúdo, medindo o sucesso pela capacidade de reproduzi-lo, sem evidências de compreensão (GRAVINA; SANTAROSA, 1999).

A concepção de uma situação de ensino e aprendizagem com essa abordagem deve ter como princípio a construção do conhecimento a partir das ações do sujeito, mediadas por suas estruturas mentais já constituídas e/ou que vão sendo construídas durante o processo. A aprendizagem nesta perspectiva depende de ações que caracterizam o 'fazer matemática': experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e, enfim, demonstrar (GRAVINA; SANTAROSA, 1999). Diferente do papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento, baseada essencialmente na transmissão ordenada de fatos, isso exige uma postura ativa do aluno.

Os recursos digitais dão acesso a numerosas representações, acrescentando novas relações entre a ação e o pensamento (NOTARE; BASSO, 2012, 2016, 2018; BASSO; NOTARE, 2015; GRAVINA; SANTAROSA, 1999). Essas representações possibilitam não apenas o acesso ao objeto matemático, mas também ações que desencadeiem a construção do conhecimento. São as ações, inicialmente sobre objetos concretos, que se generalizam em esquemas, e num estágio mais avançado, são as ações sobre objetos abstratos que se generalizam em conceitos e teoremas (GRAVINA; SANTAROSA, 1999).

Na perspectiva de Duval, no início do ensino de um novo conteúdo, é necessária uma aprendizagem centrada na conversão de representações (DUVAL, 2009). Com base nisso, nessa seção apresentaremos uma proposta que, em ambiente informático, pode oportunizar a correlação entre os registros gráficos e simbólicos dos elipsoides e possibilitar a constituição das representações em língua natural específicas dessas superfícies.

As subseções a seguir apresentam as três atividades propostas, cada uma explorando um dos valores visuais da variável “comprimento dos eixos” do elipsoide.

5.1. Elipsoides com três eixos de medidas diferentes

Para o valor visual “três eixos com medidas diferentes” da variável “comprimento dos eixos”, há seis valores visuais obtidos da combinação com a variável visual “posição dos eixos em relação aos eixos coordenados”. A primeira atividade apresentará uma estratégia pedagógica para possibilitar a descoberta pelo próprio aluno dos seis casos de elipsoides e a correlação entre seus registros simbólicos e gráficos, com constituição dos registros em língua natural (Quadro 1).

Quadro 1 – Estratégia pedagógica para identificar e correlacionar registros simbólicos, gráficos e em língua natural dos seis casos de elipsoides com três eixos de medidas diferentes.

No Ambiente de Matemática Dinâmica do GeoGebra 3D, insira as equações dos elipsoides abaixo para responder as questões a seguir: $$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{4}=1 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{2}=1$$ a) Qual a diferença visual entre eles? b) Qual a relação entre essas diferenças gráficas e as suas respectivas equações? c) Existem outra(s) possibilidade(s) para a equação do elipsoide? Se sim, quantas e quais? d) Obtenha os gráficos de todos os casos. e) Como podemos denominar os diferentes casos de elipsoides de forma que seja possível diferenciá-los?

Fonte: Autores (2023)

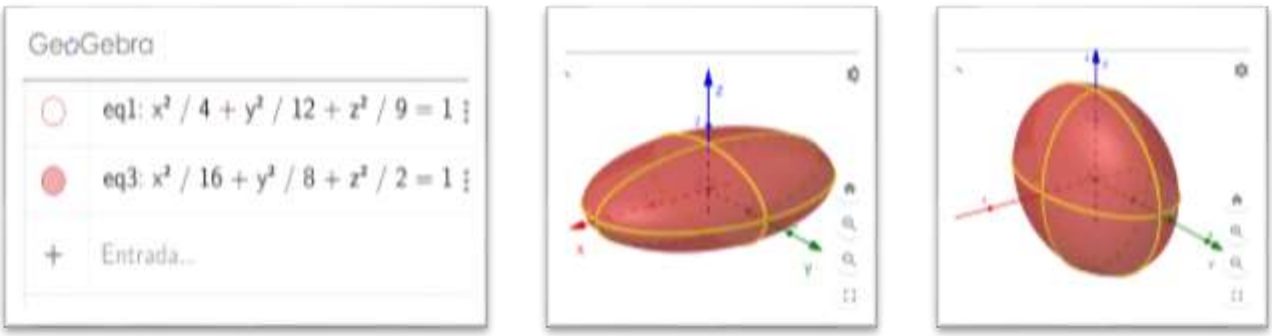
Para isso, são dados os registros simbólicos de dois dos seis casos de elipsoides:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{9}=1\ (1) \qquad\qquad \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{2}=1\ (2)$$

sendo solicitada a identificação das diferenças visuais entre eles, por meio do acesso, da manipulação e da observação das seções planas de suas representações gráficas, obtidas pelas intersecções com planos coordenados.

Inserindo as equações na janela de álgebra do GeoGebra e, observando as correspondentes representações gráficas, é possível constatar que ambos elipsoides têm três eixos de medidas diferentes. Porém, os eixos maiores, médios e menores em cada elipsoide posicionam-se de maneiras distintas em relação aos eixos coordenados (Figura 5).

Figura 5 - Representações simbólicas e gráficas dos elipsoides (1) e (2).



(a) (b) (c)

Fonte: Autores (2023).

No caso do elipsoide de equação (1), os eixos maior, médio e menor ficam sobre os eixos das ordenadas, cotas e abcissas, respectivamente (Figura 5b). Já o elipsoide de equação (2) tem eixos maior, médio e menor, respectivamente, sobre os eixos das abcissas, ordenadas e cotas (Figura 5c). O GeoGebra possibilita a comparação entre esses aspectos visuais com as respectivas características simbólicas (Figura 5a).

Assim, é possível verificar a relação entre os valores das medidas dos semieixos na representação gráfica e os denominadores das variáveis quadráticas na representação simbólica da superfície. Os segundos correspondem aos quadrados dos primeiros, respeitando-se as posições dos eixos dos elipsoides em relação aos eixos coordenados. Como os três denominadores das variáveis quadráticas são diferentes, esses elipsoides têm representações em língua natural: (1) elipsoide em y e z e (2) elipsoide em x e y. Isso porque no primeiro caso os eixos maior e médio do elipsoide estão sobre os eixos coordenados y e z e, no segundo, sobre x e y.

A seguir, essa atividade convida a pensar sobre a existência de outros casos de elipsoides em α e β e, na sequência, estabelecer as demais correlações entre as unidades significantes simbólicas e gráficas. Por fim, sendo proposta uma forma de designar os elipsoides de maneira única, são constituídas as representações em língua natural para cada um dos seis casos.

Desse modo, ficam identificados os seis casos de elipsoides com os três eixos de medidas diferentes e correlacionadas as representações gráficas, simbólicas e em língua natural.

5.2. Elipsoides com dois eixos de medidas iguais

Na segunda atividade, são tratados os casos oriundos do valor visual “dois eixos com medidas iguais”, casos em que se tem um elipsoide de revolução ou esferoide (Quadro 2). Um esferoide é uma forma geométrica que pode ser obtida pela rotação de uma elipse em torno de um de seus eixos.

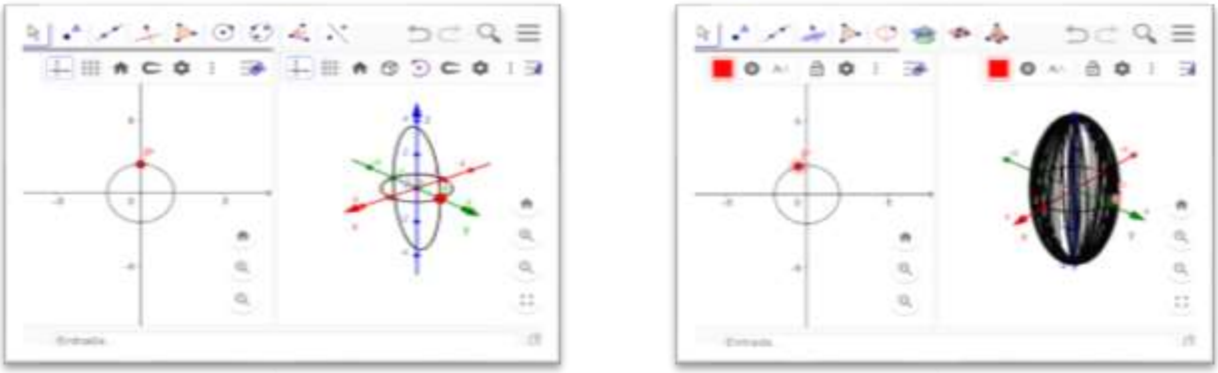
Quadro 2 – Estratégia pedagógica para identificar e correlacionar os registros simbólicos, gráficos e em língua natural dos seis casos de elipsoides com dois eixos de medidas iguais.

Um esferoide ou elipsoide de revolução é uma superfície quádrica obtida através da rotação de uma elipse ao redor de um de seus eixos principais. Para responder as questões a seguir, abra o arquivo do GeoGebra denominado ‘RS, RG e RLN dos esferoides’. Mova o ponto P e observe o esferoide obtido a partir do giro da elipse apoiada na circunferência. a) Quais as características visuais do esferoide? b) Qual a relação entre as suas características visuais e a sua equação? c) Existem outros casos possíveis para os esferoides? Se sim, quantos e quais? d) Obtenha os gráficos de todos os casos, a partir das suas equações. e) Como podemos denominar os diferentes casos de esferoides de forma que seja possível diferenciá-los?

Fonte: Autores (2023)

O problema inicia com a identificação das características visuais do esferoide por meio das seções planas, que podem ser obtidas por cortes dessas superfícies com os planos coordenados. Para isso, um arquivo do GeoGebra apresenta um ponto móvel sobre uma circunferência na janela de visualização 2D e uma elipse apoiada nessa circunferência na janela de visualização 3D (Figura 6). Com a função rastro habilitada, ao mover o ponto P sobre a circunferência na janela de visualização 2D (Figura 6a), obtém-se o esferoide na janela de visualização 3D (Figura 6b).

Figura 6 – Arquivo no GeoGebra denominado “RS, RG e RLN dos esferoides”.



(a) **(b)**

Fonte: Autores (2023).

No primeiro momento, é proposta a diferenciação entre esferoides e elipsoides, a partir da observação da representação gráfica obtida na janela de visualização 3D do GeoGebra. Observando as características visuais do esferoide, por meio dos cortes por planos coordenados dessa superfície, o aluno pode constatar que dois dos seus eixos têm medidas iguais.

A partir dos valores visuais identificados, a correlação entre os registros gráficos e simbólicos é proposta por meio da obtenção de um exemplo de registro simbólico que represente esse esferoide. Ao inserir equações na janela de álgebra, o aluno pode confirmar ou refutar suas conjecturas, apoiado na mediação oferecida pelo software. A seguir, partindo da relação estabelecida entre as características visuais e simbólicas, é proposta uma generalização com a representação simbólica de um esferoide qualquer.

Na sequência, é solicitado que se identifiquem os demais casos de esferoide, considerando as possíveis posições em relação aos eixos coordenados e o tamanho do eixo de medida diferente em relação aos demais. Inserindo as representações simbólicas em novo arquivo do GeoGebra e visualizando as correspondentes representações gráficas, o estudante pode explorar as possíveis posições do esferoide. Confirmando ou refutando suas conjecturas, ele pode constatar que além dos três casos em que o eixo de medida diferente é maior do que os outros dois, há mais três casos com este eixo menor do que os demais.

Após a diferenciação entre os seis casos de esferoides, é proposta uma discussão para constituir as representações em língua natural, quando o aluno pode ser conduzido a pensar em como denominar essas superfícies de modo que seja possível diferenciá-las. No caso do esferoide proposto nessa atividade, o eixo de medida diferente é maior do que os demais e está sobre o eixo dos z, portanto a representação em língua natural será dita “esferoide alongado em z”.

Assim, ficam identificados os seis casos de elipsoides com dois eixos de medidas iguais e correlacionados os registros gráficos, simbólicos e em língua natural.

5.3. Elipsoides com três eixos de medidas iguais

Na última atividade, é tratado o caso oriundo do valor visual “três eixos com medidas iguais”, caso em que se tem uma esfera (Quadro 3).

Quadro 3 – Estratégia pedagógica para identificar e correlacionar os registros simbólicos, gráficos e em língua natural dos elipsoides com os três eixos de medidas iguais.

Superfície de revolução é a superfície gerada pela rotação ou revolução de uma curva em torno de uma reta. a) Que superfície de revolução é obtida pela rotação de uma circunferência? Obter no GeoGebra. b) Quais as características visuais dessa superfície? c) Qual a relação entre essas características visuais e a sua equação? d) Como podemos denominar essa superfície?

Fonte: Autores (2023)

O problema é proposto indagando que superfície de revolução é obtida pela rotação de uma circunferência. Uma superfície de revolução é a superfície obtida pelo giro de uma curva em torno de uma reta. Diferente da atividade de exploração proposta para os esferoides, aqui o aluno é convidado a obter a representação gráfica da esfera, a partir da rotação de uma circunferência em torno de um dos eixos coordenados.

Dessa forma, a atividade requer exigências cognitivas maiores, aprofundando a construção do conhecimento do estudante. Além de verificar a sua resposta à primeira questão desta atividade, o aluno pode constatar que a diferença em relação aos demais casos de elipsoides é que todos os eixos têm medidas iguais. Assim, a observação das seções planas obtidas por cortes dessas superfícies com os planos coordenados possibilita a verificação de que se trata do caso único de uma “esfera de raio r”, representação em língua natural que pode ser constituída nessa oportunidade.

Para correlacionar os registros simbólicos e gráficos, o aluno pode inserir equações de elipsoides com os três denominadores de medidas iguais em novo arquivo do GeoGebra, visualizando as correspondentes representações gráficas. Explorando essas possibilidades por meio do software, ele pode confirmar que a esfera de raio r é o único caso para o valor visual “três eixos de medidas iguais”.

Além disso, convidando o aluno a pensar sobre a relação entre as características visuais dessa superfície e a sua representação simbólica, é possível conduzi-lo à percepção de que os valores dos denominadores das três variáveis quadráticas são iguais e referem-se ao raio da esfera. Por fim, é proposta uma generalização ao obter a representação simbólica de uma esfera qualquer, o que confirma e complementa as constatações obtidas pelo aluno.

Assim, com as três atividades propostas nessa seção, é possível identificar os treze casos para os elipsoides e correlacionar seus registros gráficos, simbólicos e em língua natural. É importante observar que o relevante papel do GeoGebra é indissociável de estratégias pedagógicas que promovam o pensamento matemático por meio das tecnologias.

6. Considerações finais

A conversão das representações semióticas constitui atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos. Assim, a mudança de registro é uma variável fundamental em didática, uma vez que ou ela facilita a aprendizagem ou oferece procedimentos de interpretação (DUVAL, 2009).

Com base nisso, a situação de ensino e aprendizagem proposta através das três atividades na seção anterior, envolveu o acesso ao objeto matemático por meio de representações simbólicas, gráficas e em língua natural e a correlação entre esses registros. A atividade cognitiva de conversão permeou todas as atividades propostas, sendo possibilitada pelo Ambiente de Matemática Dinâmica do GeoGebra, que permitiu o acesso e a manipulação das representações semióticas.

No entanto, com a simples inserção de uma equação na janela de álgebra não há garantia de ganho cognitivo. O potencial do GeoGebra precisa estar aliado a estratégias pedagógicas que possibilitem estabelecer relações entre as diferentes representações. E, seguindo cuidadosamente a Hipótese Fundamental de Aprendizagem de Duval, a situação de ensino e aprendizagem proposta busca atender as condições necessárias para a correlação entre esses registros de representação.

Para promover o engajamento em atividades que envolvam a experiência, a dedução e a autonomia por meio do fazer para compreender, a abordagem pedagógica proposta coloca o aluno como protagonista no processo de construção do seu conhecimento. Com exigências progressivas, as atividades envolvem a exploração, a construção e a criação, esta última considerada um nível mais avançado de compreensão na teoria piagetiana.

As atividades propostas para o uso do GeoGebra possibilitam que os alunos realizem ações inerentes ao fazer matemática, experimentando, interpretando, conjecturando, generalizando etc. E a mediação oferecida pelo software permite que o aluno teste suas conjecturas, validando ou refutando suas hipóteses, desenvolvendo habilidades que permitam continuar aprendendo de forma cada vez mais autônoma.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul - IFRS Campus Canoas e do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação (PPGIE) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

Recebido em: 13/01/2023
Aprovado em: 27/05/2024

Referências

ALVES, Adriana Mota et al. Atividades Investigativas com Apoio de Tecnologias Digitais: Contribuições para o estudo de Quádricas. **XIII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática**, Cuiabá - MT, 2019.

BASSO, Marcos Vinícius de Azevedo; NOTARE, Márcia Rodrigues. Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. **RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 13, n. 2, 2015.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R.; GADANIDIS, G. **Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: Sala de aula e internet em movimento**. Belo Horizonte, Autêntica. 1ª ed., 2014.

D'AMORE, Bruno. A especificidade da Matemática e da Didática da Matemática. In: BARUFI, Maria Cristina Bonomi. **Epistemologia e Didática da Matemática**. São Paulo - SP: Escrituras, 2005, p. 45–66.

DUVAL, Raymond. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas - SP: Papirus, 2003, p.11–33.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. São Paulo – SP, Livraria da Física. 1ª ed., 2009.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: Entrar no modo matemático de pensar - os registros de representação semiótica**. São Paulo, PROEM. 1ª ed., 2011.

DUVAL, Raymond. Quais teorias e métodos para a pesquisa sobreo ensino da matemática? **Práxis Educativa**, v. 7, n. 2, 2012a.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, v. 7, n. 2, 2012b.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, v. 6, n. 2, 2011.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria Costi. A aprendizagem Da Matemática Em Ambinetes Informatizados. **Informática na educação: teoria & prática**, v. 2, n. 1, 1999.

GUIMARÃES, Núbia; HASLINGER, Evelin; NOTARE, Márcia Rodrigues; SILVA, Patrícia Fernanda da; BASSO, Marcus Vinícius de Azevedo. Scratch e o Pensamento Computacional no Ensino da Matemática. In: **ANAIS DO XXVIII CICLO DE PALESTRAS SOBRE NOVAS TECNOLOGIAS NA EDUCAÇÃO**. Porto Alegre - RS: CINTED, 2020, p. 139–148.

GUIMARÃES, Núbia; BEHAR, Patricia Alejandra; NOTARE, Marcia. Competências docentes em matemática por meio do ensino híbrido: um olhar para a recomendação pedagógica. In: **ANAIS DOS WORKSHOPS DO CONGRESSO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO**. Brasília - DF: Sociedade Brasileira de Computacao - SB, 2019, p. 1487–1491.

LONDERO, Nandyne. **Explorando Recursos do GeoGebra Book no estudo de quádricas a partir de diferentes representações**. 83 f. Dissertação - Universidade Federal de Santa Maria. Santa Maria - RS, 2017.

MAGGIO, Deise Pedroso. **Entrecruzamento teórico-metodológico entre registros de representação e teoria da objetivação**. 127 f. Dissertação - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul. Ijuí - RS, 2018.

MEDEIROS, Margarete Farias. **Geometria dinâmica e gênese instrumental: Processo de Abstração Reflexionante**. 358 f. Tese - Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Porto Alegre - RS, 2020.

MEDEIROS, Margarete Farias; BASSO, Marcus. A tecnologia digital como estruturadora do pensamento geométrico. **Educação Matemática Pesquisa (EMP): Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 22, n. 1, 2020.

MORETTI, Méricles Thadeu. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: MACHADO, Sílvia Dias Alcântara. **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas - SP: Papirus, 2003, p. 149–160.

MORETTI, Mericles Thadeu; LUIZ, Learcino dos Santos. O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas no ensino universitário. **Educação Matemática Pesquisa (EMP): Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 12, n. 3, 2010.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Tecnologia na Educação Matemática: Trilhando o Caminho do Fazer ao Compreender. **Renote - Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 10, n. 3, 2012.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BASSO, Marcus Vinícius de Azevedo. Geometria Dinâmica 3D – novas perspectivas para o pensamento espacial. **Renote - Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 14, n. 2, 2016.

NOTARE, Márcia Rodrigues; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Argumentação e Prova Matemática com Geometria Dinâmica. **Renote - Revista Novas Tecnologias na Educação**, v. 16, n. 1, 2018.

SALCEDO, Efraín Alberto Hoyos et al. Influencia de un software educativo en la consolidación del aprendizaje de superficies cuádricas. **Tecné, Episteme y Didaxis: TED**, v. 49, n.1, 2021.

SILVA, Sérgio Florentino da. **Ensino e aprendizagem de superfícies quádricas no ensino superior: uma análise baseada na teoria dos registros de representações semióticas com o uso do geogebra**. 555 f. Tese - Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis - SC, 2018.

SIQUEIRA, Anderson Gonçalves. **Das cônicas aos cilindros e quádricas: a transição do plano para o espaço tridimensional.** 202 f. Dissertação - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2018.