DOI: https://doi.org/10.23925/2358-4122.63396

Apreensões operatórias mobilizadas na produção do Frac-Soma: um estudo no 7º ano do Ensino Fundamental[1]

Operative apprehensions mobilized in the production of Frac-Soma: a study in the 7th year of Elementary School

Claudia Aparecida Winkelmann[1]
Rita de Cássia Pistóia Mariani[2]

RESUMO

Este artigo objetiva analisar implicações do Frac-Soma na aprendizagem de números racionais sob o ponto de vista de registros de representação semiótica e das interpretações parte-todo, medida e quociente. Por meio de uma abordagem qualitativa a produção de dados considera a quatro atividades dinamizadas com dez alunos do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública municipal de Sobradinho/RS, gravações em áudio e vídeo e diários de bordo da pesquisadora. Dentre os resultados, destaca-se que o Frac-Soma contribuiu para desencadear registros figurais que se associam à apreensão operatória através justaposição, sobreposição e rotação das peças, evidenciando modificações mereológicas e posicionais. O particionamento sucessivo da unidade potencializou a aquisição de conceitos relativos às noções de equivalência e revelou indícios das interpretações medida e quociente, mas a interpretação parte-todo foi majoritariamente mobilizada.

Palavras-chave: *Registro Figural; Representação Fracionária; Particionamento Sucessivo.*

ABSTRACT

This article aims to analyze implications of Frac-Soma in learning rational numbers from the point of view of semiotic representation registers and part-whole, measure and quotient interpretations. Through a qualitative approach, the production of data considers four activities carried out with ten students of the 7th year of Elementary School at a public school in Sobradinho/RS, audio and video recordings and the researcher's logbooks. Among the results, it is highlighted that the Frac-Soma contributed to trigger figural registers that are associated with the operative apprehension through juxtaposition, overlapping and rotation of the pieces, evidencing mereological and positional modifications. The successive partitioning of the unit enhanced the acquisition of concepts related to notions of equivalence and revealed evidence of measure and quotient interpretations, but the part-whole interpretation was mostly mobilized.

Keywords: *Figural Registration; Fractional Representation; Successive Partitioning.*

Introdução

[1] O presente trabalho está embasado em um dos manuscritos que compõe a dissertação da primeira autora.

O processo de aprendizagem de números racionais na representação fracionária é considerado um obstáculo considerável desde o 4º ano do Ensino Fundamental no Brasil, tanto para professores quanto para alunos (LOPES, 2008; CAMPOS, 2013; SCHEFFER; POWELL, 2021). Ao ponto que, um dos primeiros documentos orientadores do currículo escolar no país, ou seja, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, destinados ao Ensino Fundamental, já apontavam que "[...] a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas pelos alunos acerca dos números naturais, e, portanto, demanda tempo e uma abordagem adequada" (BRASIL, 1997, p. 67). Essas rupturas, por sua vez, podem promover incompreensões, sendo necessário "[...] uma organização de ensino que possibilite experiências com diferentes significados e representações o que demanda razoável espaço de tempo" (BRASIL, 1997, p. 69).

No entanto, como destaca a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a unidade temática que envolve números racionais e suas operações é a que tem recebido mais atenção nos sistemas de ensino, pois sua importância é inegável para a formação do cidadão (BRASIL, 2017). Isso porque pode auxiliar no desenvolvimento das principais noções do pensamento matemático, contribuir para estabelecer relações entre os objetos do conhecimento e tem como principal finalidade "[...] desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática" (RIO GRANDE DO SUL, 2018, p. 51).

Como os processos de ensino e aprendizagem dos números racionais são circundados por complexidades matemáticas e cognitivas (LAMON, 2007) e como esse objeto é contemplado em propostas curriculares de diferentes anos escolares ao longo do Ensino Fundamental, eles passam a ser tema de estudo a partir de distintas perspectivas como, por exemplo: significados de fração (MERLINI, 2005; MAGINA; CAMPOS, 2008, LAPA, 2013); personalidades do número racional (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008; VALLILO, 2018; IORA, 2021); interpretações de números racionais (LAMON, 2007; 2012; SOARES, 2016; SILVA; ALMOULOUD, 2018); e representações, em especial, os registros de representação semiótica desse objeto (CATTO, 2000; MARANHÃO; IGLIORI, 2003; DUVAL, 2003; 2011; 2012a; 2012b). Porém, cabe destacar que ainda há o que se investigar e dentre as questões em aberto, destaca-se a necessidade de estudos que enfatizem "[...] propostas práticas com materiais manipulativos, exploração da representação figural [...]” (SCHEFFER; POWELL, 2021, p. 27).

Diante do exposto o presente trabalho objetiva analisar implicações do Frac-Soma na aprendizagem de números racionais sob o ponto de vista de registros de representação semiótica e das interpretações parte-todo, medida e quociente. A interpretação medida associa o número racional a pontos da reta numérica, quantificando diretamente uma qualidade como comprimento ou área. Já a interpretação parte-todo indica o número racional a partir da relação entre a quantidade de partes iguais de uma unidade em relação ao número total de partes em está dividida. Por sua vez, a interpretação quociente indica o número racional como resultado de uma divisão. Ao considerar essas interpretações, torna-se inviável que a abordagem de números racionais, evidencie apenas uma delas, visto que mesmo destacando características diferentes e essenciais todas se encontram intrinsecamente ligadas.

Registros mobilizados a partir do Frac-Soma como material manipulável

Os materiais manipuláveis podem associar-se a fatores que auxiliam na aprendizagem, visto que as atividades didáticas a eles associados, geralmente, se caracterizam pelo envolvimento dos alunos por meio de uma postura ativa (LORENZATO, 2006; MURARI, 2011; RODRIGUES; GAZIRE, 2012). Frente a sua relevância e diversidade eles podem ser classificados em estáticos e dinâmicos.

Os estáticos proporcionam a observação e não permitem modificações em sua forma e estrutura - como é o caso dos sólidos geométricos - mas podem sofrer alterações por meio de estratégias realizadas pelo sujeito - por exemplo, jogos de tabuleiro. Já os dinâmicos possibilitam “[...] transformações por continuidade, facilitam ao aluno a realização de redescobertas, a percepção de propriedades e a construção de uma efetiva aprendizagem” (LORENZATO, 2006, p. 30) - como é o caso do Frac-Soma.

O Frac-Soma possui 235 peças que podem ser organizadas em dezoito tiras, das quais uma é inteira e as demais são particionadas, seguindo uma estrutura determinada pela ordem crescente da quantidade de peças presentes em cada uma delas. Sua disposição está vinculada às relações entre os múltiplos de 2, 3 e/ou 5, respectivamente entre 1 e 30 e também a relações entre as cores primárias (vermelho, azul e amarelo) e secundárias (laranja, roxo e verde), além de uma tira na cor preta e outra branca (BALDINO, 1983).

Ao considerar as cores primárias, tem-se que a quantidade de peças vermelhas, em cada tira, associam-se aos múltiplos de 2, resultando nos números racionais $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{16}$; já as tiras de cor amarela, são decorrentes de quantidades de peças múltiplas de 3, associadas aos números racionais $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ e $\frac{1}{27}$; a cor azul relaciona-se às peças oriundas de quantidades múltiplas de 5, sendo os números racionais $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{25}$. Por outro lado, por meio das combinações das cores primárias e dos respectivos múltiplos associados, temos as tiras de cor laranja com quantidades de peças múltiplas de 2 e 3, respectivos aos números racionais $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{18}$ e $\frac{1}{24}$; as tiras roxas que possuem quantidade de peças múltiplas de 2 e 5, associadas aos números racionais $\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{20}$; e, a tira de cor verde, com número de peças correspondente aos múltiplos de 3 e 5, vinculada ao número racional $\frac{1}{15}$. O material ainda possui a tira de cor branca, que representa o inteiro e uma tira de cor preta com peças que representam o número racional $\frac{1}{30}$ com quantidade de peças associada aos múltiplos de 2, 3 e 5 (Figura 1-a).

A fim de ressaltar a diferenciação visual no tamanho das peças, nesta pesquisa, foi confeccionada e utilizada uma versão reduzida do Frac-Soma que contém as tiras que possuem 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12 e 15 peças (Figura 1-b). Todas as peças foram produzidas na cor branca, o que apesar de aparentemente ser menos atrativo possui dois aspectos relevantes: o primeiro relaciona-se ao fato de não permitir a associação entre a quantidade de peças de cada tira e sua correspondência à determinada cor e ao respectivo múltiplo; o segundo refere-se à atenção a ser tomada no momento do posicionamento das peças, visto que, torna-se necessário identificar aquelas que são congruentes e posicioná-las de modo que a altura das peças em todas as tiras seja constante.

Figura 1 – Composição do recurso didático Frac-Soma e Frac-Soma utilizado na pesquisa

(a) (b)

Fonte: acervo pessoal das autoras, 2022.

Em função da estrutura do Frac-Soma, as atividades iniciais, por meio da manipulação livre, podem ofertar suporte necessário para a materialidade, para levantar hipóteses e reconhecer suas características. A seguir propõe-se a confecção do Frac-Soma visto que ela requer a divisão do inteiro e a partir disso, a comparação das partes com a unidade, visando sistematizar conceitos relativos ao objeto número racional.

Esse processo de particionamento localiza-se no ponto central da compreensão dos números racionais e de conceitos matemáticos, para a produção de quantidades, para o raciocínio e operações (LAMON, 2007). Ele pode transcender a ideia do número racional visto como partes de um todo, a qual é usualmente trabalhada nos sistemas escolares, por meio da exploração de registros figurais que já estão dispostos de forma seccionada.

Para tanto, valorizam-se registros individuais e/ou coletivos, que privilegiam a sistematização de inferências com vistas à formalização, pois a aprendizagem baseia-se "[...] na experiência, e a construção de conceitos matemáticos é um processo longo que requer o envolvimento ativo do aluno que vai progredindo do concreto para o abstrato" (SERRAZINA, 1990, p. 1). Nesse sentido, o Frac-Soma pode catalisar o desenvolvimento do pensamento matemático quando seu uso é mediado por uma atividade mental e por registros em distintos sistemas representacionais.

Desse modo, partilha-se dos pressupostos de Duval (2003), que advoga que para ocorrer o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, análise e visualização, torna-se necessário uma abordagem cognitiva que possibilite o acesso aos objetos matemáticos, por meio da mobilização de registros de representação semiótica. Tais registros relacionam-se à variedade de sistemas semióticos que permitem caracterizar distintos objetos matemáticos, bem como diferenciar suas representações. Esses sistemas são um conjunto de signos, dispostos segundo regras próprias de formação, que determinam relações internas que possibilitam identificar os objetos representados, desempenhando a função de produzir e transmitir informações (DUVAL, 2011).

Para que um sistema semiótico seja considerado um registro de representação semiótica, ele deve viabilizar três atividades cognitivas características à própria representação. A primeira é a formação de uma representação, relacionada ao seu processo de produção, envolvendo ainda a constituição de traços que identificam e representam determinado objeto. A segunda é o tratamento que consiste em uma transformação interna a um sistema representacional. E, a terceira é a conversão que se associa à transformação externa, ocorrida por meio da mudança entre registros de representação (DUVAL, 2012b).

Nessa perspectiva, torna-se necessário diferenciar visão de visualização. A visão relaciona-se ao reconhecimento direto da forma e do contorno de um objeto, enquanto que a visualização exige a identificação de variações dimensionais desse objeto, possibilitando mudanças no modo de olhar, ao mesmo tempo em que requer reconhecer atividades qualitativas da figura (DUVAL, 2011). Um material manipulável como o Frac-Soma, no âmbito dos registros de representação semiótica, pode ser considerado uma ferramenta de mobilização de representações matemáticas, mas não um registro figural, pois seu uso deve estar condicionado a duas funções básicas: "[...] possibilitar a produção de representações que permitem o acesso a objetos perceptiva ou instrumentalmente inacessíveis; e proporcionar uma rede de operações específicas que permita a transformação de representações produzidas em novas representações" (MORAN, 2015, p. 55).

Como o acesso ao objeto matemático ocorre por meio de distintas representações, um material manipulável será um desencadeador de registros figurais somente se ele for usado para fins didáticos e possibilitar a coordenação de uma diversidade representativa. Frente a isso tais materiais permitem realizar tratamentos figurais por meio de processos executados de maneira material e/ou mental (DUVAL, 2012a). Além disso, viabilizam identificar quatro tipos de apreensões, a saber: discursiva (interpretação do enunciado, coordenação entre figura e discurso), perceptiva (identificação instantânea e automática de unidades figurais), sequencial (construção e reprodução de figuras) e operatória (modificações e reorganizações que podem ser feitas nas figuras) (DUVAL 2011).

A apreensão operatória pode ser classificada em: ótica, onde a operação "[...] consiste em manter a mesma forma e orientação da figura inicial, fazendo variar somente o tamanho: aumentar ou diminuir uma figura transformando-a em outra, de modo que esta seja vista como sua imagem" (MORAN, 2015, p. 40); posicional, relativa em manter o tamanho e a forma da figura inicial, mas com variação de orientação, com diferentes deslocamentos (translação, rotação) e reflexão da figura relativa ao campo de referência em que ela se encontra (DUVAL, 2012b); e mereológica, que consiste na "[...] divisão de uma figura em unidades figurais de mesma dimensão que podem ser combinadas em outra figura ou em diferentes subfiguras, consistindo em um processo heurístico" (MORAN, 2015, p. 38).

Aspectos metodológicos

A presente investigação segue os pressupostos da pesquisa qualitativa e assume a ideia que pesquisar significa "[...] perseguir uma interrogação em diferentes perspectivas, de maneira que a ela podemos voltar uma vez e outra ainda e mais outra [...]", de maneira que esta interrogação se apresente "[...] como se fosse um pano de fundo onde as perguntas do pesquisador encontram seu solo, fazendo sentido" (BICUDO, 2012, p. 20).

A produção de dados analisa quatro atividades (compostas por 28 itens) que enfatizam a confecção, o reconhecimento de propriedades e a nomeação das peças do Frac-Soma dinamizadas com dez alunos do 7º ano de uma escola da rede pública municipal de Sobradinho/RS. Para estimular as discussões, as atividades foram projetadas no quadro, lidas pela professora/pesquisadora realizadas em grupos (G1, G2, G3 e G4) formados por dois ou três alunos, denominados de Aluno A, Aluno B, Aluno C, e assim sucessivamente.

Para "[...] interpretar os dados observados à luz da teoria em que a definição está contextualizada [...]" (BICUDO, 2012, p. 18) e, também, realizar descrições de situações materiais e narrativas, consideram-se, especificamente: o Frac-Soma produzido pelos alunos, as gravações em áudio e vídeo das respectivas discussões, os registros fotográficos das manipulações do material e o diário de bordo da pesquisadora, no qual foram realizados apontamentos ao término de cada encontro, conforme os preceitos éticos[2].

[2] A presente pesquisa está registrada no Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos sob o código do Certificado de Apresentação para Apreciação Ética - CAAE: 48746621.7.0000.5346.

As gravações em vídeo permitiram observar movimentos e ações dos grupos, durante a realização das atividades e as socializações de ideias. Além disso, de maneira simultânea e como forma de auxiliar no processo de análise foram realizadas também gravações em áudio dos grupos, com o objetivo de registrar os diálogos de maneira ampla e que poderiam passar despercebidos nas gravações visuais. Além disso, o diário de bordo da pesquisadora contém anotações realizadas no término de cada um dos dois encontros, indicando aspectos que mais chamaram a atenção durante a dinamização das atividades.

As análises consideram, para cada atividade, imagens de momentos específicos do desenvolvimento da sequência, bem como descrições de cenas por meio de episódios oriundos da transcrição das gravações em vídeo (MOURA, 2000). Os episódios têm o intuito de apresentar diálogos e manifestações dos alunos e da pesquisadora. Por isso, ao descrevê-los optou-se por manter o rigor da fala de modo a garantir a totalidade do fenômeno analisado. Desta forma, em alguns momentos aparecem na descrição marcações [...] o que indica que alguma parte pode ter sido excluída por se tratar de características específicas da fala dos alunos, ou por não ter sido possível compreendê-la.

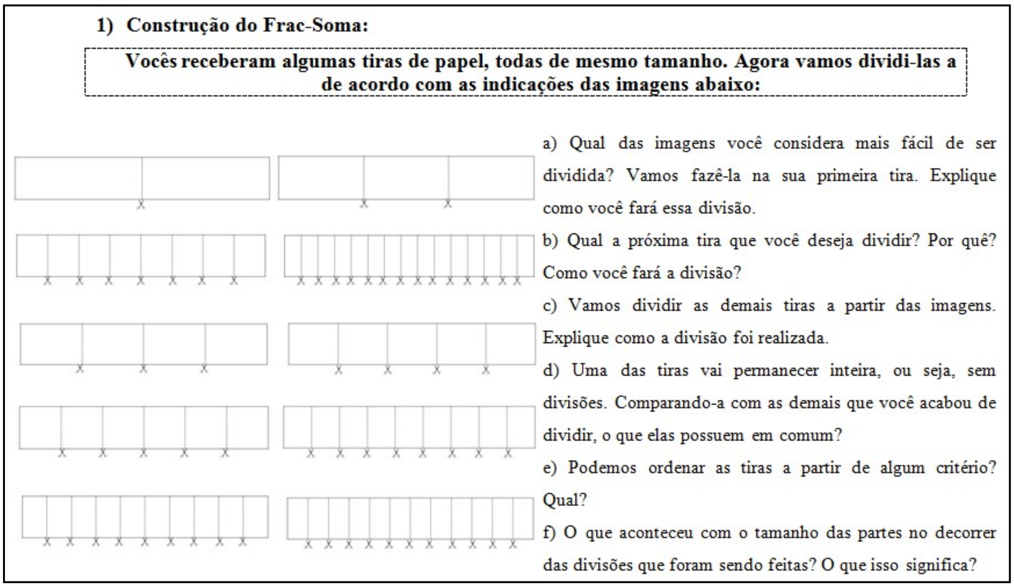
Na próxima seção apresentam-se discussões sobre as atividades de confecção e exploração do Frac-Soma, organizadas em duas seções: a primeira explora processos de particionamento sucessivo da unidade por meio da sistematização do material, bem como as relações com a teoria envolvida, sendo analisadas a Atividade 1 (A1) e a Atividade 3 (A3); e, a segunda seção, destaca o Frac-Soma como desencadeador de registros figurais e suas relações com a apreensão operatória, sendo exposta a análise da Atividade 2 (A2) e da Atividade 4 (A4), pois se observa a mobilização de argumentos que se aproximam da interpretação parte-todo em ambas as atividades.

Apreensão mereológica e posicional com o Frac-Soma

Para construir o Frac-Soma, Atividade 1 (A1), cada grupo recebeu 11 tiras de cartolina na cor branca que não possuíam marcação e que deveriam ser cortadas com uma tesoura, sem o apoio de instrumentos de medida. Diante do enunciado da atividade, foram estabelecidas estratégias com vistas a indicar o local dos cortes por meio de dobraduras, bem como a ordem de confecção das tiras.

Apesar de a imagem, disposta para os alunos, conter a quantidade de partes de cada tira deve-se destacar que a A1 requer particionar uma região que não contém demarcações o que envolve mobilizar raciocínios mais elaborados dos que usualmente são requeridos no ensino de números racionais na representação fracionária, ou seja, analisar figuras previamente particionadas e contar o número total de partes ou as partes consideradas. Dito de outro modo, “[...] a tarefa de dividir um retângulo, por exemplo, em duas partes “iguais” é complexa, [pois] exige a percepção de que as partes resultantes devem ter a mesma área, o que envolve conhecimentos específicos e um planejamento das ações.” (SILVA; ALMOULOUD, 2018, p. 102).

Figura 2 – A1_ Construção do Frac-Soma



Fonte: elaborado pelas autoras, 2022.

Inicialmente, os grupos foram motivados a escolher na imagem apresentada, a tira que consideravam ser a mais conveniente de ser construída (A1_a). De imediato, todos optaram pela tira com duas peças e quando questionados sobre o porquê de terem a escolhido, os alunos justificaram que “[...] ela só tem um corte para ser feito” (ALUNA A_A1_a, julho, 2022) e que “[...] essa é a mais fácil, pois vai ter que cortar só uma vez. Dobrar no meio e cortar” (ALUNO G_A1_a, julho, 2022). Desta forma, utilizaram a técnica de “dobrar ao meio e cortar”, obtendo assim a divisão da tira.

Seguindo com a confecção do Frac-Soma, os grupos divergiram sobre a escolha da próxima tira a ser particionada. Enquanto G1, G3 e G4 optaram por construir a que possuía três partes, G2 optou por cortar a tira com quatro partes, conforme o episódio que segue:

> Professora/Pesquisadora: Por que vocês consideram mais fácil seccionar a tira com três partes?
> Aluna E_G4: Para fazer ela só precisa cortar duas vezes, por isso é mais fácil.
> Aluna A_G1: E também porque é só dobrar assim e assim e cortar (indicando para as dobras a serem feitas em sentidos opostos).
> Professora/Pesquisadora: E o outro grupo, por que acham mais fácil cortar a tira com quatro partes?
> Aluno G_G2: Porque é só dobrar no meio e dobrar no meio de novo. Vai dar quatro pedaços.
> Aluno B_G2: Ou também pode cortar em duas partes, depois colocar uma em cima da outra, dobrar e cortar no meio.

Ao analisar o episódio constata-se que ocorreu a mobilização do registro figural a partir do manuseio do material, pois se observam tratamentos figurais associados a raciocínios dedutivos, com vistas a determinar a solução do problema proposto. Apesar de essa ação envolver essencialmente a apreensão operatória mereológica, estritamente homogênea, constata-se que o argumento da Aluna A (G1) contém reflexões que estão associadas à modificação posicional, quando destaca que optou por dobrar em sentidos opostos (Figura 3).

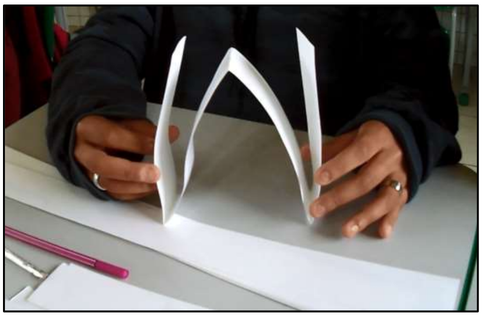
Figura 3 – Método utilizado por G1 para dividir a tira em três partes

Fonte: acervo pessoal das autoras, 2022.

Dos três grupos que optaram por representar a tira com três partes, dois (G1 e G3) o fizeram de maneira satisfatória, pois realizaram uma dobradura em forma de “S” e ajustaram o tamanho das partes, de modo que ficassem todas iguais. Por outro lado, G4 seccionou em quatro partes (Figura 4), pois fundamentaram sua estratégia na quantidade de dobras e não na quantidade de partes resultantes. Dentre os argumentos expostos a partir da identificação desse equívoco generalizaram que a quantidade de partes resultantes da secção é uma a mais que a quantidade de dobras efetuadas, ou seja, de cortes no inteiro, como evidencia o episódio que segue:

Aluna E_G4: Acho que as nossas peças não deram certo. Aqui tem quatro peças.
Aluna I_G4: Acho que dobramos errado. Dobramos quatro vezes ao invés de três.
Professora/Pesquisadora: Dobrem de novo e me expliquem como vocês fizeram.
Aluna E_G4: Eu dobrei assim: uma, duas e três vezes (Figura 4). Dobrei três vezes para ter três partes.
Professora/Pesquisadora: E dobrando três vezes você conseguiu três partes?
Aluna E_G4: (abre a tira e contando as partes, percebe que resultou em quatro partes novamente) Deu quatro partes de novo!
Aluna I_G4: Mas eu já sei o que está errado! Antes dobramos uma vez no meio e conseguimos duas partes. Agora fizemos três dobras e conseguimos quatro partes. Então é sempre uma a mais que dá!
Aluna E_G4: Então precisa dobrar a tira só duas vezes.

Figura 4 – Método utilizado por G4 para dividir a tira em quatro partes.



Fonte: acervo pessoal das autoras, 2022.

Prosseguindo com a escolha das tiras a serem confeccionadas, os grupos começaram a perceber que poderiam utilizar as peças que já haviam feito, para realizar a divisão das demais. Neste sentido, o Aluno G argumentou que “[...] as próximas a serem feitas podem ser aquelas que tem oito partes, porque é só pegar a com quatro pedaços e cortar no meio” (Aluno G_A1b, junho, 2022). Por meio da ideia apresentada pelo colega, os demais alunos também seguiram esse procedimento, como relata a Aluna A: “[...] a tira com seis partes também é do mesmo jeito que a do oito. É só pegar a que fizemos com três partes e cortar assim, bem no meio” (Aluno A_A1b, junho, 2022).

Transformar as figuras de partida, ou seja, as peças que já haviam sido confeccionadas, em subfiguras, isto é, novas peças, revelam que a manipulação do material promoveu o reconhecimento de registros figurais. Além disso, contribuiu para a mobilização de apreensões operatórias por meio de modificações mereológicas, em especial, quando os alunos revelam que identificaram que a justaposição de peças, resultantes do particionamento, equivalem a peça inicial. As apreensões mereológicas

“[...] possibilitam o estruturar do pensamento, desenvolvem a capacidade de resolver problemas, de abstrair e analisar, contribuindo com o raciocínio dedutivo, ao passo que proporcionam a criação de conjecturas e investigações” (MORAN, 2015, p. 189).

Seguindo com a confecção, os grupos optaram então por cortar a tira em nove partes, utilizando a tira com três peças, e dobrando cada uma delas em três partes. O mesmo ocorreu com a tira que possui um total de doze partes. Para essa, os alunos apresentaram duas formas de fazer a divisão, conforme o episódio que segue:

> Aluna A_G1: Para fazer com doze acho que precisa usar a tira com três partes.
> Aluno G_G2: Também acho. Pega a peça “do três”, dobra no meio e dobra no meio. Cada uma vai ter quatro partes e quatro vezes três dá doze.
> Professora/Pesquisadora: Isso mesmo. E será que existe outra forma dessas peças serem feitas?
> Aluno B_G2: Também dá para fazer com as peças “do seis”. Corta a tira com as peças “do seis” e depois dobra cada uma no meio.
> Aluno G_G2: Isso dá certo porque seis vezes dois dá doze!

Diante das estratégias adotadas pelos alunos vale ressaltar que seccionar as tiras em uma quantidade par de vezes, por meio de dobraduras, torna-se uma ação relativamente acessível, pois pode ser realizada com o apoio de eixos de simetria que envolvem apreensões operatórias com modificações posicionais.

Para concluir as confecções, os alunos optaram por fazer a tira com cinco peças. Por meio de tentativas de dobraduras e comparações dos tamanhos das partes, os grupos conseguiram fazer com que as cinco partes ficassem todas do mesmo tamanho. Da mesma maneira que as demais tiras, os alunos fizeram então as divisões em dez e quinze partes.

Para organizar as peças confeccionadas (A1_e) todos os grupos optaram por ordenar as tiras na ordem crescente enfatizando que “[...] a quantidade de peças aumentou, mas o tamanho delas diminuiu” (Aluno B_A1f, junho, 2022). Esse argumento permite concluir que estão sendo estabelecidas hipóteses entre a quantidade de peças em cada tira e o seu respectivo tamanho, evidenciando que conforme aumenta o número de peças, é necessário que seus tamanhos diminuam relacionando-se com a concepção de divisão. Tais argumentos apontam indícios da interpretação quociente, na qual número racional é interpretado como resultado de uma divisão. (LAMON, 2007).

Nesta atividade (A1_e) ainda observa-se que os alunos não questionaram sobre o porquê de não existir no material uma tira com sete ou onze peças. Eles apenas enfatizaram que "[...] não é de todas as quantidades que tem o número de peças. Da tira com seis peças foi direto para a tira com oito peças, pulou a com sete" (Aluno G_A1, junho, 2022) e que "[...] também não tem com onze e nem com treze peças" (Aluno B _A1, junho, 2022). Quando indagados sobre o porquê desse fato revelaram que "[...] não tem por que, para fazer ia ser mais difícil, precisaria dobrar em sete partes. É quase impossível de fazer!" (Aluno B_A1, junho, 2022) e que "[...] não tem como usar nenhuma outra peça para poder fazer a do sete, não pode usar a do dois, nem a do três" (Aluno G_A1, junho, 2022).

A outra atividade da sequência que evidenciou apreensões figurais foi a Atividade 3 (A3) que objetivou identificar propriedades das peças do Frac-Soma por meio de sua organização (Figura 5). A partir da disposição do Frac-Soma os alunos revelaram que algumas peças, quando posicionadas, resultavam em tiras de comprimento diferentes da peça que representa o inteiro. Inicialmente, eles não haviam compreendido o porquê desse fato e ressaltaram sua dúvida ao anunciar que "[...] as tiras brancas eram todas iguais e mesmo cortando elas precisam continuar iguais" (Aluna A _A3, junho, 2022).

Figura 5 – Exploração das características e dimensões das peças.

3) Organização do Frac-Soma:

a) Quais características são comuns a todas as peças do Frac-Soma?

b) Além da forma retangular que outro atributo é comum a todas as peças de todos os grupos?

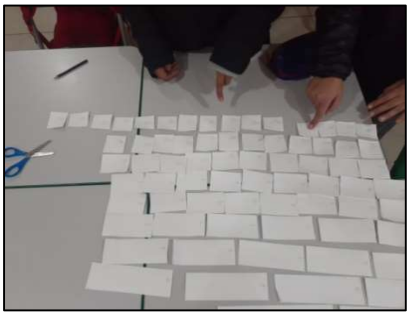
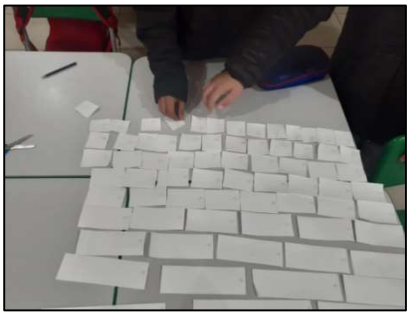
c) Vamos considerar que essa medida de comprimento se refere à altura dos retângulos. O que podemos afirmar em relação às dimensões de comprimento da base das peças e a quantidade de peças de cada grupo?

d) Podemos chamar essas dimensões de comprimento de **base** e **altura**. As medidas da base e da altura variam de uma peça para a outra? Por quê?

Fonte: elaborada pelas autoras, 2022.

Por meio da exploração das noções de dimensão (A3_c) nenhum dos grupos revelou reconhecer a variação entre a base e altura das peças, bem como a necessidade de congruência na altura. Porém, ao realizar rotações e translações perceberam que era necessário realizar o posicionamento correto de justaposição, visando à formação do inteiro (Figura 6), mobilizando assim modificações posicionais.

Figura 6 – Verificação das dimensões das peças.

Fonte: acervo pessoal das autoras, 2022.

Esse processo aponta que a apreensão operatória se tornou evidente nos tratamentos figurais necessários para resolver a atividade, juntamente com o raciocínio dedutivo. Além disso, revela indícios que ultrapassam a ideia de visão, que é algo que proporciona acesso direto ao objeto, e condiz com a noção de visualização que é baseada na produção de uma representação semiótica, em que é capaz de mostrar "[...] relações, ou melhor, organização de relações entre unidades representativas" (DUVAL, 2011, p. 85).

A interpretação parte-todo com o Frac-Soma

A Atividade 2 (A2) objetivou nomear as peças confeccionadas pelos grupos, por meio da comparação das demais peças com a peça que representa o inteiro (Figura 7). Essas manipulações e comparações são fundamentais para reconhecer a interpretação de número racional como parte de um todo, contribuindo para a compreensão do processo de secção de cada tira.

Figura 7 – Atividade de nomeação das peças confeccionadas.

2) Nomeação das peças:

a) Vamos analisar agora a peça que não foi dividida. Como podemos chamá-la?

b) Vamos comparar uma das peças da tira que possui duas peças com o inteiro. O que esta peça representa com relação ao inteiro?

c) E como podemos chamá-la? Anote na sua folha de registros.

d) Agora a peça da tira que possui três peças. Como podemos chamá-la a partir da sua relação com o inteiro? Registre na folha.

e) E cada uma das peças da tira que possui quatro peças? Escreva na folha de registros como elas podem ser nomeadas.

f) Registre na ficha os nomes das demais peças.

Fonte: acervo pessoal das autoras, 2022.

Para denominar a primeira peça (A2_a), ou seja, aquela na qual não foram realizados cortes emergiram distintas denominações: "peça grande", "peça sem cortes" e "peça número um". Depois de alguns comentários os alunos concluíram que todas as demais peças, quando unidas, resultavam no mesmo tamanho dessa tira e que todas as outras foram confeccionadas a partir dela. O Aluno G, em específico, enfatizou aos colegas que ela era “[...] a única peça que não foi dividida. Ela ficou inteira” (Aluno G_A2_a, junho, 2022). Foi então institucionalizado que ela seria denominada de “inteiro”.

Nesse processo de nomeação e organização do material em tiras, a relação parte-todo foi diretamente utilizada por meio do procedimento de dupla contagem. Esse método considera relações entre o número total de partes (denominador) e as partes consideradas (numerador), é geralmente utilizado no início dos estudos dos números racionais na representação fracionária, originando-se por meio da ação de dividir uma grandeza contínua (MERLINI, 2005). Através do Frac-Soma, esse método direciona-se à quantidade de peças assumidas em determinada tira, representando o numerador e ao total de peças da respectiva tira, relativo ao denominador do número racional na representação fracionária.

Diante da análise das gravações em áudio e vídeo, constata-se que os diferentes momentos da sequência em que as peças foram organizadas em tiras, inclusive para a nomeação, contribuíram para que os alunos reconhecessem as unidades figurais envolvidas. Além disso, favoreceram a aquisição do conceito e da interpretação parte-todo, visto que envolvem partições equivalentes de uma unidade (LAMON, 2007).

Ao apreciar as peças nomeadas conclui-se que todos os grupos realizaram anotações em que a representação numérica fracionária foi mobilizada para todas as peças do material. Porém, G2 e G3 utilizaram também a representação na língua natural, ao denominar como “metade” a peça relacionada à representação numérica $\frac{1}{2}$.

A Atividade 4 (A4), por sua vez, também foi elaborada com o intuito de explorar a identificação das peças, mas promovendo conversões que partem da representação numérica fracionária em direção ao registro figural (Figura 8). Ao analisar as gravações em áudio e vídeo, também, foi possível constatar indícios da interpretação parte-todo.

Os alunos não demonstraram obstáculos na representação de números racionais na representação fracionária nos itens abordados, bem como na dinâmica dos itens A4_d à A4_g onde cada um dos grupos escolheu um número racional a ser representado pelos demais. Nesse momento, G2 optou por solicitar que todos representassem $\frac{5}{7}$, com as peças. De imediato, a Aluna A justificou que “[...] não tem como representar esse número, por que no material não tem nenhuma tira com sete peças. Só cortamos tiras com seis e com oito peças. Com sete não foi feito!” (Aluna A _A4, junho, 2022).

Figura 8 – A4: Representação de números racionais com o Frac-Soma.

4) Representação de frações com o Frac-Soma:

a) Vamos representar algumas frações com o Frac-Soma? Represente a fração $\frac{1}{3}$.

b) Agora represente a fração $\frac{3}{5}$.

c) Represente com as peças a fração $\frac{9}{15}$.

d) Agora o G1 escolherá uma fração para os demais grupos representarem com as peças.

e) É a vez do G2 determinar uma fração para ser representada.

f) Agora o G3 deve escolher uma fração para os demais representarem.

g) Por fim, é a vez do G4 e do G5 escolher sua fração.

h) É possível representar com as peças a fração $\frac{2}{7}$? Justifique sua resposta.

i) Que característica deve ter a tira para que essa fração possa ser representada? Vamos representá-la no quadro.

j) Determine com as peças a fração $\frac{3}{2}$. É possível fazer essa representação? Explique.

k) Represente no quadro com um desenho essa fração. Você se lembra como ele é chamada?

l) Descreva em seu caderno como determinamos as frações com as peças do Frac-Soma.

Fonte: acervo pessoal das autoras, 2022.

Nesse momento a professora/pesquisadora retomou a discussão ocorrida na A1 e ao serem provocados sobre como deveria ser a tira de papel para que fosse possível fazer essa representação, os alunos argumentaram que:

> Aluno B_G2: [...] a tira precisa ser dobrada em sete partes, para ter sete peças. Então era só pegar cinco peças que vai dar $\frac{5}{7}$. Mas não tem como porque dobrar em sete é muito difícil de fazer e não tem como usar nenhuma outra.
> Aluna E_G4: Mas é só pegar as peças da tira com seis peças e cortar uma no meio. Vai dar sete peças.
> Aluno G_G2: Isso não pode fazer. Se cortar no meio vai ficar com duas peças de tamanho diferentes na mesma tira, e os tamanhos das peças precisam ser todos iguais.

Por meio da fala do Aluno G, percebe-se que o mesmo estabelece conexões com a interpretação parte-todo, pois essa interpretação indica um número inteiro de partes iguais de uma unidade em relação ao número total de partes iguais em que a unidade está dividida. Neste caso, a nomenclatura “igual” significa o mesmo número de peças ou o mesmo comprimento.

Para representar o número racional $\frac{3}{2}$, na A4_j, os alunos indagaram-se sobre o fato de que “[...] na tira que tem duas peças só tem duas, não tem como pegar três delas”

(Aluna E_A4j, junho, 2022). Ao serem questionados sobre o que poderia ser feito nesse caso, G2 sugeriu que "[...] podemos pegar mais uma tira inteira, cortar no meio e pegar uma das peças. Se juntar com essas (indicando para a tira composta por duas peças) vai dar três meios" (Aluno B_A4j, junho, 2022). Nesse sentido, o Aluno G concluiu que se isso fosse feito "[...] a tira vai ficar maior que as outras por que passa da quantidade do limite de peças, e precisa mais do que tem" (Aluno G_A4j, junho, 2022).

A ideia expressa pelo Aluno G associa-se ao fato de que se torna necessário tomar uma unidade inteira mais a metade de outra unidade e diverge da abordagem inicial de número racional na representação fracionária, que considera apenas um todo dividido em partes iguais, em que o numerador sempre será menor que o denominador.

Por outro lado, ao evidenciar que a justaposição das peças de cada tira remete ao inteiro percebe-se indícios da noção de equivalência, o que condiz com a ideia de quantidades múltiplas. Esse aspecto já havia sido evidenciado na questão A1_c quando os alunos argumentaram que para obter dez partes a partir de cinco é necessário dobrá-las ao meio, constata-se a relação de multiplicidade e a percepção de que uma parte pode ser constituída por mais de uma peça e que diferentes números racionais na representação fracionária podem representar uma mesma quantidade, características de equivalência e de números racionais como partes de um todo (LAMON, 2007).

Considerações finais

O presente estudo objetiva analisar implicações do Frac-Soma na aprendizagem de números racionais sob o ponto de vista de registros de representação semiótica e das interpretações parte-todo, medida e quociente. Nesse caso, aliados a essas características e por meio das apreensões operatórias realizadas, encontram-se fatores relativos às modificações mereológicas e posicionais, nas quais os alunos verificaram que por meio da justaposição, sobreposição e rotação das peças, o inteiro pode ser decomposto em partes iguais ou diferentes, desde que seu tamanho permaneça o mesmo. Neste âmbito, se materiais manipuláveis como o Frac-Soma desencadearem registros figurais, eles podem contribuir em aspectos relativos à capacidade de resolver problemas, bem como, às noções de abstração e análise que possibilitam a criação e o desenvolvimento de hipóteses e investigações (MORAN, 2015).

Com relação às interpretações de números racionais, os dados deste artigo revelam características que direcionam para a ideia de parte-todo. Isso porque é a interpretação com maior abordagem em sala de aula e pode estar relacionada às memórias na aprendizagem desse objeto matemático, mas também em função da estrutura do Frac-Soma que associa o tamanho da peça que representa o inteiro, formado pela junção de outras partes. Isso converge com a ideia principal deste significado, visto que se associa a partição de um todo, neste caso contínuo, em um total de partes iguais (LAMON, 2007).

Por outro lado, a realização da sequência de atividades oportunizou explorar por meio do Frac-Soma relações de números racionais que vão muito além da interpretação parte-todo. Isso se refere à característica de associação do tamanho de cada peça com a quantidade de partes que compõem o inteiro, ou seja, quanto menor o número de peças, maior o tamanho de cada uma delas, direcionando-se ao entendimento do número racional na interpretação quociente, de modo que depende de uma partição e pode ser representado na forma fracionária a/b, na qual a é assumido em um total de b partes iguais.

Recebido em: editora
Aprovado em: editora

Referências

BALDINO, R. R. **Material Concreto:** Frac – Soma 235. Campo Bom: Casquinha – Material de Apoio Pedagógico. 1983.

BICUDO, M. A. V. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia** - Curitiba-PR, v.5, n.2, (mai-ago), p. 15-26, 2012.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. P**arâmetros Curriculares nacionais:** Ensino Fundamental (1ª a 4ª séries)–Matemática. Brasília. 1997.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf. Acesso em: 15 dez. 2021. 2017.

CAMPOS, T. M. M. Sobre ensino e aprendizagem de frações. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**. Año 8. Número 11. p 239-246. Costa Rica. 2013.

CATTO, G. G. **Registros de representação e o número racional:** Uma abordagem nos livros didáticos. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2000.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A., (org.). **Aprendizagem em Matemática– registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus; 2003.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. LEVY, L. F.; SILVEIRA, M. R. A. da. São Paulo: Editora Livraria da Física. 2009.

DUVAL, R. **Ver e Ensinar a Matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semiótica. Trad. DIAS, M. A. São Paulo: PROEM. 2011.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Moretti, M. T. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática.** Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012a.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica de funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. MORETTI, M. T. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297. 2012b.

IORA, M. **Aspectos históricos das diferentes representações dos números racionais.** 150 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) – Universidade Federal de Santa Maria. 2021.

LAMON, S. J. Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework for Research. In: LESTER, F. K. (org.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning:** a Project of the National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte: IAP/NCTM, 2007.

LAMON, S. J. **Teaching Fractions and Ratios for Understanding:** Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 3th ed. New York: Routledge. 2012.

LAPA, C. M dos S. **O ensino de fração e seus diferentes significados:** Um estudo a partir do livro didático A Conquista da Matemática e dos registros dos cadernos de alunos do 7º ano da rede municipal de Aracaju/SE. 2013. 137 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal de Sergipe, Sergipe. 2013.

LOPES, A. J. O que Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender sobre Frações, quando Tentamos lhes Ensinar Frações. **Boletim de Educação Matemática,** vol. 21, núm. 31, pp. 1-22 Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil. 2008.

LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados. p. 113-134. 2006.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. A Fração nas perspectivas do Professor e do aluno dos Dois Primeiros Ciclos do Ensino Fundamental. **Bolema,** Rio Claro, Ano 21, nº 31, p. 23-40, 2008. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2104. Acesso em: 10 nov. 2021

MARANHÃO, M. C. S. A; IGLIORI, S. B. C. Registros de representação e números racionais. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática:** Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus. p. 57-70. 2003.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados:** um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. 2005. 238 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2005.

MORAN, M. **As apreensões em geometria: um estudo com professores da Educação Básica acerca de registros figurais**. 2015. 242 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá. 2015.

MOURA, M. O. de. **O educador matemático na coletividade de formação:** uma experiência com a escola pública. Tese (Livre docência) – FEUSP, São Paulo. 2000.

MURARI, C. Experienciando Materiais Manipulativos para o Ensino e a Aprendizagem da Matemática; **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 187-211, dez. 2011.

ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G. As diferentes "Personalidades" do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. **Bolema**, v. 21. n. 31. Rio Claro, SP. p. 79– 102. 2008.

RIO GRANDE DO SUL, Secretaria de Estado da Educação. **Referencial Curricular Gaúcho:** Matemática. Porto Alegre, Departamento Pedagógico. V1. 2018.

RODRIGUES, F. C.; GAZIRE, E. S. Reflexões sobre o uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática.** Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 187-196. 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p187/23460. Acesso em: 12 jan. 2022.

SERRAZINA, L. **Os materiais e o ensino da Matemática. Educação e Matemática**, vol.13, 1.ed, Lisboa: APM. 1990.

SCHEFFER, N. F., POWELL, A. B. Frações na Educação Básica: o que revelam as pesquisas publicadas no Brasil de 2013 a 2019. **Revista Paranaense de Educação Matemática,** 9 (20), 8–37. 2021. Disponível em: https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.20.8-37. Acesso em: 7 jan. 2023.

SILVA, M. J. F., ALMOULOUD, S. A. Números racionais: concepções, representações e situações. In: OLIVEIRA, G. P., **Educação Matemática epistemologia, didática e tecnologia.** São Paulo: Livraria da física. 2018.

SOARES, M. A. da S. **Proporcionalidade um conceito formador e unificador da Matemática:** uma análise de materiais que expressam fases do currículo da Educação Básica. 244 f. Tese (Doutorado em Educação nas Ciências) – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí. 2016.

VALLILO, S. A. M. **A linguagem matemática no estudo de Números racionais:** uma abordagem através da resolução de problemas. 230 p. Dissertação (Educação Matemática) - Instituto Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. 2018.

Submetido em: 28/08/2023
Aprovado em: 22/10/2025