

# Percepções de alunos moçambicanos da Escola Secundária sobre o volume de um objeto: uma experiência de ensino baseada na Trajetória Hipotética de Aprendizagem

## *Perceptions of Mozambican secondary school students about the volume of an object: a teaching experience based on the Hypothetical Learning Trajectory*

Fernando João<sup>1</sup>

Pamela Emanuelli Alves Ferreira<sup>2</sup>

Marinez Meneghello Passos<sup>3</sup>

Sergio de Mello Arruda<sup>4</sup>

### RESUMO

*Neste artigo apresentamos uma investigação que teve como objetivo analisar as percepções de alunos moçambicanos da Escola Secundária sobre o volume de um objeto. A partir de uma experiência de ensino, baseada no uso da Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) de Simon (1995), procurou-se obter informações sobre a maneira como os alunos definiam, entendiam e/ou interpretavam o conceito de volume de um objeto do cotidiano. Participaram da investigação 8 alunos que frequentavam a 10ª Classe de uma escola na cidade de Quelimane em Moçambique. A coleta de dados foi realizada por meio de entrevistas com perguntas abertas dirigidas aos estudantes participantes da investigação. As transcrições das entrevistas foram realizadas e submetidas aos procedimentos da Análise de Conteúdo. Dentre as conclusões a que chegamos, destacam-se: a percepção de que os alunos possuem noções mínimas sobre a definição de volume; com relação à compreensão de espaço, eles não conseguem esclarecer se é o espaço no interior do objeto ou o espaço que o objeto ocupa no meio onde está inserido; em função da primeira limitação – definir volume – eles não conseguiram identificar por quais unidades de medida o volume pode ser apresentado; pela falta desses conhecimentos anteriores, os alunos, também, confundem volume com capacidade.*

**Palavras-chave:** *Educação Matemática. Geometria espacial. Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Objetos do cotidiano.*

### ABSTRACT

*In this article, we present an investigation that aims to analyze Mozambican secondary school student's perceptions of the volume of an object. From a teaching experience based on the use of Simon's Hypothetical Learning Trajectory (THA) (1995), we sought to obtain information about the way students defined, understood, and/or interpreted the concept of the volume of an object of everyday life. Eight students who attended Grade 10 at Quelimane, Mozambique, participated in the investigation. Data was collected through interviews with open*

<sup>1</sup> Doutorando em Ensino de Ciências e Educação Matemática na Universidade Estadual de Londrina (UEL). Docente da Universidade Licurgo (UL). *E-mails:* fernandojoaojoao@gmail.com e fernandojoao@uel.br. ORCID: <https://orcid.org/0009-0003-7518-7068>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/8208180150791846>.

<sup>2</sup> Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL). Professora adjunta na Universidade Estadual de Londrina (UEL) e pesquisadora do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação (GEPMA). *E-mails:* pamelael@uel.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9420-8536>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/1845347041325856>.

<sup>3</sup> Doutora em Educação para a Ciência pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Professora Sênior da Universidade Estadual de Londrina (UEL) e Professora Colaboradora Sênior da Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP) – Campus Cornélio Procopio. Bolsista de Produtividade CNPq. *E-mails:* marinezpassos@uel.br e marinez@uenp.edu.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8856-5521>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/3275252597631249>.

<sup>4</sup> Doutor em Educação pela Universidade de São Paulo (USP). Professor Sênior da Universidade Estadual de Londrina (UEL). Bolsista de Produtividade CNPq. *E-mail:* sergioarruda@uel.br. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4149-2182>. Lattes: <http://lattes.cnpq.br/3162292964889276>.

*questions addressed to students participating in the investigation. The interview transcriptions were carried out and submitted to Content Analysis procedures. Among the conclusions we reached, the following stand out: the perception that students have minimal notions about the definition of volume; regarding the understanding of space, they cannot clarify whether it is the space inside the object or the space that the object occupies in the environment where it is inserted; due to the first limitation – defining volume – they were unable to identify by which measurement units volume can be presented; Due to the lack of this prior knowledge, students also confuse volume with capacity.*

**Keywords:** *Mathematics Education. Spatial geometry. Hypothetical Learning Trajectory. Everyday objects.*

## **Introdução**

O presente artigo remete-nos a uma reflexão no âmbito da produção e aplicação de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) sobre a forma como os alunos da 10ª Classe, da Escola Secundária Geral do Coalane<sup>5</sup>, conceitualizam o volume dos objetos do seu cotidiano.

De acordo com Abreu (2014, p. 2), sobre o volume de objetos, que passamos a tratar por Geometria, “há um grande questionamento em relação ao que é lecionado na sala de aula; a forma como vem sendo conduzido o ensino da matemática e o que é necessário conhecer para viver em sociedade”. Infelizmente, tais fatos ocorrem porque muitas vezes os alunos não conseguem relacionar os conteúdos presentes nos currículos escolares com seu cotidiano, e, desta forma, não veem importância em aprendê-los, o que pode contribuir para uma má percepção dos alunos, não reconhecendo sua importância, estando cada vez mais desmotivados e desinteressados pela disciplina, tornando assim estes fatores impeditivos para uma aprendizagem adequada.

Diante dessa situação, acreditamos que cabe ao professor fazer com que os alunos consigam relacionar os conteúdos de Geometria ministrados em aulas de Matemática e sua aplicabilidade no dia a dia, sempre que for possível, bem como sua essencialidade para a formação de um cidadão consciente e crítico.

Segundo Maia *et al.* (2017), na Matemática, os conceitos de grandezas e medidas têm um papel fundamental na atribuição de significados a outros conceitos centrais, como os de número natural, inteiro, racional e irracional, entre outros. Além disso, é um campo que se articula bem com a Geometria e contribui para estabelecer relações entre a Matemática e outras disciplinas escolares.

Também nos inspiramos naquilo que apresentam as pesquisadoras Vaz e Pereira (2017), que investigaram a formação do conceito de volume do cubo, do paralelepípedo e da pirâmide, tendo como participantes alunos de um 5º ano do Ensino Fundamental brasileiro, e concluíram que pesquisas que visam a elaboração e a aplicação de experimentos didáticos são promissoras e

---

<sup>5</sup> Nome de um dos antigos bairros da cidade de Quelimane.

provocam inúmeras “mudanças na concepção científica do aluno e na metodologia do professor pesquisador” (Vaz; Pereira, 2017, p. 1).

Neste artigo trazemos os resultados de uma investigação em que consideramos a seguinte questão: Como os alunos definem, entendem e/ou interpretam o conceito de volume de um objeto do cotidiano? Isso nos levou a considerar as aulas de Geometria ministradas pelos professores que lecionavam Matemática, mais especificamente, quando exploravam o conceito de volume de um objeto. Partindo do pressuposto associado às dificuldades encontradas para o aprendizado da Geometria em diferentes perspectivas de ensino, dedicamo-nos à produção e/ou construção de uma THA, que para Simon (1995) consiste no estabelecimento de objetivos para a aprendizagem dos estudantes, de tarefas matemáticas para promover a aprendizagem, e do levantamento de hipóteses sobre o processo de aprendizagem deles.

Nas seções subseqüentes deste artigo, trazemos algumas explicações a respeito dos processos de ensino e aprendizagem em Moçambique, destaques sobre a THA, os procedimentos relativos à coleta e análise dos dados, a elaboração da Trajetória, detalhes sobre sua aplicação e alguns resultados que pudemos evidenciar em função dos dados analisados.

### **Esclarecimentos relativos ao ensino de Geometria em uma escola moçambicana**

O ensino de Geometria, em particular das grandezas de medição, deve basear-se na experimentação e na manipulação, privilegiando, assim, ao aluno, a capacidade de visualização e raciocínio como um dos aspectos a desenvolver. Serra (2010) afirma que os alunos descobrem relações e desenvolvem a capacidade crítico-reflexiva ao construir, desenharem, medirem, visualizarem, compararem, transformarem e classificarem figuras geométricas. A autora ainda sustenta que discutir ideias, fazer conjecturas e testar hipóteses são atividades que precisam preceder o desenvolvimento de questões mais formais.

Nas escolas moçambicanas, os conceitos de Geometria são introduzidos muito cedo, nos primeiros anos de escolaridade, com tarefas que visam o desenho de objetos, considerando suas formas. Portanto, ao observarmos os livros didáticos, os planos temáticos e os programas de ensino, nota-se que os conteúdos que abordam a Geometria aparecem nos capítulos ou nas páginas finais desses guias e/ou documentos, fato que pode justificar os resultados a que chegamos sobre as incompreensões apresentadas pelos estudantes entrevistados. Por isso, na continuidade desta seção dedicamo-nos a apresentar alguns conceitos que fizeram parte desta investigação e sobre os quais interpelamos os alunos.

Segundo o dicionário Ferreira (2002), objeto pode ser algo físico ou imaterial, desde que seja o foco dos pensamentos e sentimentos de alguém. O termo deriva do latim *objectus* (“empecilho” ou “algo que está adiante”). Todavia, quando se fala em objeto, o primeiro conceito do qual se tem noção

é toda coisa material, aquilo que pode ser tocado, ainda que ele se encontre estático. Uma bola, um caderno, um copo, uma garrafa, enfim, tudo isso pode ser um objeto, visto que são elementos palpáveis e sobre os quais uma pessoa pode manter o seu foco. Pelo exposto, leva-nos a afirmar que “uma pessoa”, por exemplo, mesmo se tratando de uma individualidade física, não pode ser considerada um objeto. Nesse caso, objetos são coisas inanimadas: um celular, lápis, fone, bolinhas de gude etc.

A noção de volume de um sólido remete-nos à ideia de quanto espaço determinado objeto ocupa no mundo físico. Costa *et al.* (2012, p. 150), descrevem que

[...] o volume de um sólido qualquer pode ser representado por um número real positivo, e deve-se compreender que o volume de um sólido é um número real positivo associado a ele, tal que: sólidos congruentes têm o mesmo volume; se um sólido  $S$  é a reunião de dois sólidos  $S_1$  e  $S_2$  que não têm pontos interiores comuns, então o volume de  $S$  é a soma dos volumes de  $S_1$  com  $S_2$ .

A noção de volume conduz-nos a entender ou a saber quantos tijolos cabem dentro da caçamba ou carroceria de um veículo ou quanta água é necessária para encher certo reservatório. Estes são exemplos práticos do uso do volume, considerando-se vivências diárias.

No entanto, em estudos de Serra (2010), no qual aborda sobre capacidade e volume de um objeto, este afirma que embora essas grandezas possam ser consideradas bastante semelhantes, existem diferenças entre elas: deve-se perceber que o volume é a quantidade de espaço que um objeto ocupa, enquanto capacidade é a quantidade máxima de uma substância que um objeto pode conter; o volume de um objeto é a medida do espaço coberto por ela, que deve ser considerado de forma tridimensional, no que se refere ao comprimento, largura e altura.

Nisso, pode-se entender que a capacidade de um objeto é a quantidade de espaço interior ao objeto que pode ser preenchido, bem como que volume é sempre medido em unidades cúbicas, como centímetros cúbicos, metros cúbicos, enquanto a capacidade é medida em unidades métricas, como mililitros, litros, galões, libras etc., e, quando um objeto é sólido, ele tem apenas volume, mas se um objeto é oco, ele tem volume e capacidade, como o cubo e o cilindro, respectivamente, que eram os exemplos utilizados pelo professor em sala de aula na ocasião.

### **Trajatória Hipotética de Aprendizagem e sua relação com o construtivismo**

No construtivismo, a base do pensamento consiste em considerar que há uma construção do conhecimento e, que para que isso aconteça, deverão ser criados métodos que estimulem essa construção, ou seja, ensinar o aprendiz a aprender.

Em função dessa proposição construtivista, visualizamos uma relação professor-aluno horizontalizada, que, para nós, é uma das principais características do ensino construtivista. Quando o erro é colocado como oportunidade para aprender, o uso do método de “salas em círculo” – como estava na ocasião da tomada de dados – pode indicar certa interatividade no processo e quiçá proporcionar uma avaliação contínua da apreensão do conhecimento.

Para Piaget, a aprendizagem ocorre por uma construção ativa de significado, e não por receptividade passiva. Ele interpreta que uma dada sala de aula ‘produtiva’, assim como construtivista, é aquela em que se desenvolve ativas construções centradas no aluno. O professor propõe nesta sala de aula, experiências que garantem ao aluno manipular objetos, pesquisar, elaborar hipóteses, inventar e/ou imitar. Nesse sentido, o papel primordial do professor é ajudar e/ou facilitar o processo.

É daí que Goulart (2013) adverte que as essenciais características do construtivismo devem criar métodos que estimulem que: o centro de aprendizagem seja o aluno; o professor não seja um mero transmissor de informações, mas sim um facilitador e orientador do processo de aprendizagem. Diante desse cenário, a experiência de vida do aluno e seus conhecimentos, anteriormente adquiridos, são de fundamental importância; os níveis de conhecimento, amadurecimento e desenvolvimento de cada aluno deve ser respeitado e levado em consideração no processo de aprendizagem. Ao docente cabe, também, incentivar os alunos na busca por novos conhecimentos e na aprendizagem de novos conceitos. E, por fim, um novo conhecimento ou conceito é aprendido a partir de conhecimentos e conceitos anteriores.

Pesquisadores como Pires (2009) e Simon (1995), criticam a interpretação errada, simplista e vaga na concepção construtivista, de que o professor deve deixar os alunos à vontade, para interagirem e aprenderem.

Concordamos plenamente com Simon quando considera excessivamente simplista aproveitar a conexão do construtivismo para o ensino com a romântica noção de “deixar os alunos sozinhos e eles construirão o seu conhecimento matemático”. Ou então: colocar alunos em grupos e deixá-los socializar o modo como eles resolvem seus problemas (Pires, 2009, p. 154).

Por concordarmos com tais afirmações, ou seja, buscando por uma condução do processo de aprendizado dos estudantes, aproximamos nossos planejamentos para o desenvolvimento de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA). Pautando-nos em Simon (1995) e em Rossetto (2016), produzimos uma THA com enfoque no modelo do ciclo de ensino de Matemática.

Simon (1995, p. 155) ressalta que “o que foi observado em relação aos alunos mudou sua perspectiva sobre o conhecimento dos alunos e quanto à concepção matemática envolvida (seu mapa interno)”. O autor complementa que o termo “mapa”, neste contexto, é usado para enfatizar que o

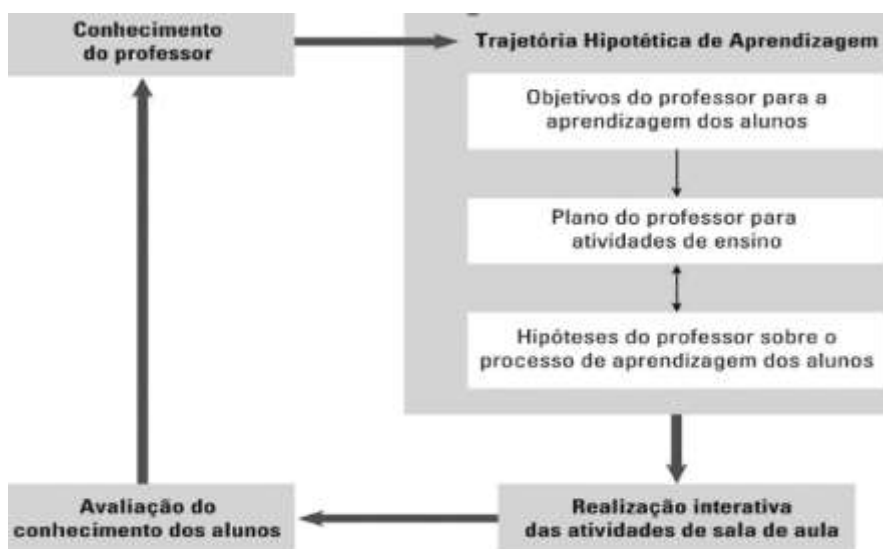
conhecimento do professor pode ser considerado um “mapa” que traduz como ele se empenha na construção da compreensão dos alunos e identifica o potencial de aprendizagem deles.

Simon (1995) desenvolveu a ideia de que os objetivos de aprendizagem, as atividades de aprendizagem e o conhecimento dos estudantes que estarão envolvidos no processo de aprendizagem são elementos importantes na construção de uma THA, isto é, são a parte-chave do que ele denomina ciclo de aprendizagem.

O ciclo é uma idealização proposta a partir de modelos de ensino, que visam a aprendizagem, e o objetivo do primeiro planejamento pode, necessariamente, ser modificado e/ou transformado para se adequar ao coletivo de alunos (Simon, 1995). De acordo com o mesmo autor, “quando um determinado tema é desenvolvido em sala de aula, as atividades elaboradas anteriormente podem sofrer ajustes em consequência das observações do professor em relação às atitudes dos alunos” (Simon, 1995, p. 27).

É neste contexto que apresentamos a Figura 1, em que Pires (2009) representa o “Ciclo de Ensino de Matemática Abreviado”, que se inicia no *Conhecimento do professor*, move-se para a elaboração de uma THA que, na continuidade, é aplicada em sala de aula, converge para a *avaliação dos alunos* quanto ao que aprenderam e retorna para o ponto inicial *Conhecimento do professor* que pode, a partir deste ponto, construir o seu “mapa” sobre o processo vivenciado.

Figura 1 – Ciclo de Ensino de Matemática Abreviado



Fonte: Pires (2009) *apud* Simon (1995, p. 29)

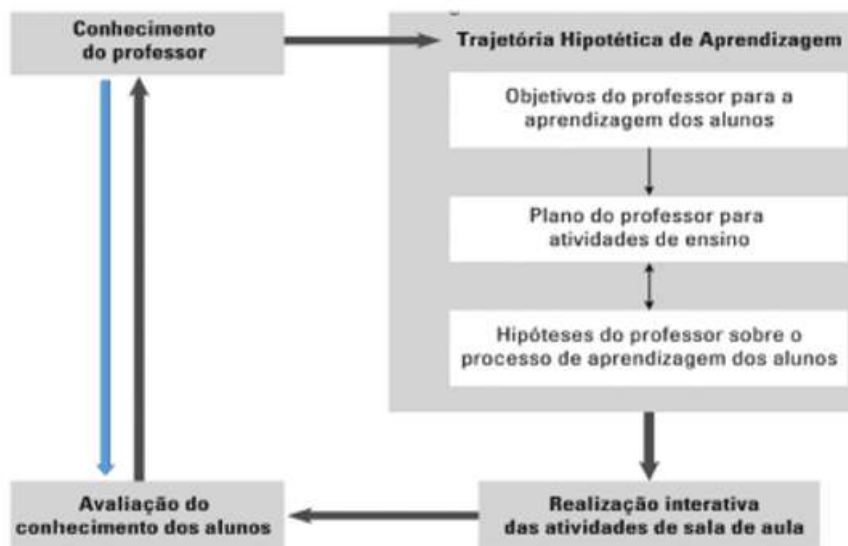
Segundo esta figura, a análise de episódios de ensino investigados por Simon contribuiu para o desenvolvimento do “Ciclo de Ensino de Matemática Abreviado”, e que ele pode ser considerado um modelo de inter-relações cíclicas dos aspectos do conhecimento do professor, dos seus pensamentos e de suas atitudes. No terceiro item referente à THA, cabe esclarecer que Simon (1995) refere-se às

*hipóteses* que o professor consegue elaborar primariamente a respeito do conhecimento dos alunos e do próprio processo de aprendizagem deles, e isso foi explicitado para enfatizar que não temos acesso direto aos conhecimentos deles e nem à certeza de que estão aprendendo ou já aprenderam. Por isso, é necessário que se interprete a THA como relações cíclicas de ensino para que em algum momento encontremos indícios de aprendizagem.

Considerando as concepções construtivistas de aprendizagem de Simon (1995), passamos a observar o processo de ensino em sala de aula de um professor da disciplina de Geometria, no que concerne ao conceito de volume. Estas observações e o desenvolvimento da pesquisa ocorreram no ano de 2023 em Moçambique, na Província da Zambézia, na Escola Secundária Geral de Coalane, na cidade de Quelimane.

Relativamente a este pensamento, e baseado nos cenários atuais do Ciclo de Ensino de Matemática, tendo como base nossas constatações e vivências, apresentamos nossa contradição em relação ao processo atual, no qual o processo de avaliação nas escolas moçambicanas deve ser visto “de cima para baixo e voltando para cima”, conforme apresentado na Figura 2. Pois os professores moçambicanos, como atestado por nossa prática e vivência, primam pela avaliação dos conhecimentos dos estudantes.

Figura 2 – Ciclo de Ensino de Matemática Abreviado Adaptado



Fonte: Adaptado pelos autores, considerando Pires (2009) *apud* Simon (1995, p. 29)

A contradição exposta sustenta-se no fato de que os alunos hoje em dia avaliam os professores, mesmo não usando um instrumento avaliativo, uma vez que estes conseguem afirmar, de forma clara, que os seus professores têm dificuldades na lecionação de conteúdos de Geometria, ou seja, que no processo de ensino estes não integram teoria e prática, e, segundo eles, isso deveria ser considerado

pelo professor de modo a melhorar sua proposta metodológica, e conduzindo os alunos a visualizarem a relação dos conteúdos escolares com elementos do cotidiano.

## **Procedimentos metodológicos**

Para Minayo, Deslandes e Gomes (2008, p. 204), “a pesquisa qualitativa preocupa-se, portanto, com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais”.

Considerando o exposto até o momento, neste artigo, pode-se afirmar que a pesquisa qualitativa foi a abordagem mais indicada e que melhor se enquadrou com a investigação pretendida, pois ela permitiu compreender as “ideias” que os alunos apresentavam sobre o conceito de volume.

Por isso, assumimos o que desenvolvemos como uma abordagem qualitativa de investigação e fizemos uso dos procedimentos interpretativos indicados pela Análise de Conteúdo (AC) definida como sendo

[...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição de conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) dessas mensagens (Bardin, 2016, p. 25).

Segundo Lakatos e Marconi (2003, p. 40), “a metodologia é a explicação minuciosa, detalhada, rigorosa e exata de toda ação desenvolvida no método de trabalho da pesquisa”. Em virtude dos referenciais metodológicos assumidos, compreendemos que a metodologia é um conjunto detalhado e sequencial de métodos e técnicas científicas a serem executados ao longo da pesquisa, de tal modo que se consiga atingir os objetivos propostos e, ao mesmo tempo, atender aos critérios: agilidade; eficácia; confiabilidade de informação.

Diante do exposto, descrevemos, metodologicamente, neste artigo: os passos que foram seguidos para conduzir a THA; o processo de coleta de dados; detalhes a respeito da interpretação das informações coletadas. Também justificamos que essas descrições não foram apresentadas nesta ordem, mas sim quando foram necessárias para esclarecer ao leitor sobre suas predisposições. E que, no nosso caso, dedicamo-nos, principalmente, à análise das manifestações daqueles alunos em relação ao conceito de volume de objetos.

Quanto ao uso de entrevistas nesta pesquisa, acreditamos que elas proporcionaram uma interação entre o pesquisador e o informante, e podemos afirmar que elas contribuíram positivamente com a realização desta pesquisa, porque serviram de meio para a coleta de dados indispensáveis para o alcance dos objetivos pretendidos, tendo sido entrevistados 8 dos 86 alunos selecionados através de uma amostragem aleatória, pois em nossa compreensão, para entrevistar os 86 alunos precisaríamos



dispender de um período de tempo que não dispúnhamos. Todavia, os dados coletados por meio de questionários e a gravação das aulas serão usados em momentos futuros para a elaboração de propostas de intervenção e a elaboração de oficinas, que serão ministradas aos professores em um processo formativo focado na elaboração de diversas Trajetórias que considerem outros conteúdos matemáticos.

Rosa e Arnoldi (2007, p. 17) descrevem que:

Entrevista é uma técnica de investigação em que o investigador se apresenta frente ao entrevistado e lhe formula perguntas, com o objetivo de obtenção de informação ou dados que interessam à investigação. A entrevista é, portanto, uma forma de interação social, mas, especificamente, é um diálogo assimétrico, em que uma das partes busca coletar dados e a outra se apresenta como fonte da informação.

Após a coleta foi realizada a transcrição das entrevistas e a análise das mensagens que os alunos buscavam explicitar em suas respostas, e para isso voltamos nossos olhares para a linguagem utilizada por eles.

Segundo Zanella (2013, p. 126), esse processo descrito no parágrafo anterior pode ser considerado uma técnica que “segue alguns passos, a saber: identificação do repertório que envolve a transcrição das entrevistas, o isolamento das similaridades ou diferenças nas respostas e a classificação das abordagens por títulos”.

Por fim, para compor o universo da pesquisa, o critério foi ser estudante daquela turma e que estivesse frequentando a 10ª Classe na mesma turma e naquela Escola Secundária. A turma era composta, naquela ocasião, por 86 alunos matriculados no curso diurno. Destes 86 alunos, a pesquisa trabalhou com 8 deles, cuja idade variava entre 15 e 16 anos. Para selecioná-los foram ‘sorteados’ 8 números dos 86 que organizavam os alunos em uma lista de frequência e controle escolar. Após esse procedimento de seleção, os alunos foram codificados por: E<sub>1</sub> a E<sub>8</sub>.

## **A proposta de pesquisa e a constituição da THA**

Na perspectiva de autores tais como Piaget (1995) e Simon (2004), uma THA deve ser constituída por objetivos de aprendizagem e pelas tarefas matemáticas que poderão ser utilizadas para promover a aprendizagem dos alunos e pelas hipóteses que eles podem elaborar durante o processo.

Tendo em mente que a Matemática está sendo usada como forma de resolver problemas preexistentes, entre eles a necessidade das pessoas em contar e medir objetos presentes no cotidiano, e que sua importância já está posta, apesar de todo o rigor inerente à linguagem Matemática, os conteúdos que ela nos apresenta podem ser considerados como ferramenta eficiente para o entendimento de muitas situações.

A ideia de desenvolver esta proposta de pesquisa, tendo a THA como eixo norteador, surgiu da necessidade da contextualização de conhecimentos para os alunos moçambicanos referentes ao conteúdo de Geometria, pois tudo que nos rodeia possui uma forma, e pode apresentar área ou volume, mas a realidade encontrada na sociedade não coaduna com os objetivos traçados nos programas de ensino e nos livros didáticos, pois alguns alunos não conseguem fazer uma ‘ponte’ entre o que é apresentado a eles em sala de aula, por meio do que está inserido no currículo escolar, e seu cotidiano.

Das obras consultadas entre autores como Serra (2010) e Oliveira (2024), podemos entender que a Geometria é uma das áreas menos abstratas da Matemática, diferentemente das outras áreas da Matemática, como a Álgebra, a Estatística, o Cálculo etc., pois ela permite identificar e caracterizar as mais diversas formas ‘concretas’ consideradas em nossa investigação – objetos do cotidiano. A Geometria espacial, em particular, estuda inúmeras formas concretas, abordando sobre a área e volume destes sólidos ou objetos, mostrando que a Matemática não se limita apenas a teorias e símbolos, mas, também, investiga e formula padrões úteis e que fazem parte do dia a dia das pessoas.

Todavia, e baseado nos cenários atuais do Ciclo de Ensino de Matemática, tendo como base nossas constatações e vivências do modo como ela é introduzida nas escolas, o que não coaduna com a proposta apresentada por alguns filósofos matemáticos, como o caso de Hans Freudenthal (1905-1990) na sua abordagem sobre Educação Matemática Realística (RME), principalmente no cálculo de áreas e volume de sólidos, ainda é muito superficial e de maneira abstrata, pois, em geral, ao aluno não é dada a oportunidade de observar e manipular objetos com os quais ele convive.

Diante de tais argumentações, na continuidade desta seção, dedicamo-nos a apresentar detalhes sobre a THA planejada e aplicada na 10ª Classe do Ensino Secundário moçambicano, após a observação inicial de como o professor regente da turma conduzia suas aulas por meio de seus planejamentos.

Considerando a essencialidade dos objetos para o armazenamento de diversos elementos e/ou substâncias utilizadas pelas pessoas diariamente, e que esta viabilidade está relacionada ao espaço interno desses objetos, nota-se que o conceito de volume pode ser fundamental para a eficácia do acondicionamento, o que justifica o levantamento das concepções dos alunos a respeito deste conceito geométrico.

A produção da THA ocorreu em dois momentos: um inicial, em que elaboramos uma relação de ações que precisaríamos realizar e que foram pautadas no processo hipotético de aprendizagem, descritas a seguir.

1. Identificar as concepções que os alunos da 10ª Classe apresentam sobre o conceito de volume de um objeto;

2. Apresentar as diferentes opiniões dos alunos da 10ª Classe, sobre a interpretação que eles fazem do conceito de volume de um objeto;
3. Verificar como os alunos da 10ª Classe relacionam os conhecimentos teóricos sobre volume adquiridos em sala de aula e o seu cotidiano;
4. Interpretar o conceito de volume de um objeto;
5. Discutir a diferença entre o volume e a capacidade;
6. Discutir a diferença entre o volume e o peso de um objeto.

Tendo esses seis itens em mente, optamos por fazer uma triagem acerca das concepções que os alunos apresentavam e/ou mostravam no aprendizado sobre o conceito de volume de objetos do seu cotidiano. Isso ocorreu em sala de aula, diante de conversas, discussões e reflexões orientadas pelos três primeiros itens da lista anterior. Neste momento tínhamos presente em sala de aula os 86 alunos.

Posto isto, e a partir dos resultados das avaliações feitas aos alunos e tarefas em sala de aula, foi possível concluir que as maiores dificuldades encontradas pelos alunos no ambiente escolar estavam relacionadas aos conteúdos matemáticos. Acredita-se, mediante o observado, que esse fato pode estar associado ao grau de abstração com que os conceitos matemáticos eram abordados em sala de aula.

Com relação à grandeza do volume, por exemplo, ficou explícito que o nível de abstração necessária para se alcançar a aprendizagem desse conceito foi condicionante, pois, segundo os depoimentos dados por eles em sala de aula, nem todos os objetos possuem uma forma ‘simples’ para se fazer esses cálculos.

Este fato nos conduziu, em um segundo momento, a inserir na THA (em construção) alguns exemplos para a reflexão dos estudantes sobre a diferenciação de volume e capacidade, e que resumimos nos itens a, b e c.

- a. Num tanque cheio de água, onde podemos encontrar o volume e onde podemos encontrar a capacidade?
- b. Entre dois objetos diferentes, sendo uma garrafa e um jarro, ambos de 1l (1 litro), estes têm diferença em uma das medidas, volume ou capacidade. Se enchermos os dois recipientes de água, o volume da água altera ou mantém-se o mesmo?
- c. Um recipiente tem uma capacidade de 250ml e um volume de 300 centímetros cúbicos. Qual é a relação que poderá se fazer entre o potencial para acomodar o produto e a área que este objeto ocupa?

Outras dificuldades evidenciadas que foram encontradas ao longo dos trabalhos em grupo têm a ver com: a explicação da diferença entre volume e peso; a utilização do conceito de volume no dia a dia; o cálculo do volume de determinados sólidos geométricos.

Diante dessas constatações, demos continuidade à elaboração da THA, considerando:

- i. A abordagem superficial de conceitos geométricos nos manuais dos alunos;

- ii. A necessidade de conhecer as propriedades da Geometria a partir do conceito de volume de objeto geométrico;
- iii. Identificar objetos geométricos e reconhecer o volume de um objeto geométrico a partir do seu peso;
- iv. Usar instrumentos de medição para que os alunos associem o cálculo do volume com situações cotidianas em que se têm objetos e/ou figuras geométricas, buscando pela interpretação do conceito de volume do objeto geométrico;
- v. Utilizar calculadoras científicas, assim como o *software* Geogebra, para a validação das respostas das atividades previamente apresentadas.

Do processo hipotético de aprendizagem, descrito nos itens de 1. a 6., seguido de argumentações exemplificadas pelos itens a., b. e c., e, posteriormente, da realização de entrevistas, finalizamos a elaboração da THA, que teve suas atividades sugeridas levando em pauta os itens i. a v.

Antes de iniciarmos a apresentação dos dados e sua análise na próxima seção, cabe indicar que durante a produção da THA, não deixamos de inserir questionamentos relativos às opiniões dos alunos na conceitualização de volume de um objeto e aos raciocínios utilizados por eles para realizar a ‘ponte’ entre os conceitos aprendidos em sala de aula e sua utilização diária.

### Apresentação e análise dos dados

Em função do objetivo desta pesquisa, as respostas dos entrevistados foram codificadas e organizadas, questão a questão respondida, a fim de facilitar o processo analítico. A seguir são apresentados os principais aspectos da análise das respostas apresentadas pelos alunos, durante a entrevista pela qual foram submetidos.

A análise descritiva considerou acertos e erros, sem deixar por trás o raciocínio que os alunos apresentaram na conceitualização do assunto em debate.

No Quadro 1 organizamos as respostas dos estudantes para a primeira pergunta apresentada a eles. Na primeira coluna inserimos a pergunta, na segunda coluna uma relação de respostas representativas do que foi comentado, e na última coluna o código dos alunos que foram submetidos à entrevista. Esclarecemos que o que inserimos na coluna 2 – Respostas apresentadas – passou por uma edição, pois nem sempre as falas dos estudantes eram idênticas, contudo, assemelhavam-se.

**Quadro 1** – Conhecimento sobre o conceito de volume de um objeto

Pergunta	Respostas apresentadas	Códigos
Nas classes anteriores vocês estudaram sobre volume de objetos.	Volume é o espaço dentro de uma figura.	E <sub>4</sub>
	Volume é a unidade que quantifica um objeto, ou seja, volume é o tamanho de um objeto.	E <sub>6</sub> , E <sub>7</sub> , E <sub>2</sub>
	Volume é a quantidade de espaço e lugar ocupado.	E <sub>3</sub>

Na sua opinião o que é volume de um objeto?	Volume é a medida que quantifica um determinado espaço.	E <sub>5</sub>
	Volume são objetos que usamos para fazer barulho, ou seja, objetos que emitem som.	E <sub>1</sub> , E <sub>8</sub>

Fonte: Os autores.

A partir deste quadro, constata-se que dentre os 8 entrevistados apenas 2 deles (E<sub>3</sub> e E<sub>5</sub>) apresentaram uma definição próxima da definição correta, de que volume é a quantidade de espaço tridimensional ocupado por um determinado objeto.

E<sub>4</sub> apresenta a definição de capacidade de um objeto ou recipiente e não, necessariamente, a definição da grandeza em discussão. Das definições apresentadas pelos estudantes E<sub>6</sub>, E<sub>7</sub> e E<sub>2</sub>, embora aparentem estar próximas da definição correta, pode-se notar que esta definição não só está incompleta, como sai do contexto, pois indica o tamanho que o objeto possui e não o espaço que ele ocupa.

Tais constatações remete-nos ao que Van Der Mer (2017, p. 5) afirma:

[...], verifica-se que muitas são as dificuldades dos alunos na resolução de problemas simples envolvendo volume de figuras geométricas; em muitos casos, os alunos utilizam mecanicamente as fórmulas, sem demonstrar o real entendimento do seu conceito.

A partir das respostas apresentadas por E<sub>1</sub> e E<sub>8</sub>, que estão distantes do que se esperava ao considerarmos as conceituações matemáticas presentes nos referenciais teóricos utilizados como exemplares, constata-se que relacionam volume de um objeto ao som que emitem, sem qualquer menção aos conhecimentos geométricos.

Esses fatos externados em relação à primeira pergunta analisada remete-nos a Viana (2015), em que, diante de um levantamento realizado, concluiu que os alunos nas provas de Matemática não conseguiam resolver problemas “simples” de comparação de volume e capacidade, e concluiu que eles pareciam não compreender o conceito de volume e demonstravam competência métrica pouco desenvolvida.

No Quadro 2 organizamos as respostas dos estudantes para a segunda pergunta apresentada a eles, mantendo a forma de organização estipulada para o Quadro 1.

## Quadro 2 – Conhecimento sobre volume de um objeto

Pergunta	Respostas apresentadas	Códigos
Apresente dois objetos que na sua opinião possuem volume, e diga qual	Coluna e auriculares; Amplificador, Televisão.	E <sub>1</sub> , E <sub>8</sub>
	Tambor: espaço que ele ocupa; Árvore: espaço que ela ocupa.	E <sub>2</sub>
	Sem resposta.	E <sub>3</sub>

a parte do objeto que corresponde ao volume.	Bola: parte de dentro, onde o ar é acumulado; Copo: parte de dentro, onde coloca-se algo.	E <sub>4</sub>
	Copo e garrafa: o espaço existente no interior.	E <sub>5</sub>
	Jarro.	E <sub>6</sub>
	Bola e casa.	E <sub>7</sub>

Fonte: Os autores.

Com base nas respostas apresentadas, constata-se que o estudante E<sub>2</sub> foi o único a indicar um objeto e a dizer a parte do objeto correspondente ao seu volume. Pois, pela definição dada para a questão anterior, nota-se que o volume do tambor ou da árvore, é o espaço que estes objetos ocupam no meio que estão inseridos.

Consegue-se observar que muitos alunos, por vezes, fazem confusão entre o conceito de volume e capacidade de um objeto, como é o caso dos estudantes E<sub>4</sub> e E<sub>5</sub>, pois a parte que eles sugerem ser a que corresponde ao volume é, na realidade, o que corresponde à capacidade. Isso fica evidente ao verificarmos que para eles só os objetos ocos possuem volume, ou seja, aqueles que apresentam um espaço interno.

Apesar de os objetos ocos de apresentarem volume, a parte que corresponde a este volume não é o espaço interno, mas sim a soma do espaço interno e externo. Pela definição de capacidade, observa-se que ela corresponde ao volume interno de um objeto, ou seja, despreza-se a parte externa do objeto. O volume representa o que um corpo ocupa no espaço; e a capacidade, o quanto ele é capaz de armazenar em seu interior.

Morais, Bellemain e Lima (2014) desenvolveram uma investigação em que buscaram entender como o conceito de volume é ensinado, por considerar que a maneira como ele é abordado é um dos fatores que pode explicar as dificuldades de aprendizagem dos alunos.

Os estudantes E<sub>6</sub> e E<sub>7</sub> não compreenderam o conceito de volume, por isso tornou-se difícil estabelecer a que parte do objeto correspondia o volume; o que se constata é que tentaram adivinhar, imaginando alguns objetos. As manifestações desses dois estudantes nos remetem ao que nos apresentam Maia *et al.* (2017), quando indicam que os materiais manipuláveis podem ser entendidos como objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar, eles podem ser objetos reais, do cotidiano, e que contribuem para representar uma ideia. Os autores ainda destacam que o uso de materiais manipuláveis no ensino do volume pode ajudar na compreensão dos conceitos relativos aos sólidos geométricos.

No Quadro 3 organizamos as respostas dos estudantes para a terceira pergunta.

### Quadro 3 – Conhecimento sobre as unidades de medição de volume de um objeto

Pergunta	Respostas apresentadas	Códigos
Quais são as unidades de	Litro ( <i>l</i> ).	E <sub>6</sub> , E <sub>5</sub> , E <sub>4</sub> , E <sub>3</sub>
	Litro ( <i>l</i> ) e mililitro ( <i>ml</i> ).	E <sub>2</sub>

medição do volume que você conhece?	Sem resposta.	E <sub>8</sub> , E <sub>7</sub>
-------------------------------------	---------------	---------------------------------

Fonte: Os autores.

Pelas respostas apresentadas, constata-se que todos os alunos cometeram erros em suas justificações ou não deram respostas. Eles, pelo que se percebe, não conseguiram dizer, ao certo, em quais unidades de volume ele pode ser medido. Como já constatado, há uma ‘confusão’ entre grandeza de volume e de capacidade, as unidades que foram apresentadas pelos alunos são unidades de capacidade que podem ter relação com as unidades de volume, contudo não são unidades equivalentes. Isto é, quando se apresentar os múltiplos e submúltiplos de litro, compreende-se que temos a capacidade que um objeto ou recipiente contém.

Oliveira (2024) descreve que as medidas de volume e as medidas de capacidade são muitas vezes “misturadas” ou “confundidas”, pois ao se medir o volume de um objeto busca-se saber a capacidade de armazenamento que este objeto possui.

No Quadro 4 organizamos as respostas dos estudantes para a quarta pergunta.

#### Quadro 4 – Conhecimento sobre a alteração de volume de um objeto

Pergunta	Respostas apresentadas	Códigos
Entre dois objetos diferentes, sendo uma garrafa e um jarro, ambos de 1l (1 litro), estes têm diferença em uma das medidas, volume ou capacidade. Se enchermos os dois recipientes de água, o volume da água altera ou mantém-se o mesmo?	Mantém. Porque a quantidade de água que estava na garrafa é a mesma quantidade que está no jarro.	E <sub>8</sub> , E <sub>1</sub>
	Mantém. Porque os recipientes são todos de 1l (1 litro).	E <sub>6</sub> , E <sub>3</sub>
	Se altera. Porque ao movimentar-se a água da garrafa para o jarro há perdas de algumas gotas e assim a quantidade não será a mesma.	E <sub>7</sub>
	Se altera. Sem argumentos.	E <sub>5</sub>
	Mantém. Porque os recipientes têm a mesma capacidade.	E <sub>5</sub>

Fonte: Os autores.

Mediante o que temos no Quadro 4, constata-se que, dentre os 8 alunos entrevistados, 6 deles afirmaram que o volume da água não é alterado, ou seja, permanece o mesmo, o que constitui uma verdade. E 2 deles posicionaram-se na argumentação de que o volume da água é alterado.

Temos então dois grupos de resposta e tal fato nos remete ao que o professor que ministra este conteúdo poderia realizar em sala de aula, para que os alunos reavaliem suas percepções sobre a alteração. Mediante tal divergência, questionamos todos os professores que ministravam a disciplina de Matemática na Escola Secundária Geral de Coalane a respeito de qual seriam suas respostas para esta Questão 4 e obtivemos por unanimidade que não existe alteração.

## Considerações finais

Neste artigo apresentamos informações a respeito da elaboração e aplicação de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem para o ensino de Geometria espacial, para alunos da 10ª Classe em uma escola moçambicana localizada na cidade de Quelimane. A elaboração da THA foi realizada por meio da observação inicial de como as aulas eram conduzidas pelo professor regente da turma e pautada em respostas dadas pelos alunos às quatro perguntas expostas neste artigo e nas discussões ocorridas em sala de aula com toda a turma, ou seja, os 86 alunos da 10ª Classe.

Diante das respostas coletadas para a Pergunta 1 – Nas classes anteriores vocês estudaram sobre volume de objetos. Na sua opinião o que é volume de um objeto? – pudemos concluir que os 8 alunos sorteados, dentre os 86 que estudavam na 10ª Classe, não possuem conhecimento suficiente para responder a tal questionamento.

Com relação às respostas dadas para a Pergunta 2 – Apresente dois objetos que na sua opinião possuem volume, e diga qual a parte do objeto que corresponde ao volume – era esperado que os alunos apresentassem dois objetos que possuíam volume, e que dissessem qual era a parte do objeto relativa ao volume. Tendo em vista que para a primeira pergunta somente dois se aproximaram de uma resposta adequada, esperava-se que pelo menos eles respondessem algo satisfatório, fato que não ocorreu, ou seja, ficou evidente que os participantes da pesquisa confundem volume com capacidade.

No que diz respeito à Pergunta 3 – Quais são as unidades de medição do volume que você conhece? – constatou-se que a totalidade desconhece estas unidades, uma vez que estes não deram resposta satisfatória.

Por meio da Pergunta 4 – Entre dois objetos diferentes, sendo uma garrafa e um jarro, ambos de 1l (1 litro), estes têm diferença em uma das medidas, volume ou capacidade. Se enchermos os dois recipientes de água, o volume da água altera ou mantém-se o mesmo? – pudemos evidenciar que 6 dos 8 participantes perceberam que o volume do objeto não altera e que esta quantidade de acertos está relacionada a exemplos práticos utilizados por eles para justificarem suas respostas e que as atividades práticas sustentaram a assimilação desse conhecimento.

Para a continuidade desta investigação, pretende-se, em momento futuro, retomar esses alunos e reaplicar as quatro perguntas a eles, quando estiverem frequentando a 12ª Classe. Também, pretende-se, como descrito anteriormente, elaborar oficinas formativas para docentes, apresentando-lhes uma proposta de THA e sugerindo a elaboração de outras.

Recebido em: 09/04/2024

Aprovado em: 24/06/2024



## Referências

- ABREU, M. P. **A ordem do Progresso**. Dois séculos de política econômica no Brasil. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.
- BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.
- COSTA, F. A.; RODRIGUES, C.; CRUZ, E. C.; FRADÃO, S. **Repensar as TIC na educação: o professor como agente transformador**. Carnaxide: Santillana, 2012.
- FERREIRA, A. B. H. **O minidicionário da língua portuguesa**. 4. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2002.
- GOULART, I. B. **Piaget: experiências básicas para utilização pelo professor**. Petrópolis: Vozes, 2013.
- LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. **Fundamentos de metodologia científica**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.
- MAIA, C. N.; SÁ NETO, F.; COSTA, M.; BRETAS, M. L. **História das prisões no Brasil II**. 2. ed. Rio de Janeiro: Rocco, 2017.
- MINAYO, M. C. S.; DESLANDES, S. F.; GOMES, R. **Pesquisa social: teoria, método e criatividade**. Petrópolis: Vozes, 2008.
- MORAIS, L. B.; BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. Análise de situações de volume em livros didáticos de matemática do ensino médio à luz da teoria dos campos conceituais. **Educação Matemática de Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 1, p. 25-46, 2014.
- OLIVEIRA, R. R. **“Volume de sólidos geométricos”**. Brasil Escola. 2024. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/volume-de-solidos-geometricos.htm>. Acesso: em 8 abr. 2024.
- PIAGET, J. **Seis estudos de Psicologia**. 21. ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1995.
- PIRES, C. M. C. Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 11, n. 1, p. 145-166, 2009.
- ROSA, M. V. F. P. C.; ARNOLDI, M. A. G. C. **A entrevista na pesquisa qualitativa: mecanismo para validação dos resultados**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- ROSSETTO, H. H. P. **Trajectoria hipotética de aprendizagem sob um olhar realístico**. 2016. 104 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.
- SERRA, S. C. C. **Conceito de Volume: uma experiência no 6º ano de Escolaridade**. 2010. 103 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Instituto Politécnico de Lisboa e Escola Superior de Educação, Lisboa, 2010.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, [s. l.], v. 26, n. 1, p. 114-145, 1995.

VAN DER MER, I. A. S. **Aprendizagem do conceito de volume**: uma proposta didática para o ensino fundamental. 2017. 40 f. Produto educacional. Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Federal de Uberlândia, Ituiutaba, 2017.

VAZ, D. A. F.; PEREIRA, N. C. S. Formação do conceito de volume nos anos iniciais do Ensino Fundamental: um experimento didático formativo baseado na perspectiva da Teoria do Ensino Desenvolvimental. **Bolema**, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 779-818, 2017.

VIANA, O. A. Solução de problemas envolvendo a noção de volume: um estudo exploratório com alunos do ensino médio. *In*: SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais** [...]. Pirenópolis, 2015.

ZANELLA, L. C. H. **Metodologia de pesquisa**. 2. ed. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2013.