

Do exercício ao problema: a potencialização dos registros de representação semiótica pelo GeoGebra

From exercise to problem: the potentialization of semiotic representation registers by GeoGebra

Josias Neubert Savóis¹

Ricardo Silva Ribeiro²

Márcia Rodrigues Notare³

RESUMO

Este artigo apresenta a análise de uma experiência sobre a resolução de um exercício de matemática em sala de aula envolvendo o cálculo de área de um losango e a sua transformação em problema de matemática usando a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. Mais precisamente, pretende-se mostrar através desta experiência que o software de geometria dinâmica GeoGebra contribui para a transição de um exercício para um problema, passagem esta que se fundamenta na exploração e mobilização dos diferentes tratamentos e conversões em diferentes representações semióticas. A atividade foi desenvolvida em uma turma de estudantes do segundo ano do Ensino Médio, com o uso do GeoGebra sendo fundamental para um estudo mais dinâmico do objeto geométrico, permitindo aos alunos manipular o objeto, identificar elementos e enriquecer a figura com diferentes objetos geométricos. A análise dessa abordagem evidencia que o GeoGebra potencializa tanto a construção de tratamentos no registro figural quanto a interação dos alunos com o objeto, possibilitando um novo olhar sobre alguns tópicos de geometria e uma participação mais ativa na produção de conhecimento.

Palavras-chave: Representações Semióticas; Resolução de Problemas; GeoGebra; Geometria.

ABSTRACT

This article presents the analysis of an experiment on solving a mathematics exercise in the classroom involving calculating the area of a rhombus and transforming it into a mathematics problem using Duval's Theory of Registers of Semiotic Representation. More precisely, we intend to show through this experience that the GeoGebra dynamic geometry software contributes to the transition from an exercise to a problem, a transition that is based on the exploration and mobilization of different treatments and conversions into different semiotic representations. The activity was developed in a class of second-year high school students, with the use of GeoGebra being fundamental for a more dynamic study of the geometric object, allowing students to manipulate the object, identify elements and enrich the figure with different geometric objects. The analysis of this approach shows that GeoGebra enhances both the construction of treatments in the figural register and the interaction of students with the object, enabling a new look at some geometry topics and a more active participation in the production of knowledge.

¹ Professor de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – IFRS *campus* Osório, RS. E-mail: josias.savois@osorio.ifrs.edu.br.

² Professor de Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – IFRS *campus* Restinga, RS. E-mail: ricardo.ribeiro@restinga.ifrs.edu.br.

³ Professora do Instituto de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRGS. Porto Alegre, RS. E-mail: marcia.notare@ufrgs.br.

Introdução

Através de uma expressiva quantidade de pesquisas realizadas ao longo de várias décadas, o filósofo e psicólogo francês Raymond Duval elaborou a Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS), teoria amplamente aceita por pesquisadores da área da Educação Matemática e que tem como um dos seus pilares conceituais o fato de que “os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele” (Duval, 2012, p. 268), sendo essa distinção a chave para a compreensão da matemática. Neste sentido, a TRRS é uma teoria que ajuda a compreender como se dá o funcionamento cognitivo do pensamento, mais precisamente quando se trata do raciocínio matemático. Em consonância com esta teoria, no âmbito do sistema organizacional do currículo escolar brasileiro, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) define que “compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas” (Brasil, 2018, p. 531), é uma das competências específicas de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio. Esta competência está relacionada diretamente ao ato de representar um objeto matemático, ato este que pressupõe a elaboração de registros para evocar tal objeto, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos inevitavelmente se dá por meio das suas representações (Brasil, 2018, p. 529).

Outra vertente muito importante nas pesquisas em Educação Matemática é a que aprofunda os impactos do uso das tecnologias digitais no ensino de matemática, principalmente as que defendem o uso de softwares ou ambientes de geometria dinâmica (AGD). Um dos softwares mais pesquisados e utilizados em atividades de ensino de matemática é o software GeoGebra, devido ao seu layout amigável, acesso livre e uma gama considerável de recursos algébricos e geométricos (Gravina, 2015; Mendes, 2020; Pacheco, 2019; Silva, 2023). Corroborando com esta vertente, a BNCC destaca que “o uso de tecnologias possibilita aos estudantes alternativas de experiências variadas e facilitadoras de aprendizagens que reforçam a capacidade de raciocinar logicamente, formular e testar conjecturas, avaliar a validade de raciocínios e construir argumentações” (Brasil, 2018, p. 536).

Esta pesquisa apresenta uma investigação de caráter qualitativo que foi realizada em uma atividade presencial de sala de aula, em uma turma de segundo ano do curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio, do Instituto Federal de Educação, Ciência e tecnologia do Rio Grande do Sul – IFRS *campus* Osório, no município de Osório - RS. A abordagem metodológica durante a aplicação da atividade com os estudantes se caracterizou pela transição pelas quatro etapas definidas por George Polya (2006) no que se conhece atualmente como

metodologia de Resolução de Problemas (RP) e apresentou fundamentação teórica tanto pela Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS) de Duval quanto pelo uso de Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), como o software GeoGebra, usados nesta atividade como teoria e ferramenta potencializadoras da aprendizagem de matemática, respectivamente. Estas concepções teóricas e o uso do GeoGebra possibilitaram a transformação de uma resolução de exercício de geometria em uma verdadeira resolução de problema alinhada às concepções de alguns pesquisadores desta área sobre a diferença entre um exercício e um problema de matemática, tais como Dante (1998), Echeverria e Pozo (1998) e Polya (2006).

Sendo assim, são apresentadas inicialmente neste artigo as etapas da RP defendidas por Polya (2006) e a distinção entre exercício e resolução de problema de matemática. Na seção seguinte, serão abordados os principais pontos da TRRS de Duval, que aliado com o que será exposto na quarta seção sobre o uso de AGD, fundamenta o uso das potencialidades do software GeoGebra no tratamento dinâmico de registros figurais. A próxima seção conta com a apresentação da metodologia empregada na pesquisa, culminando em uma exposição e análise detalhada da atividade realizada em sala de aula, abordada na sequência. As considerações finais e apontamentos de futuras pesquisas sobre o tema exposto neste trabalho são tecidas na última seção, seguidas das referências bibliográficas que embasaram esta pesquisa.

A diferença entre exercício e problema de matemática

Uma das metodologias amplamente defendida por pesquisadores da Educação Matemática (Dante, 1998; Echeverria; Pozo, 1998; Onuchic; Allevato, 2011 e Polya, 2006) é a de Resolução de Problemas. Embora os autores citados apresentem estratégias distintas para o que consideram como uma técnica para resolver problemas de matemática, as abordagens defendidas por cada autor apresentam traços de semelhança com a teoria desenvolvida originalmente pelo matemático húngaro George Polya, no livro, escrito em 1945, que foi traduzido para o português como *A arte de resolver problemas* (2006). Polya (2006) descreve uma estratégia baseada em quatro passos para a resolução de um problema de matemática:

Primeiro, temos de *compreender* o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos ideia da resolução, para estabelecermos um *plano*. Terceiro, *executamos* o nosso plano. Quarto, fazemos um *retrospecto* da resolução completa, revendo-a e discutindo-a (Polya, 2006, p. 4-5).

Buscando elucidar estes quatro passos essenciais, para abordar um problema de matemática e conseguir resolvê-lo, Polya (2006) afirma que o aluno deve estar em condições de identificar as partes principais do problema, como a incógnita, os dados e a condicionante (*compreensão*). Em seguida, deve questionar-se se já resolveu algum problema correlato e se pode utilizar tal estratégia

no problema atual (*plano, estratégias*), analisando se cada passo executado está certo e se é possível demonstrar que o passo está certo (*execução do plano*). Por fim, o aluno deve se perguntar se é possível verificar o resultado, se é possível empregar o método utilizado em algum outro problema, semelhante ou não, ou se poderia ter usado um caminho diferente na resolução (*retrospectiva*), realizando assim uma abordagem que proporciona uma compreensão mais profunda do problema resolvido e dos conceitos assimilados no processo de resolução. Esta etapa de retrospectiva possibilita também que o aluno tome consciência do surgimento de generalizações, ou seja, propriedades ou técnicas matemáticas que podem ser empregadas em situações gerais dependendo das características comuns dos objetos relacionados.

No entanto, é importante tomar cuidado ao utilizar a Resolução de Problemas nas aulas de matemática, pois Polya (2006) alerta que “o problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado à sua apresentação natural e interessante” (Polya, 2006, p. 5). Neste sentido, deve-se ter a compreensão de que resolver problemas é diferente de resolver exercícios. Echeverria e Pozo (1998) afirmam que um problema se diferencia de um exercício na medida em que, neste último caso, dispomos e utilizamos mecanismos que nos levam, de forma imediata, à solução. Por isso, é possível que uma mesma situação represente um problema para uma pessoa enquanto para outra esse problema não existe, quer porque ela não se interesse pela situação, quer porque possua mecanismos para resolvê-la com um investimento mínimo de recursos cognitivos e pode reduzi-la a um simples exercício (Echeverria; Pozo, 1998).

Alinhado a isto, Dante (1998, p. 43) afirma que um “problema ou problema-processo, é a descrição de uma situação na qual se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta sua solução”. O autor esclarece ainda que os problemas-processo aguçam a curiosidade do aluno e que “a resolução de um problema-processo exige uma certa dose de iniciativa e criatividade aliada ao conhecimento de algumas estratégias” (Dante, 1998, p. 43). Em consonância com o exposto por estes autores, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, da 5ª a 8ª série, trazem a definição de que “o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada” (Brasil, 1998, p. 41).

Deste modo, percebe-se que a resolução de um problema depende do sujeito que está tentando resolvê-lo, do mesmo modo que a organização, as estratégias e conhecimentos acionados durante a resolução dependem de como o aluno age e reflete sobre o problema. Cabe ao professor selecionar atividades que possam trazer este tipo de exploração em sala de aula, mesmo que esta possa ser considerada como um exercício para alguns, ou um problema interessante para outros, ou

ainda, um problema intransponível para outros, visto toda a heterogeneidade que existe em um grupo de alunos em uma mesma sala de aula. Duval, em entrevista a Freitas e Rezende (2013, p. 26) afirma que “Fazer matemática é resolver problemas, mas cada professor sabe o quanto isto se torna um caso de divórcio entre a grande maioria dos alunos e o ensino de matemática”, e continua explicando que, não raro, ao se deparar com um problema há uma impotência por parte do aluno em saber o que fazer. Pode-se pensar que os problemas propostos em sala de aula deveriam partir de situações concretas ou problemas do cotidiano do aluno, mas Duval argumenta que “o fato de propor os problemas a partir de situações concretas não ensina nem a resolver um problema nem a aplicar conhecimentos matemáticos para resolver problemas reais fora da sala de aula” (Freitas; Rezende, 2013, p. 26). Este posicionamento do autor em relação a não necessidade de, ao se falar em resolução de problemas de matemática, ter que partir de situações concretas, é defendido também pela BNCC, que estabelece que uma das competências específicas de matemática para o ensino fundamental é:

Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados) (Brasil, 2018, p. 267).

Para esclarecer o seu ponto de vista, onde é necessário o entendimento de como se trabalha em matemática para resolver problemas e como devem ser utilizados os conhecimentos matemáticos a fim de resolver problemas reais, Duval enfatiza que “é preciso primeiro tomar consciência das transformações de representações semióticas, por meio de mudanças de registros e pelos tratamentos específicos de cada registro” (Freitas; Rezende, 2013, p. 27). Surge então uma visão de que, para que os alunos sejam capazes de resolver problemas, e não apenas aplicar um ou mais conhecimentos matemáticos escolhidos por quem elabora o problema, é “preciso organizar sequências de tarefas específicas em função de variáveis cognitivas concernentes à face oculta da atividade matemática” (Freitas; Rezende, 2013, p. 27).

Sendo assim, foi elaborada uma atividade específica, a qual é o objeto de estudo da presente pesquisa, que contemplasse inicialmente a definição de exercício dada pelos autores supracitados, mas que pudesse ser transformada em um problema de matemática através da junção da fundamentação teórica dada pela TRRS com as possibilidades exploratórias alcançadas com o uso de um ambiente de geometria dinâmica, neste caso, o software GeoGebra. Busca-se a seguir compreender os principais conceitos da TRRS de Duval, não para usá-la somente como uma fonte de embasamento teórico, mas como uma fonte de inspiração e compreensão mais profunda de como se desenvolve o raciocínio matemático, ou, de modo mais geral, o funcionamento cognitivo do pensamento.

A Teoria dos Registros de Representações Semióticas

Embora exista uma grande quantidade de pesquisas sobre a TRRS, as exposições realizadas neste trabalho se baseiam quase que exclusivamente nas obras de Raymond Duval, pesquisador que elaborou e aprimorou esta teoria. Duval (2012, p. 266-8) define que “registro é um campo de variação de representação semiótica em função de fatores cognitivos que lhe são próprios”, complementando que “os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos ‘reais’ ou ‘físicos’” e que para acessá-los é necessário usar diferentes representações semióticas destes objetos.

Alinhado à TRRS de Duval, a BNCC afirma que “é possível verificar de forma inequívoca a importância das representações para a compreensão de fatos, ideias e conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas” (Brasil, 2018, p. 529). Duval chama esta relação de paradoxo cognitivo do pensamento matemático, pois, “de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, de outro, é somente por meio de representações semióticas que a atividade sobre objetos matemáticos se torna possível” (Duval, 2012, p. 268). Alinhado a isto, o autor explica que “as representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento” (Duval, 2012, p. 269) que, dito de outra forma, uma “representação semiótica é uma representação de uma ideia ou um objeto do saber, construída a partir da mobilização de um sistema de sinais” (Henriques; Almouloud, 2016, p. 467).

No ensino da matemática, muitos objetos de estudos só são compreendidos pelo estudante quando este se familiariza com a simbologia própria empregada para descrever tal objeto, assimilando assim os conceitos ligados a ele. Defendendo a importância de se utilizar diferentes registros de representações no ensino de matemática, a BNCC expressa que:

Nesse sentido, na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da matemática (Brasil, 2018, p. 529).

Para fazer uma distinção entre as representações semióticas e as representações mentais, Duval (2012, p. 269) esclarece que “as representações mentais recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado”.

O autor ainda chama de “*semiose* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e de *noesis* a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a *noesis* é inseparável da *semiose*” (Duval, 2012, p. 270), e usa isso para explicar que o paradoxo cognitivo do

pensamento matemático e as dificuldades de aprendizagem em matemática são decorrentes do fato de que não há noesis sem semiose. Duval (2012) complementa que a apreensão conceitual dos objetos matemáticos depende da coordenação de muitos registros de representação semiótica e da necessidade de o objeto ser reconhecido pelo indivíduo em cada uma de suas representações e, que “o pensamento e a atividade matemática dependem totalmente da sinergia entre registros, que têm possibilidades cognitivas heterogêneas” (Duval, 2016, p. 4). Ele dá exemplo de quatro tipos de registros: figural, gráfico, sistemas de escrita (numérico, algébrico e simbólico) e registro em linguagem natural, classificando estes dois últimos em registros que produzem representações discursivas, e os dois primeiros como sendo registros que produzem representações visuais (Duval, 2016).

Duval (2012) acredita que um sistema semiótico deve permitir três atividades cognitivas ligadas à semiose, para que possa ser considerado um registro de representação, sendo elas: a formação de uma representação identificável, os tratamentos e as conversões. Segundo o autor, esta formação de uma representação identificável “deve respeitar regras (gramaticais para as línguas naturais, regras de formação num sistema formal, entraves de construção para as figuras...)” (Duval, 2012, p. 271), regras estas apenas de conformidade, de organização do que se pode ou não fazer em um determinado registro de representação.

Segundo Duval (2012, p. 272), “o tratamento de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro”. A título de exemplo, podemos citar as transformações que realizamos ao resolver uma determinada expressão numérica ou uma equação algébrica: no primeiro exemplo, as operações com os números são tratamentos no registro de representação numérico, com regras de conformidade definidas para cada símbolo para que possam ser realizadas as operações entre números; e no segundo exemplo, os tratamentos ocorrem durante a manipulação da equação pertencente ao registro algébrico, obedecendo uma sistematização das operações e significados para cada símbolo, letras ou valores numéricos. Já a conversão “é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial” (Duval, 2012, p. 272). Como exemplo podemos citar a conversão de um objeto geométrico, como um triângulo, de seu registro figural para a sua representação no registro analítico (no plano cartesiano). E, se a intenção for o cálculo de sua área, esta pode ser encontrada a partir da conversão dos elementos do registro geométrico (medidas de base, altura, lados, ângulos internos) para uma representação algébrica (fórmulas envolvendo base e altura, ou medidas de lado, ou medidas de lado e ângulo), ou ainda, fazendo a conversão dos elementos do triângulo (vértices, na representação analítica) para a representação matricial, que podemos considerar aqui como um registro de representação numérico, e os tratamentos neste novo registro fornecerão a área desejada.

Duval (2012, p. 277) defende que “a conversão desempenha um papel essencial na conceitualização” e, conseqüentemente, na compreensão de um objeto matemático, fato este que se pretende evidenciar na descrição e análise da atividade de ensino realizada em sala de aula com o auxílio do software GeoGebra, objeto desta pesquisa. A conexão entre TRRS e o software GeoGebra será abordada no tópico a seguir.

O GeoGebra como ferramenta para explorar os tratamentos no registro figural

Segundo Pacheco (2019, p. 198), “a utilização de novas tecnologias de informação no ensino de matemática, especificamente os softwares educacionais, tem despertado grande interesse. A maioria dos educadores defende o uso dessa ferramenta para auxiliar na construção do conhecimento”. Algumas dessas ferramentas de grande potencial disponíveis atualmente são os softwares de geometria dinâmica. Gravina (2015) salienta que uma das potencialidades dos softwares de geometria dinâmica é que eles permitem a construção de figuras dinâmicas que guardam invariantes geométricos, declarados ou não no procedimento de construção. A autora afirma que “uma figura dinâmica é entendida como uma coleção de ‘desenhos em movimento’, que respeita um procedimento de construção” (Gravina, 2015, p. 243). Atualmente, um dos softwares mais utilizados para auxiliar o ensino de geometria por meio de construções geométricas dinâmicas e suas possibilidades de auxílio na aprendizagem de argumentação matemática, é o software GeoGebra, como fica evidenciado nos trabalhos de Amado; Sanchez; Pinto, 2015; Barbosa; Meneghetti; Poffal, 2019; Borsoi, 2016; Gravina, 2015; Hespanhol et *al.*, 2016; Mendes, 2020; Pacheco, 2019; Silva, 2023 e Souza; Azevedo; Alves, 2021.

Pacheco (2019) argumenta que um dos fatores que contribuíram para o GeoGebra tomar espaço como um dos AGD mais utilizados no ambiente escolar atualmente é o fato deste software “possibilitar o trabalho simultâneo no ambiente geométrico e algébrico, podendo ser utilizado de forma livre” (Pacheco, 2019, p. 198). Já Barbosa, Meneghetti e Poffal (2019) salientam que ao usar um AGD, a imagem ou componente figural se transforma, mas as propriedades ou componente conceitual dos objetos se mantém, o que contribui para amenizar as dificuldades de representação geradas de ferramentas ou recursos didáticos estáticos, como lápis e papel e livros didáticos. Corroborando com os autores supracitados, Silva (2023, p. 11) afirma que o uso do software GeoGebra em sala de aula “pode trazer muitos benefícios para o ensino de Geometria no ensino médio, sendo o principal deles a possibilidade de os alunos verem na prática a construção de objetos”. Além disso, o dinamismo alcançado nas construções geométricas realizadas neste tipo de software, seja pela movimentação de objetos livres na construção, seja pelo uso de comandos específicos, como é o caso do comando *Controle Deslizante* do GeoGebra, serve como atrativo para

que o estudante possa participar ativamente da atividade da aula e buscar compreender as propriedades e conceitos geométricos envolvidos na construção.

Buscando relacionar o uso de um AGD com a TRRS, Gravina (2015) expõe algumas potencialidades semióticas do software GeoGebra para o ensino de geometria, esclarecendo que a manipulação de uma figura dinâmica neste software pode introduzir um novo tratamento para o registro figural, propiciando o desenvolvimento de habilidades nos alunos a respeito destes tratamentos. Argumenta ainda que “a ‘estabilidade do desenho sob ação de movimento’ é um registro dinâmico que desafia para construções com controle geométrico e este processo propicia a fusão entre os componentes conceitual/proposicional e figural” (Gravina, 2015, p. 244). A autora acrescenta que a construção e a manipulação de uma figura geométrica dinâmica ajudam a dar significado e a mostrar ao estudante a necessidade de uma demonstração matemática e enfatiza que, “com as figuras dinâmicas, as definições e os teoremas da geometria passam a ter componente figural com infinidade de representações” (Gravina, 2015, p. 244), que podem contribuir para o desenvolvimento de habilidades para identificar propriedades matemáticas já conhecidas, além de melhorar as argumentações e o tratamento simbólico e em linguagem natural sobre estes objetos.

Alinhado a isso, a BNCC parte do “pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações” (Brasil, 2018, p. 276), enfatizando que os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos podem estabelecer com outros componentes e com outros temas matemáticos, ou seja, é importante utilizar de diferentes recursos didáticos para permitir que cada estudante estabeleça as suas conexões, faça seus questionamentos e conjecturas e construa os seus próprios resultados e conhecimentos.

Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas. Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização (Brasil, 2018, p. 276).

De acordo com o que foi exposto, acredita-se nas potencialidades do uso do GeoGebra como uma ferramenta didática capaz de ajudar tanto na identificação quanto na construção de propriedades matemáticas, através da visualização e manipulação dinâmica do objeto, levando o estudante a uma compreensão mais ampla dele. Nesta atividade, o software foi utilizado com o intuito de explorar os diferentes tratamentos que poderiam ser dados ao objeto geométrico losango, permitindo aos estudantes analisar estes tratamentos e realizar conversões tanto para o registro algébrico e numérico, quanto para a linguagem natural, percebendo assim a riqueza de detalhes que pode surgir de uma única construção geométrica realizada no GeoGebra.

Metodologia

De acordo com Gil (2002, p. 42), esta pesquisa pode ser classificada como explicativa, pois “têm como preocupação central identificar os fatores que determinam ou que contribuem para a ocorrência dos fenômenos”, e quanto aos procedimentos técnico-metodológicos, trata-se de uma pesquisa experimental, uma vez que “consiste em determinar um objeto de estudo, selecionar as variáveis que seriam capazes de influenciá-lo, definir as formas de controle e de observação dos efeitos que a variável produz no objeto” (Gil, 2002, p. 47).

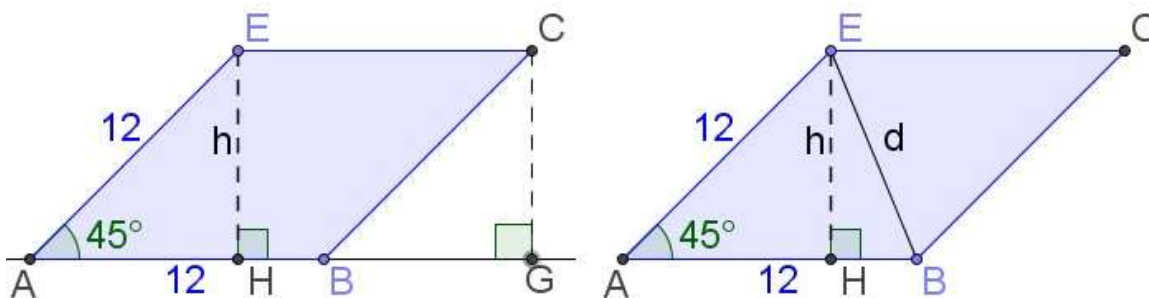
A atividade envolvendo um exercício de geometria e a sua transformação em uma atividade de resolução de problemas embasada na TRRS, no uso do AGD GeoGebra e na metodologia de Resolução de Problemas, foi realizada em uma aula presencial de dois períodos de 50 minutos cada, em uma turma de 20 alunos do segundo ano do curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio do IFRS – *campus* Osório, em que o autor 1 atuava como professor de matemática. A investigação iniciou-se através da elaboração do material pelos pesquisadores, que incluíam a construção do objeto geométrico no GeoGebra e a disponibilização dos applets com essas construções na página do Moodle da turma, para que os alunos pudessem acessar durante a realização da atividade para manipular o objeto geométrico losango construído. Cada applet era composto por uma construção do losango no software GeoGebra, mas com elementos diferentes para a manipulação e possível enriquecimento ou modificações por parte do aluno, já que o applet funciona como uma janela do GeoGebra, com todas as suas funcionalidades, embutida na página do Moodle. Duas construções iniciais estavam disponíveis para os alunos mesmo antes do início da aula (figuras 1(a) e 3(a)), e ao término da aula foi liberado para a visualização e manipulação dos alunos, através do comando *Tornar Visível*, também via Moodle, outros dois applets (figuras 4(a) e 4(b)) cada um com uma construção um pouco mais complexa da figura losango original, applets estes inicialmente escondido dos alunos pelo uso do comando *Ocultar* do Moodle. Estas construções apresentavam um enriquecimento maior da figura a partir da inserção de novos elementos geométricos, diferentes daqueles que seriam explorados em aula, e tinham por objetivo ficar de atividade extraclasse para que os alunos realizassem novas resoluções do problema a partir da figura construída. A realização da atividade foi desenvolvida com a turma de estudantes em sala de aula, pelo autor 1, com os tratamentos algébricos sendo expostos no quadro branco e os tratamentos figurais abordados com o uso do projetor e do software GeoGebra, sendo as construções geométricas acompanhadas e manipuladas por alguns estudantes que acessaram o Moodle através de seus smartphones para ter acesso aos applets. Após a aplicação da atividade, a investigação teve continuidade através das discussões dos pesquisadores para a realização da análise dos resultados, baseados principalmente nas observações do pesquisador aplicador (autor 1) e pelos

relatos dos estudantes durante a realização da atividade. Tentou-se também realizar uma análise tanto pelo número de acessos e visualizações do applet 1 disponibilizado no Moodle e usado concomitantemente com a aula, quanto pelos outros applets que não foram explorados em aula por falta de tempo, visto que a atividade se estendeu bastante em torno da construção inicial do losango e das possibilidades de resolução do problema. Foi deixada uma *Tarefa* aberta no Moodle para que os alunos enviassem qualquer uma das suas manipulações da construção geométrica no GeoGebra em qualquer um dos applets, mas em ambos os casos o quantitativo de acessos e envios de *Tarefa* foram bem insuficientes para que pudesse ser realizado uma análise satisfatória e conclusiva em relação ao que estava sendo investigado na pesquisa.

Descrição da resolução do problema da área do losango e análise dos resultados

O início da atividade, após o acesso a construção geométrica realizada no GeoGebra, foi dado pela exposição da figura inicial e pela leitura do enunciado da questão. O enunciado do exercício em questão pedia para calcular a área de um losango de lado 12 m e um dos ângulos internos medindo 45° (Dolce; Pompeo, 2013). As figuras 1(a) e 1(b), construídas no GeoGebra, ilustram a figura inicial, embora já tenham sido enriquecidas pelo autor com a construção das alturas \overline{EH} e \overline{CG} em relação à base \overline{AB} (figura 1(a)) e com a diagonal menor \overline{EB} (figura 1(b)).

Figura 1 – Losango como um paralelogramo (a), e composto por dois triângulos, ΔABE e ΔBCE (b)



Fonte: Elaborada pelos autores (2023)

A partir desta primeira representação do objeto matemático losango no registro figural, questionou-se os alunos se era possível considerar o objeto como sendo um paralelogramo. Alguns manifestaram-se positivamente sobre esta possibilidade, e o problema de encontrar o valor da altura h foi resolvido com a razão trigonométrica seno de 45° no ΔAHE . Percebe-se inicialmente a identificação do triângulo retângulo ΔAHE a partir de um tratamento no registro figural, e em seguida, uma conversão do registro figural para o registro algébrico, em que o tratamento inicial do ΔAHE neste novo registro parte da relação trigonométrica $\text{sen } 45^\circ = \frac{h}{12}$ e, com uma substituição

numérica, encontra-se $h = 6\sqrt{2} m$. De posse do valor da altura do paralelogramo (losango) ABCE em relação à base \overline{AB} de medida $12 m$, e assumindo que a área do paralelogramo é dada por $A = b \times h$, chegamos que $A_{ABCE} = 12 \times 6\sqrt{2} = 72\sqrt{2}$, ou seja, a área do losango ABCE vale $72\sqrt{2} m^2$.

O que foi realizado até este momento da aula deve ser considerado apenas como uma resolução de um exercício de acordo com os autores supracitados anteriormente, pois muitos alunos já tinham percebido que tratar o losango exposto como sendo um paralelogramo e partir da fórmula $A = b \times h$ que eles já conheciam, solucionava a questão. O professor-pesquisador aproveitou para ressaltar que a altura do paralelogramo poderia ser o segmento \overline{CG} e seu valor poderia ter sido calculado através do ΔBGC , retângulo em G e com $\widehat{CBG} = 45^\circ$, de forma semelhante ao cálculo anterior para a altura h , mas partindo de um outro tratamento no registro figural da representação geométrica do objeto da figura 1(a).

Foi neste momento que o professor-pesquisador fez um questionamento que levou ao que consideramos a problematização do exercício: “teria outra maneira de resolver o exercício?”. Os alunos ficaram na defensiva, sem saber se respondiam sim ou não, indicando que a situação se encaminhava para uma RP já que os alunos poderiam não dispor de mecanismos, algoritmos ou fórmulas que levassem a uma nova resolução da área do losango de forma imediata, conforme definição de exercício dada por Dante (1998), Echeverria e Pozo (1998) e Brasil (1998). O professor-pesquisador então propôs traçar a diagonal \overline{EB} , conforme figuras 1(b) e 2(a), para tentar o cálculo da área do losango através da soma das áreas dos triângulos ABE e EBC, congruentes por LLL (ou por LAL, já que $\widehat{BCE} \equiv \widehat{BAE}$, por serem ângulos opostos em um paralelogramo).

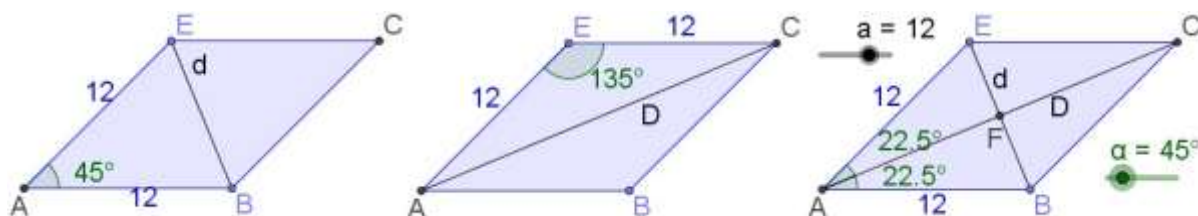
Desencadeou-se aí, à luz de Duval, um novo tratamento para o losango no registro figural ao pensar no objeto como dois triângulos repartidos pela diagonal menor \overline{EB} , e a conversão para o registro de representação algébrica permitiu a abordagem através de dois novos tratamentos neste registro de chegada. Dada a imprevisibilidade da situação didática que começou a se desenvolver, considera-se aqui o ponto inicial da transformação do exercício em problema, pois muitos alunos não sabiam se a abordagem diferente da questão iria dar certo e, como a situação era uma novidade, parecia não ter um caminho pré-estabelecido ou conhecido a percorrer, como o uso de uma fórmula ou algoritmo a ser exercitado. O primeiro destes tratamentos surgiu quando um aluno manifestou, em linguagem natural, que dava para calcular a área do ΔABE através da fórmula “área igual a base vezes altura sobre dois”⁴. Fazendo a conversão deste tratamento da área do triângulo, do registro em língua materna para o registro algébrico, obteve-se que $A_{\Delta} = \frac{b \times h}{2}$ que, neste caso específico, ficaria $A_{\Delta ABE} = \frac{\overline{AB} \times \overline{EH}}{2}$, conforme figura 1(b). Organizando a fala do aluno e fazendo os devidos

⁴ Fez-se aqui o uso do registro em linguagem natural para mostrar mais uma variação de representação semiótica de uma fórmula geralmente tratada apenas no registro algébrico.

tratamentos no registro algébrico, chegou-se que $A_{ABCE} = 2 \times A_{\Delta ABE} = 2 \times \frac{\overline{AB} \times \overline{EH}}{2} = 2 \times \frac{12 \times 6\sqrt{2}}{2} = 2 \times 36\sqrt{2} = 72\sqrt{2} m^2$, que é o mesmo valor encontrado anteriormente. O segundo tratamento algébrico, baseado na mesma representação figural, foi sugerido pelo professor-pesquisador, ao lembrar os estudantes que, quando se tem um triângulo em que são conhecidos dois dos seus lados e o ângulo compreendido entre estes lados (figura 2(a)), é possível calcular a área deste triângulo através da metade do produto entre os lados e o seno do ângulo citado, que algebricamente é dada por $A_{\Delta} = \frac{a \times b \times \text{sen } \alpha}{2}$. Avançando neste tratamento, obteve-se $A_{ABCE} = 2 \times A_{\Delta ABE} = 2 \times \frac{a \times b \times \text{sen } \alpha}{2} = 2 \times \frac{\overline{AB} \times \overline{AE} \times \text{sen } 45^\circ}{2} = 12 \times 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{144\sqrt{2}}{2} = 72\sqrt{2} m^2$, novamente o valor da área do losango ABCE.

Mesmo lançando mão de duas fórmulas para o cálculo da área do losango, a situação pode ser considerada um problema para muitos alunos, pois o professor teve que fazer uma retomada da origem das fórmulas, deduzindo no quadro as fórmulas para cálculo de áreas de triângulos que foram utilizadas, enfatizando que o uso delas depende das informações e elementos que o problema nos traz, como é o caso de se ter as medidas dos lados e os valores dos ângulos internos do losango. Alguns alunos lembraram rapidamente da mecânica de resolução usando o triângulo citado e foram resolvendo junto com o professor, mas alguns alunos apresentaram dificuldades até mesmo para a identificação dos elementos na figura. Vale ressaltar que as etapas de Polya (2006) para a RP foram usadas frequentemente, algumas de maneira explícita, como neste caso a *compreensão* do problema, a *estratégia* e *execução do plano*, e outras de maneira implícita, como a *retrospectiva*, com questionamentos sobre a resolução de algum problema semelhante a este ou como usar este tipo de resolução para solucionar outro problema.

Figura 2 – Losango partido em triângulos pela diagonal menor \overline{EB} (a), pela diagonal maior \overline{AC} (b) e com ângulos de $22,5^\circ$ (c)



Fonte: Elaborada pelos autores (2023)

Encorajado pela fluidez das resoluções e as possibilidades de resolução que foram surgindo, um aluno sugeriu que uma abordagem semelhante a esta última resolução descrita, poderia ser realizada utilizando a diagonal maior \overline{AC} do losango para reparti-lo nos triângulos ACE e ABC (novo tratamento no registro figural), mas neste caso, usando o ângulo de 135° ao invés do ângulo

de 45° (figura 2(b)). Assim, a conversão do registro figural para o registro de representação algébrica possibilitou neste registro de chegada um tratamento semelhante ao já exposto, em que $A_{ABCE} = 2 \times A_{\Delta ACE} = 2 \times \frac{\overline{EC} \times \overline{AE} \times \text{sen } 135^\circ}{2} = 12 \times 12 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{144\sqrt{2}}{2} = 72\sqrt{2} \text{ m}^2$, que devido ao fato de que $\text{sen } 45^\circ = \text{sen } 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, mostrou aos alunos que o cálculo das áreas dos triângulos formados pela partição do losango pela diagonal menor ou pela diagonal maior era idêntico e com o mesmo grau de dificuldade. Foi enfatizado, neste momento da aula, que o cálculo da área do ΔACE pela relação $A_{\Delta ACE} = \frac{\overline{AC} \times \overline{EF}}{2}$, precisaria das medidas das diagonais $\overline{EB} = d$ e $\overline{AC} = D$ do losango, e de posse destes valores, era possível mobilizar um novo tratamento algébrico através da relação $A_{ABCE} = \frac{D \times d}{2}$ para o cálculo da área do losango.

A pedido de alguns alunos e, tomando como representação geométrica do losango a figura 2(c), construída e enriquecida com a ferramenta *Controle Deslizante* por um aluno enquanto o professor-pesquisador organizava o quadro branco, realizaram-se algumas movimentações no lado e em um ângulo interno do losango, fazendo os alunos perceberem que os valores mudavam, mas as propriedades da figura se mantinham, sendo este momento da aula importante para mostrar a importância e o potencial do AGD GeoGebra. Para não confundir os alunos, optou-se por não realizar nenhuma resolução de cálculo de área do losango com medidas tanto de lado quanto de ângulo alteradas pelo *Controle Deslizante*, visto que, dependendo dos valores de ângulo ou de lado fixado, alguns cálculos como o de diagonais ou altura do losango poderiam assumir valores mais complexos ou estranhos para os alunos. Voltando para o formato e medidas originais do losango, mas com o enriquecimento da figura pelas diagonais e ângulos, percebeu-se que para encontrar o valor das diagonais d e D , seria preciso usar a relação conhecida como Lei dos Cossenos. Aplicando a Lei dos Cossenos no ΔABE , ou seja, fazendo uma substituição numérica na fórmula algébrica, viu-se que $d^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \times 12 \times 12 \times \cos 45^\circ = 288 - 288 \frac{\sqrt{2}}{2} = 144(2 - \sqrt{2})$, chegando que $d = 12\sqrt{2 - \sqrt{2}} \text{ m}$. De modo análogo, usando a Lei dos Cossenos no ΔACE , chegou-se no valor da diagonal maior \overline{AC} como sendo $D = 12\sqrt{2 + \sqrt{2}} \text{ m}$. De posse do valor das duas diagonais, mesmo com uma representação numérica considerada não muito amigável pelos estudantes, partiu-se para o cálculo da área do losango a fim de resolver o problema através de outro tratamento algébrico e, através das substituições numéricas na fórmula algébrica, obteve-se que $A_{ABCE} = \frac{D \times d}{2} = \frac{12\sqrt{2 + \sqrt{2}} \times 12\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} = \frac{144\sqrt{4 - 2}}{2} = 72\sqrt{2} \text{ m}^2$, validando novamente os cálculos e tratamentos anteriores.

Após essa resolução, um aluno disse que ainda daria para pensar na figura 2(c) como sendo formada por quatro triângulos retângulos congruentes, sendo eles, ΔAFB , ΔAFE , ΔECF e ΔBCF . O

professor-pesquisador concordou com o estudante, mas alertou que os cálculos poderiam se tornar mais complexos, já que a área $A_{ABCE} = 4 \times A_{\Delta AFE} = 4 \times \frac{\overline{AF} \times \overline{EF}}{2}$ poderia ser calculada através de dois tratamentos algébricos diferentes: ou em função das metades das diagonais, ou em função de seno e cosseno do ângulo de $22,5^\circ$, visto que, os segmentos \overline{AF} e \overline{EF} que representam as metades das diagonais do losango (e são os catetos de um dos quatro triângulos retângulos congruentes), poderiam ser calculados usando os valores de d e D e dividindo-os por 2, ou, pela aplicação das razões trigonométricas seno e cosseno referente ao ângulo de $22,5^\circ$.

Para a surpresa do professor, uma boa parte dos alunos pediu para resolver o problema de mais uma maneira. Então, partindo da interação dos estudantes na aula, e para aproveitar este novo tratamento do losango no registro figural, através do seu fracionamento em quatro triângulos retângulos congruentes, e lembrando que Duval defende que “o principal caminho das aprendizagens de base matemática não pode ser somente a automatização de certos tratamentos ou a compreensão de noções, mas deve ser a coordenação de diferentes registros de representação” (Duval, 2012, p. 284), decidiu-se em consenso com a turma, realizar outra nova abordagem para a resolução do problema. Tendo em mente que, para Duval (2012, p. 285) “o que é importante não é a mudança de registro a ser efetuada, mas os tratamentos que poderão ser realizados na representação obtida após a mudança de registro”, o professor-pesquisador decidiu executar a conversão do tratamento no registro figural exposto na figura 2(c) para o registro algébrico, com novo tratamento neste registro através do cálculo das medidas dos segmentos escritos em função do seno e cosseno do ângulo \widehat{EAF} . Considerando o ΔAFE e aplicando $\text{sen } 22,5^\circ = \frac{\overline{EF}}{12}$ e $\text{cos } 22,5^\circ = \frac{\overline{AF}}{12}$, chegou-se nas expressões $\overline{EF} = 12 \times \text{sen } 22,5^\circ$ e $\overline{AF} = 12 \times \text{cos } 22,5^\circ$. Sendo assim, $A_{ABCE} = 4 \times A_{\Delta AFE} = 4 \times \frac{\overline{AF} \times \overline{EF}}{2} = 4 \times \frac{12 \times \text{sen } 22,5^\circ \times 12 \times \text{cos } 22,5^\circ}{2} = 288 \times \text{sen } 22,5^\circ \times \text{cos } 22,5^\circ$.

Neste momento, com o uso da calculadora, um aluno informou que o valor da área através dos cálculos com seno e cosseno era $101,82337649086... m^2$, valor confirmado por outro estudante que calculou, em decimais, o valor da área $A_{ABCE} = 72\sqrt{2} m^2$, finalizando assim a resolução do problema.

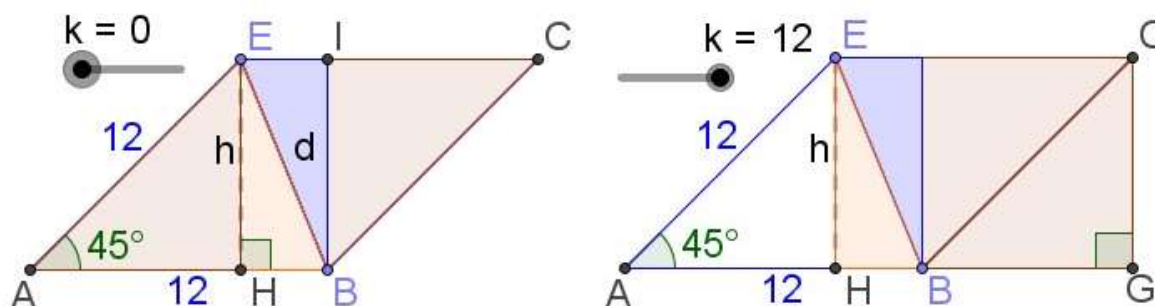
Durante o desenvolvimento da atividade, a postura do professor-pesquisador sempre foi de incentivo à investigação, transitando entre as quatro etapas da metodologia de Resolução de Problemas propostas por Polya, através da identificação dos elementos do problema (*compreensão*), da organização dos dados para perceber e construir caminhos de resolução a serem seguidos (*elaboração do plano*), da resolução passo a passo a cada novo tratamento (*execução*) e através de questionamentos aos alunos sobre outras possibilidades de resolver a questão ou mesmo de identificar outros elementos mensuráveis no objeto geométrico em questão (*retrospectiva*). Vale ressaltar que, duas destas etapas, a *elaboração do plano* e a *retrospectiva*, foram potencializadas

pela versatilidade que o software de geometria dinâmica GeoGebra apresenta pois, cada novo tratamento figural do objeto construído no GeoGebra, demandava uma nova estratégia para a resolução do problema e permitia uma análise dos caminhos já utilizados e dos novos caminhos a serem explorados, possibilitando assim a utilização e apropriação de diferentes propriedades geométricas por parte dos estudantes.

Ao término da aula, o professor “tornou visível” na página do Moodle da turma os arquivos (applets 3 e 4) com as construções do losango no software GeoGebra, com a inserção de mais alguns elementos na figura que poderiam ser manipulados de forma dinâmica, com o intuito de provocar os alunos a refletirem sobre duas outras possibilidades de resolução do problema proposto, representadas aqui nas figuras 4(a) e 4(b). Comentou-se rapidamente com os alunos que o applet 2, que já estava disponível no Moodle no início da aula, também ficaria como tarefa de casa, salientando que este não foi abordado pelo limite de tempo da aula e pelo direcionamento que a aula teve devido à exploração enriquecedora da construção geométrica inicial do losango, em que muitos alunos participaram ativamente das resoluções, mesmo que poucos deles tenham se animado a acessar o arquivo com a construção geométrica realizada no GeoGebra e que estava disponível no Moodle para manipulação.

Um dos novos tratamentos do losango ABCE no registro figural, representado na figura 3(a), poderia ser convertido para o registro algébrico através da equação algébrica $A_{ABCE} = 2 \times A_{\triangle AEH} + 2 \times A_{\triangle BEH} = 2 \times \frac{\overline{AH} \times \overline{EH}}{2} + 2 \times \frac{\overline{BH} \times \overline{EH}}{2} = \overline{AH} \times \overline{EH} + \overline{BH} \times \overline{EH} = A_{CEHG}$, retângulo este representado na figura 3(b).

Figura 3 – Losango composto por 4 triângulos retângulos (a), e agrupados de modo a formar o retângulo CEHG (b)

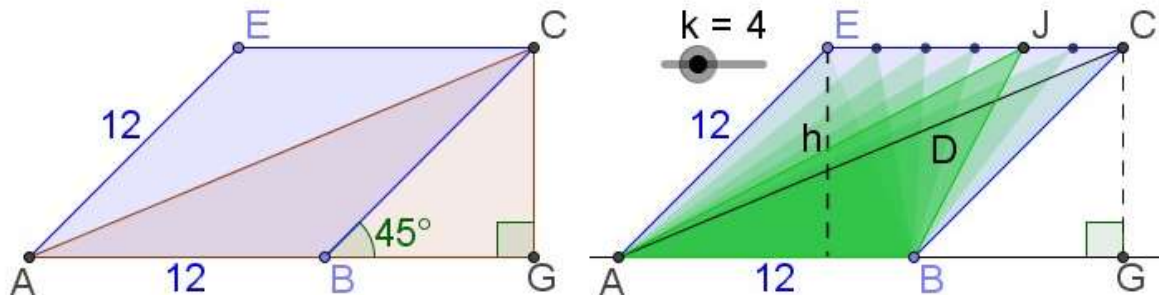


Fonte: Elaborada pelos autores (2023)

Um outro tratamento, representado na figura 4(a) e que ficou como *Tarefa* no Moodle para os estudantes, conduziria ao cálculo da área do losango através de uma subtração de áreas, conforme a equação $A_{ABCE} = 2 \times (A_{\triangle ACG} - A_{\triangle BGC}) = 2 \times \left(\frac{\overline{AG} \times \overline{CG}}{2} - \frac{\overline{BG} \times \overline{CG}}{2} \right)$, que abre possibilidades tanto de uma manipulação algébrica que levam à fórmula da área de um

paralelogramo, se o aluno perceber que $2 \times \left(\frac{\overline{AG} \times \overline{CG}}{2} - \frac{\overline{BG} \times \overline{CG}}{2} \right) = (\overline{AG} - \overline{BG}) \times \overline{CG} = \overline{AB} \times \overline{CG}$, tanto de tratamentos numéricos que levam, novamente, direto à solução do problema.

Figura 4 – Novo tratamento figural (a) e $A_{\Delta ABC} = A_{\Delta ABE}$ através do ‘Rastro’ no GeoGebra (b)



Fonte: Elaborado pelos autores (2023)

A figura 3 não foi explorada em aula devido ao término do período, mas a ideia era fazer os alunos perceberem que tanto a figura 3(a) do losango e seu tratamento usando o comando *Translação por um Vetor* no GeoGebra (figura 3(b)), como a sua representação no registro algébrico pode ser considerada como a soma de dois retângulos (junção do ΔAHE com o ΔBCI e do ΔBHE com o ΔBEI), já mencionada acima. Do mesmo modo, a figura 4(b), que também ficou disponível como *Tarefa* aos estudantes que acessassem o Moodle, através do comando *Habilitar Rastro* no GeoGebra, poderia levar o estudante a descobrir o teorema já conhecido por Euclides de Alexandria, de que triângulos com mesma base e que estão entre as mesmas paralelas têm áreas iguais (ΔABJ , com o ponto J variando no segmento \overline{EC}). Ou seja, poderia levá-lo a perceber que a área do ΔABC é igual a área do ΔABE , pois ambos têm mesma medida de base e de altura. Ressalta-se também que as construções geométricas realizadas no GeoGebra foram enriquecidas com o comando *Controle Deslizante*, tanto para variar a medida do lado do losango como para variar um ângulo interno do objeto (figura 2(c)), ou para transladar um polígono por um vetor (figura 3(b)), ou deslocar um ponto sobre uma reta (figura 4(b)), possibilitando ao aluno a manipulação dinâmica do objeto geométrico estudado através do movimento e variação de suas dimensões, mas com a estabilidade das propriedades do objeto geométrico estudado.

Por fim, considera-se que a atividade realizada em aula apresentou um rendimento satisfatório, mas a participação dos estudantes na *Tarefa* que deveria ser feita no Moodle foi insatisfatória, visto que a maioria dos estudantes não acessou os applets disponibilizados e nem realizaram manipulações ou novas construções no GeoGebra para enviar na *Tarefa* ao professor para uma análise mais aprofundada sobre os conhecimentos adquiridos por eles. Sendo assim, pode-se afirmar que este tipo de exploração se apresenta como uma atividade dinâmica potencialmente produtiva e atrativa aos estudantes em sala de aula, não só por estar embasada na TRRS, na RP e no

uso de AGD, mas por permitir que o estudante explore a construção de caminhos diferentes para chegar ao mesmo resultado. No entanto, pode não ser efetiva e produtiva quando se almeja a produção de conhecimento de forma remota, fora do ambiente de sala de aula.

Considerações Finais

Diante do exposto, percebe-se que o professor deve estar preparado para as situações que naturalmente mudam o planejamento da aula, provocam reações inusitadas e direcionam para outras ações e outros objetivos. Esta experiência, iniciada com um exercício de geometria, fundamentou-se na TRRS de Duval, na Resolução de Problemas de Polya e no uso de AGD no ensino de geometria. Aproveitou-se as potencialidades do GeoGebra para explorar possibilidades de tratamentos e conversões em diferentes registros de representações semióticas acerca de um losango e do cálculo da sua área. Assim, fez-se uma problematização que foi trazendo novos elementos para serem manipulados e compreendidos, permitindo novas visões sobre a figura geométrica e sobre o cálculo da sua área, transformando a atividade em uma verdadeira resolução de problema pela maior parte dos alunos, visto que a diferenciação entre exercício e problema “não depende somente da experiência e dos conhecimentos prévios de quem a executa, mas também dos objetivos que estabelece enquanto a realiza” (Echeverria; Pozo, 1998, p. 17). Os objetivos foram se modificando ao longo dos dois períodos de aula, uma vez que, a partir de certo momento, encontrar o valor da área do losango já não importava mais, e sim, a motivação que os diferentes tratamentos dados no registro figural, através das manipulações do objeto no GeoGebra, e a conversão para o registro algébrico traziam. Isso permitiu a busca pela compreensão dos novos tratamentos e manipulações algébricas que levavam aos mesmos valores, mas por caminhos diferentes, fato percebido através da participação ativa dos estudantes até o fim da aula. Dado o nível de interação dos alunos com cada nova representação figural construída no GeoGebra e cada representação algébrica apresentada no quadro, permitindo-nos afirmar que o uso de uma metodologia focada em resolver problemas, mesmo que imaginários ou situações simuladas, aliada ao dinamismo do GeoGebra e a exploração de diferentes registros de representação semiótica de objetos de matemática, podem contribuir fortemente para a construção de conhecimento e a aprendizagem de conteúdos de matemática. Certamente faz-se necessário novas pesquisas e novas propostas didáticas envolvendo a conexão entre TRRS, RP e AGD para que se consolide o potencial da junção entre teoria, metodologia e tecnologia no ensino de matemática, contribuindo com uma melhoria significativa tanto no trabalho dos professores de matemática quanto na aprendizagem de matemática dos estudantes.

Agradecimentos

Agradecemos ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul – IFRS pelo apoio à realização e publicação desta pesquisa.

Recebido em: 07/05/2024

Aprovado em: 23/06/2024

Referências

AMADO, N.; SANCHEZ, J.; PINTO, J. A utilização do geogebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de euler. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 29, p. 637–657, 2015. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/J6bmB3dJXBdy8J3MwpjFC6x/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 10, out. 2023.

BARBOSA, L. S.; MENEGHETTI, C. M. S.; POFFAL, C. A. O uso de geometria dinâmica e da investigação matemática na validação de propriedades geométricas. **Revista Ciência e Natura. UFSM**, Santa Maria, v. 41, 2019. Disponível em: https://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/download/33752/e12?inline=1#_bookmark54. Acesso em: 10, out. 2023.

BORSOI, C. **GeoGebra 3d no ensino médio**: uma possibilidade para a aprendizagem da geometria espacial. 2016. 159f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal do Rio Grande do Sul. UFRGS, Porto Alegre-RS. 2016. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/148179>. Acesso em: 13, out. 2023.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática**. São Paulo: Ática, 1998.

DOLCE, O; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar 9**: Geometria plana. São Paulo: Atual, 2013.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, v. 7, n. 2, p. 266–297, 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>. Acesso em: 10, out. 2023.

DUVAL, R. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática. **REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática**, v. 11, n. 2, p. 1–78, 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p1>. Acesso em: 10, out. 2023.

ECHEVERRIA, M. D. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas**: Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 13-42.

FREITAS, J. L. M. de; REZENDE, V. Entrevista: Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 2, n. 3, p. 10–34, 2013. Disponível em: <https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/5946>. Acesso em: 10, out. 2023.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

GRAVINA, M. A. O potencial semiótico do geogebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa. **VIDYA**, v. 35, n. 2, p. 18, 2015. Disponível em: <https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/605/561>. Acesso em: 10, out. 2023.

HENRIQUES, A.; ALMOULOU, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na educação matemática no ensino superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência & Educação**, v. 22, n. 2, p. 465–487, 2016. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ciedu/a/QVbBDvRRtjvVXD6HXFYXcxx/?format=pdf&lang=pt>. Acesso em: 10, out. 2023.

HESPANHOL, L. L.; NICOLA, L.; SILVA, C. R. B. da; SANTOS, C. M. F. dos; RIBEIRO, E. M. P. A utilização do software GeoGebra para o ensino da geometria. **XII ENEM-ANAIS ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, São Paulo, 2016. Disponível em: https://www.sbemrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6276_4233_ID.pdf. Acesso em: 10, out. 2023.

MENDES, C. J. **O uso do geogebra 3d no ensino de geometria**. 2020. 82f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. UnB, Brasília-DF. 2020. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/profmat_tcc.php?id1=5374&id2=171052843. Acesso em: 10, out. 2023.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema – Mathematics Education Bulletin**, v. 25, n. 41, p. 73–98, 2011. Disponível em: <https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5739>. Acesso em: 10, out. 2023.

PACHECO, E. F. Utilizando o software GeoGebra no ensino da Matemática: uma ferramenta para construção de gráficos de parábolas e elipses no 3º ano do Ensino Médio. **Debates em Educação**, v. 11, n. 24, p. 197–211. Disponível em: <https://www.seer.ufal.br/index.php/debateseducacao/article/view/6905>. Acesso em: 14, abr. 2024.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SILVA, E. P. da. **GeoGebra no ensino de quadriláteros**: uma proposta de sequência didática. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande. Cuité-PB. 2023. Disponível em: <http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/jspui/handle/riufcg/30945>. Acesso em: 13 out. 2023.

SOUSA, R. T. de; AZEVEDO, I. F. de; ALVES, F. R. V. O GeoGebra 3d no estudo de projeções ortogonais amparado pela teoria das situações didáticas. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 14, n. 1, p. 92–98, 2021. Disponível em: <https://jjeem.pgsscogna.com.br/jjeem/article/view/8941>. Acesso em: 13, out. 2023.