DOI: https://doi.org/10.23925/2358-4122.66927

QUADRADOS MÁGICOS GEOMÉTRICOS

GEOMETRIC MAGIC SQUARES

Daniele Alvez Souza[1]
Valdinês Leite de Sousa Júnior[2]
Erica Boizan Batista[3]

RESUMO

O presente artigo aborda a utilização dos quadrados mágicos geométricos como uma ferramenta pedagógica inovadora no ensino de matemática. O objetivo é explorar as características dos quadrados mágicos geométricos de ordem 3, investigando sua história, propriedades e como esses quadrados podem ser introduzidos nas salas de aula da educação básica para promover o aprendizado de conceitos matemáticos de forma significativa e envolvente. Ao substituir os números tradicionais por formas geométricas, os quadrados mágicos geométricos oferecem uma oportunidade única para os alunos explorarem padrões visuais e desenvolverem habilidades matemáticas enquanto se divertem. Essa abordagem interdisciplinar permite a integração de conceitos de geometria, álgebra e aritmética, proporcionando uma experiência de aprendizado holística e prazerosa para os alunos.

Palavras-chave: *Quadrados mágicos; Quadrados mágicos geométricos; Quebra-cabeça.*

ABSTRACT

This article addresses the use of geometric magic squares as an innovative pedagogical tool in teaching mathematics. The objective is to explore the characteristics of geometric magic squares of order 3, investigating their history, properties and how these squares can be introduced in primary education classrooms to promote the learning of mathematical concepts in a meaningful and engaging way. By replacing traditional numbers with geometric shapes, geometric magic squares provide a unique opportunity for students to explore visual patterns and develop math skills while having fun. This interdisciplinary approach allows for the integration of geometry, algebra and arithmetic concepts, providing a holistic and enjoyable learning experience for students.

Keywords*: Magic squares; Geometric magic squares; Puzzle.*

Introdução

Criado por Lee Sallows em 2001, um quadrado mágico geométrico, ou também denominado, quadrado geomágico, é um quadrado mágico onde os números são substituídos por formas geométricas. Para Lee Sallows, os quadrados mágicos foram mal interpretados, pois não se reconheceu sua verdadeira natureza: a de um objeto que não é essencialmente numérico. A abordagem inovadora de Sallows combina a beleza da

[1] Professora da rede estadual de Pernambuco na Escola de Referência em Ensino Médio Carlos Pena Filho, daniele.souza@aluno.ufca.edu.br

[2] Professor Adjunto na Universidade Federal do Cariri – UFCA, valdines.leite@ufca.edu.br

[3] Professora Adjunta na Universidade Federal do Cariri – UFCA, erica.batista@ufca.edu.br

geometria com os princípios dos quadrados mágicos, resultando em estruturas matemáticas que desafiam a intuição e estimulam a investigação das relações entre números e formas.

Neste trabalho, exploraremos as características dos quadrados mágicos geométricos, investigando sua história, propriedades e possíveis aplicações no ensino de matemática na educação básica, de forma a estimular uma aprendizagem mais significativa. Além disso, buscamos promover a divulgação desse tema, ainda pouco conhecido no Brasil, tornando-o mais acessível e atraente para professores e estudantes. Exploraremos a área da matemática recreativa, onde a harmonia entre os números e a geometria se entrelaçam de maneira extraordinária. Bártlová (2016), ressalta que "em geral, a matemática é considerada recreativa se tiver um aspecto lúdico que possa ser compreendido e apreciado por não matemáticos". Por sua vez, os jogos oferecem um ambiente cativante e dinâmico, no qual os alunos são desafiados a resolver problemas e tomar decisões estratégicas, estimulando não apenas o raciocínio lógico, mas também o trabalho em equipe e a criatividade. A utilização de jogos no ensino de matemática tem sido reconhecida como uma estratégia eficaz para engajar os alunos e promover a compreensão dos conceitos matemáticos de forma significativa. De acordo com Kishimoto (2003, p. 96), "as crianças se sentem mais motivadas a usar sua inteligência quando estão envolvidas em jogos, pois desejam ter um bom desempenho: assim, se esforçam para superar desafios, sejam eles cognitivos ou emocionais". Segundo os Parâmetros Nacionais Curriculares (PCN):

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações se sucedem rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas. (BRASIL, 1998, p. 46)

Neste contexto, os quadrados mágicos geométricos emergem como uma ferramenta promissora para ser introduzida nas salas de aula da educação básica.

Um quadrado mágico de ordem n consiste em uma matriz $n \times n$ de n^2 elementos dispostos de forma que a soma dos números de qualquer linha, coluna ou diagonal seja sempre a mesma, chamada de constante mágica. Esses quadrados não apenas desafiam os alunos a resolverem problemas matemáticos, mas também estimulam a criatividade ao explorarem padrões geométricos. Sallows propôs uma nova perspectiva ao substituir os números tradicionais por formas geométricas nos quadrados mágicos, resultando nos quadrados mágicos geométricos. Essa abordagem não só proporciona belos padrões visuais, mas também oferece uma oportunidade para a exploração de conceitos matemáticos de uma maneira diferente. Como destacado por Orton (1999) e Vale (2009), alguns estudantes demonstram uma inclinação significativa pelo pensamento visual, e, portanto, uma abordagem que privilegie elementos visuais pode ser altamente eficaz para esse grupo.

Uma proposta de prática pedagógica envolvendo quadrados mágicos geométricos pode incluir atividades como a construção desses quadrados utilizando diferentes formas geométricas, a análise de padrões visuais e a resolução de problemas relacionados aos quadrados mágicos. Os alunos podem trabalhar em equipe para criar e analisar diferentes quadrados mágicos, estimulando a colaboração e o pensamento crítico. Martin, Towers e Pirie (2006) destacam a importância desse tipo de atividade na promoção da construção coletiva de conhecimento matemático, onde as contribuições individuais são elaboradas e refinadas pelo grupo, resultando em entendimentos compartilhados.

Além disso, os quadrados mágicos geométricos podem ser integrados ao currículo de matemática de forma interdisciplinar, explorando conceitos de geometria, álgebra e aritmética. Essa abordagem proporciona uma experiência de aprendizado holística, na qual os alunos podem aplicar seus conhecimentos matemáticos de maneira prática e criativa. Segundo os PCN (Brasil, 1998, p. 40), "está implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução."

Os quadrados mágicos geométricos oferecem uma oportunidade interessante para os alunos explorarem conceitos matemáticos de forma visual e interativa. Ao incorporar esses quadrados mágicos nas práticas pedagógicas, os educadores podem promover um ambiente de aprendizado estimulante e significativo, capacitando os alunos a desenvolverem suas habilidades matemáticas, estimulando a criatividade.

Apesar do potencial educacional dos quadrados mágicos geométricos, sua introdução nas salas de aula da educação básica pode enfrentar desafios significativos. Um desses desafios está relacionado à necessidade de recursos adequados para implementar atividades práticas envolvendo esses quadrados, incluindo acesso a materiais educativos e tecnológicos que permitam aos alunos manipular e explorar as formas geométricas de maneira eficaz. Outro ponto a ser considerado é a resistência ou falta de familiaridade por parte dos educadores em relação ao uso de quadrados mágicos geométricos como ferramenta de ensino. Muitos professores podem não estar familiarizados com esse conceito ou podem se sentir inseguros sobre como incorporá-lo de forma eficaz em suas práticas pedagógicas. O presente artigo visa explorar as propriedades dos quadrados mágicos geométricos como uma ferramenta educacional, com o objetivo de fornecer orientações práticas e recursos para auxiliar os professores na implementação deste recurso estimulante em sala de aula.

Percurso Metodológico

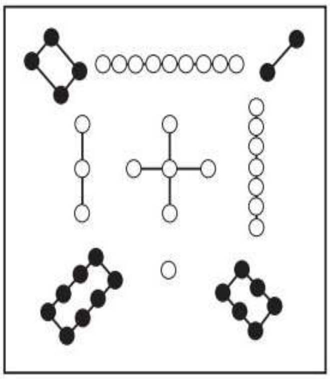
Neste trabalho, apresentamos uma pesquisa exploratória baseada em um exercício de Imaginação Pedagógica, conforme a perspectiva proposta por Skovsmose (2015), incorporando as percepções dos próprios autores. A Imaginação Pedagógica envolve considerar o que pode ser chamado de pesquisa de possibilidades na perspectiva da Educação Matemática Crítica (Skovsmose, 2015), imaginando diferentes cenários para uma situação corrente, com o objetivo de compreender o que poderia ser diferente. Segundo Skovsmose, a realidade observada é apenas uma entre muitas possibilidades, desafiando a ideia de uma perspectiva objetiva e única na pesquisa. Essa visão pluralista é crucial na educação matemática, onde as formas de ver e entender a realidade podem variar amplamente. De acordo com o autor, essa abordagem permite considerar não apenas o que é ensinado e aprendido (ou seja, o que é construído), mas também explorar o que não é ensinado e as possibilidades do que poderia ser. Essa perspectiva possibilita inovar e transformar práticas pedagógicas visto que "o que poderia ser tido como certo, digamos, em termos de tradições educativas, não são necessidades de ensino, mas contingências" (Skovsmose, 2015, p. 76). O autor propõe que a pesquisa inclua a análise do que poderia ser construído, permitindo imaginar diferentes cenários e métodos de ensino que poderiam potencialmente melhorar a educação.

Biotto Filho, Faustino e Moura (2017) também discutem os ambientes de aprendizagem, enfatizando a importância de criar cenários de investigação e imaginação para expandir as potencialidades de desenvolvimento de conceitos. Eles destacam que esses cenários devem ir além das referências à matemática pura, semirrealidade e realidade, e incluir possibilidades que considerem situações hipotéticas, proporcionando novas oportunidades de aprendizagem. De acordo Skovsmose, Lima e Penteado (2023), é necessário incentivar os futuros professores a transcenderem o currículo estabelecido e o conteúdo dos livros didáticos, engajando-os na concepção de processos de ensino-aprendizagem que se distanciem da tradição da matemática escolar. Assim, os futuros docentes estarão mais preparados para desempenhar um papel ativo na transformação das rotinas educacionais.

Quadrados mágicos geométricos

Segundo Eves (1995), um quadrado mágico de ordem n consiste em uma matriz $n \times n$ de n^2 inteiros distintos dispostos de tal forma que a soma dos números de qualquer linha, coluna ou diagonal têm sempre o mesmo valor, chamada constante mágica. A Figura 1 ilustra o mais famoso exemplo de quadrado mágico, conhecido como *Lo Shu*, onde a soma dos números em cada linha, coluna e em cada diagonal é sempre igual a 15. A lenda conta que o Imperador da antiga China, chamado Yu (2200 a.C), estava meditando as margens do Rio Lo, quando emergiu uma tartaruga, considerada um animal sagrado, com estranhas marcas no casco. Yu percebeu um arranjo quadrado de números naturais expressos por cordas e que todos eles somavam quinze em qualquer direção, considerando assim um número mágico.

Figura 1 – Lo Shu e o Quadrado mágico Lo Shu.



4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fonte: Sallows, 2013, p. 1.

Há milhares de anos, os quadrados mágicos têm fascinado não apenas os entusiastas da matemática, mas também o público em geral, graças aos padrões hipnotizantes que produzem. De acordo com Santinho e Machado (2006, p.2), o interesse despertado em alguns matemáticos é originado pelos problemas desafiadores em relação à construção, classificação e enumeração dos quadrados mágicos de uma dada ordem.

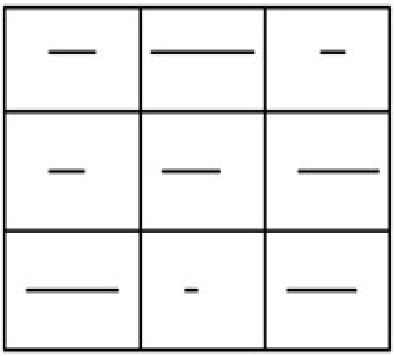
Em 2001, o engenheiro eletrônico britânico Lee Cecil Fletcher Sallows propôs uma nova abordagem para os quadrados mágicos, substituindo os números por formas geométricas. Essa perspectiva não apenas evidencia a complexidade desses objetos, como também dá origem a belos padrões visuais. Vale destacar que, nessa representação, a orientação dos segmentos não é relevante, uma vez que todos são dispostos em uma única linha reta com comprimento total fixado em 15 unidades.

Ao examinarmos a Figura 2, é possível constatar que a soma dos elementos presentes na primeira coluna, denotada pelos valores 4 + 3 + 8, é agregada de forma consecutiva para constituir ou "pavimentar" uma única linha reta cujo comprimento é 15 unidades, correspondendo à constante mágica, característica do quadrado mágico de Lo Shu. Essa observação é extensível aos demais segmentos que preenchem as linhas, colunas e diagonais remanescentes do quadrado mágico, tornando-se um caso particular de um quadrado mágico geométrico onde os elementos são unidimensionais (1-D), ou seja, um segmento de linha reta. De um modo geral, Sallows afirma que:

> (1) Os números que ocorrem nos quadrados mágicos podem ser vistos como abreviaturas de suas contrapartes geométricas, que são segmentos de linha reta de comprimento apropriado.
> (2) O processo de somar números de modo a produzir a soma constante recorrente é então mais fácil de interpretar como contrapartida aritmética de particionar ou dividir um espaço com esses segmentos de linha. (Sallows, 2011, p. 3)

Além do caso unidimensional citado, iremos desfrutar de outros cenários, nos detendo em figuras planas ou bidimensionais, pois tal qual os segmentos de linhas podem ser pavimentados em segmentos mais longos, as áreas podem pavimentar áreas maiores, assim como, os volumes podem compactar em volumes maiores e assim por diante.

Figura 2 – Uma versão geométrica do Lo Shu.



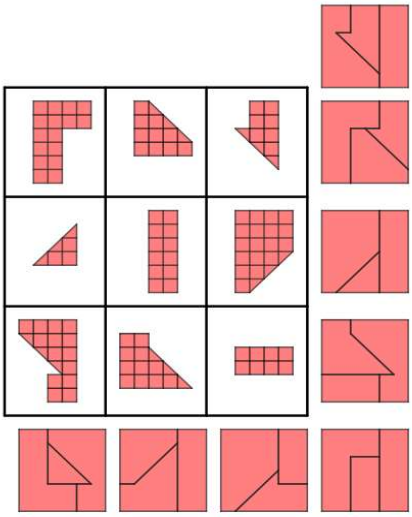
4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fonte: Elaborado pelos autores, baseado em Sallows (2013).

Um quadrado mágico geométrico, é caracterizado por uma configuração onde formas geométricas de dimensões superiores ocupam as células, sendo que em cada linha, coluna ou diagonal, as formas se alinham de modo a produzir uma figura idêntica, cujo padrão é definido por um valor constante predefinido. Observe que na Figura 3 (à esquerda), as peças da primeira linha se encaixam formando um quadrado 3×3, assim como a segunda e terceira linha, bem como as colunas e diagonais.

Considerando-se que cada unidade de célula tenha uma área equivalente a 2 unidades de medida, pode-se observar que cada uma das nove peças componentes do quadrado possui uma área inteira, exibido na Figura 3 (à direita). Como as três peças em cada linha, coluna e diagonal compartilham o mesmo formato, a soma das áreas dessas peças deve ser uniforme, resultando em um quadrado mágico com uma soma constante. No exemplo fornecido, a soma constante é igual a 72 unidades de área, correspondendo à área total do alvo geométrico em questão.

Figura 3 – Um quadrado mágico geométrico 3 × 3



32	23	17
9	24	39
31	25	16

Fonte: Elaborado pelos autores, baseado em Sallows (2013).

De acordo com Sallows (2013) uma representação algébrica dos quadrados mágicos, representada na Figura 4, é devido a um matemático francês do século 19, Édouard Lucas que caracteriza a estrutura de cada um dos quadrados mágicos, dentre eles o Lo Shu, considerando $a = 3, b = 1$ e $c = 5$.

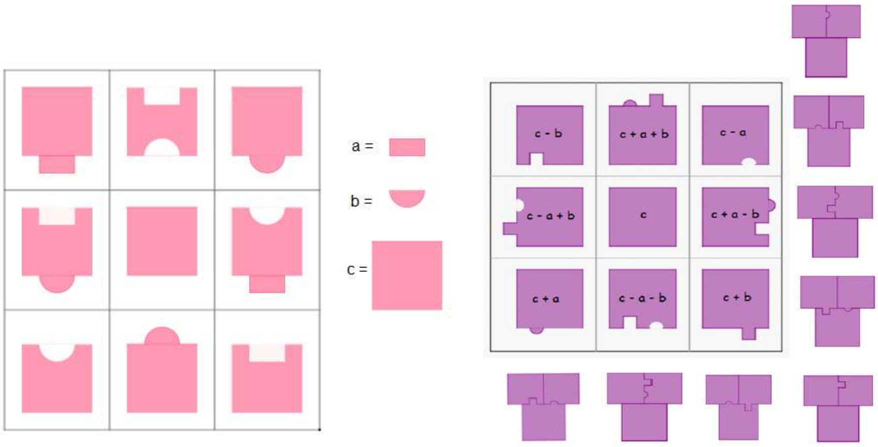
Figura 4 – Fórmula de Lucas

$c - b$	$c + a + b$	$c - a$
$c - a + b$	c	$c + a - b$
$c + a$	$c - a - b$	$c + b$

Fonte: Elaborado pelos autores, baseado em Sallows (2013).

A representação algébrica de Édouard Lucas inspirou a criação do quadrado mágico visto na Figura 5 (à esquerda). Na construção, é suposto que a é retângulo, b é o semicírculo e c é o quadrado maior. Dessa forma, ao calcular $c + a$, as duas formas são unidas. De modo análogo, em $c - b$, o semicírculo é subtraído do quadrado c. Na expressão $c + a + b$, o retângulo a e o semicírculo b são adicionados ao quadrado c, e assim sucessivamente. Entretanto, o resultado apresentava uma falha, pois as três peças da linha central e as três da coluna central não se encaixavam formando um retângulo como as demais peças, o que motivou a Sallows a buscar uma alternativa semelhante a esse, mas sem defeito, nascendo então a ideia do quadrado mágico geométrico.

Figura 5 –Representação pictórica da fórmula de Lucas.

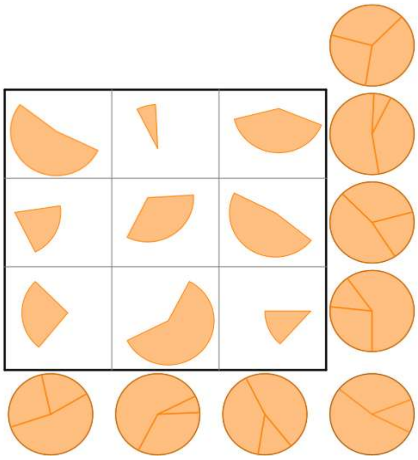


Fonte: Elaborado pelos autores, baseado em Sallows (2013).

A Figura 5 (à direita) mostra uma tentativa bem-sucedida de um quadrado mágico geométrico resultando em infinitas soluções, pois, as escolhas das peças a, b e c interfere no objetivo final, com efeito, poderíamos substituir o semicírculo por um pequeno triângulo, resultando em diferentes peças que se combinam. É evidente que as áreas das peças em todas as linhas, colunas e diagonais correspondem a três vezes o valor da peça central, de acordo com a fórmula.

Outra abordagem para representar os quadrados numéricos de forma geométrica, é utilizando arcos circulares, ao invés de linha reta. A Figura 6 mostra uma versão geométrica baseada no Lo Shu. Como a constante mágica é 15, o menor arco correspondente é dado por $\frac{360°}{15} = 24°$, uma vez que os demais arcos são todos múltiplos de 24°. Observe que o alvo é um círculo completo, no entanto, poderia ser qualquer fração desejada dele.

Figura 6 – Uma versão geométrica do Lo Shu.



Fonte: Elaborado pelos autores, baseado em Sallows (2013).

Ao explorar a estrutura matemática desses quadrados mágicos geométricos, pode-se investigar conceitos algébricos como equações lineares e sistemas de equações lineares de forma lúdica e significativa. Já a análise dos métodos de construção abre portas para o estudo das combinações, como podemos observar na próxima seção, ao analisarmos a quantidade de combinações possíveis para alcançar as figuras geométricas procuradas em quadrados de diferentes ordens.

Método de construção

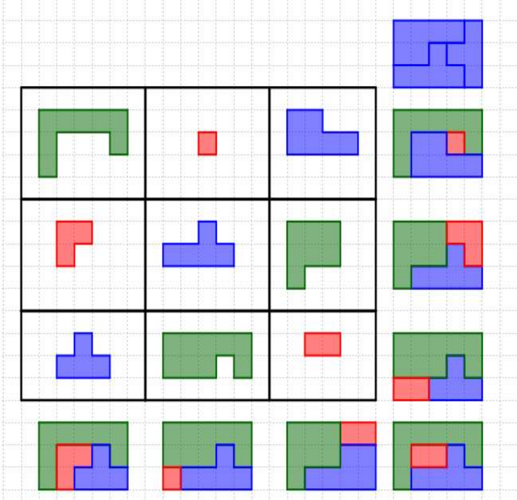
Sallows, em busca incessante de métodos para produzir novos quadrados mágicos geométricos, duas abordagens surgiram gradualmente

> (1) métodos de lápis e papel baseado em fórmulas algébricas. nos moldes já mencionados
> (2) no caso de quadrados restritos a poliformas ou formas construídas a partir de átomos repetidos, buscas de força bruta por computador (Sallows, 2011, p.7)

Ambas as abordagens podem ser adotadas em sala de aula, uma vez que a exploração de diversos métodos de resolução de problemas amplia o repertório de habilidades matemáticas dos alunos. Esse processo não apenas fortalece o raciocínio lógico, o pensamento crítico e as habilidades analíticas, mas também estimula a criatividade dos estudantes (Clement e Terrazzan, 2015).

Com o auxílio computacional, os quadrados podem se organizar em diferentes formas, movendo-se ao redor dos pequenos quadrados, e assim, obtendo alvos diversos. Sallows descobriu que existem 1 411 quadrados mágicos geométricos distintos, onde o alvo é um retângulo 3×5, como na Figura 7. As oitos variações resultantes da rotação e/ou reflexão são contadas como o mesmo quadrado.

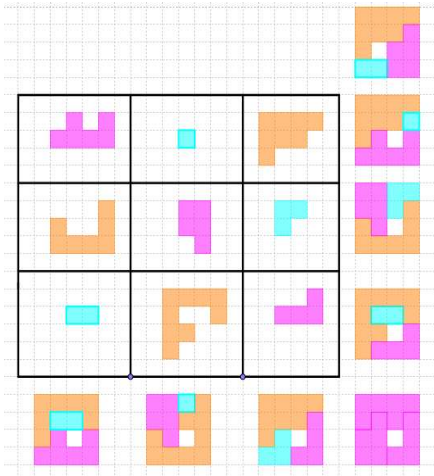
Figura 7 – Um dos 1 411 quadrados normais com alvo retangular 3×5.



Fonte: Elaborado pelos autores, baseado em Sallows (2013).

Alterando o alvo para um quadrado 4×4 com um furo, pode-se reorganizar os poliminós em diferentes formas, obtendo um total de 4 370 soluções, a Figura 8 mostra um desses quadrados.

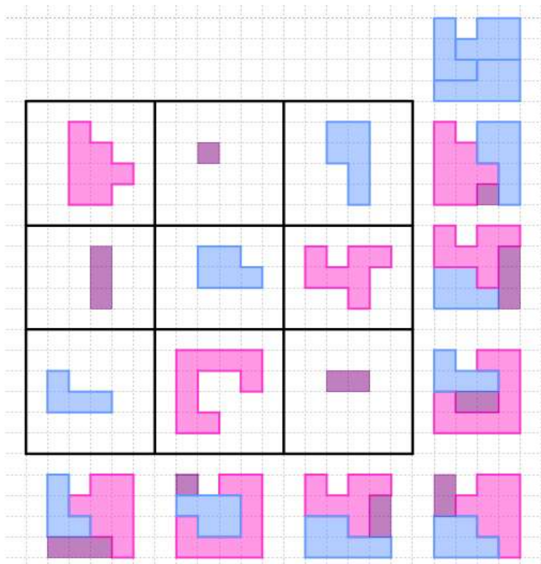
Figura 8 – Um dos 4 370 quadrados normais com alvo retangular 4×4 e com um furo central.



Fonte: Elaborado pelos autores, baseado em Sallows (2013).

Quando o alvo é um quadrado 4×4, com as mesmas condições previamente mencionadas, exceto pela exclusão de um quadrado 1×1 localizado na borda, que não seja um dos cantos, o número de soluções identificadas aumenta para 16 465, um exemplo é apresentado na figura 9.

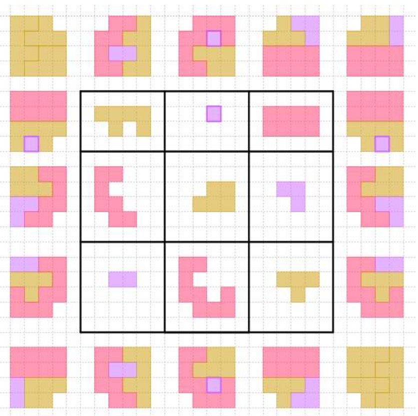
Figura 9 – Um dos 16 465 quadrados normais com alvo 4×4 faltando uma peça na borda.



Fonte: Elaborado pelos autores, baseado em Sallows (2013).

Agora, considerando o alvo como um quadrado 4×4, nas mesmas condições, porém com a retirada de quadrado 1×1 de um dos cantos, o resultado passa a ser 27 110 soluções, como mostra a figura 10.

Figura 10 – Um dos 27 110 quadrados normais com alvo 4×4 faltando uma peça de canto.

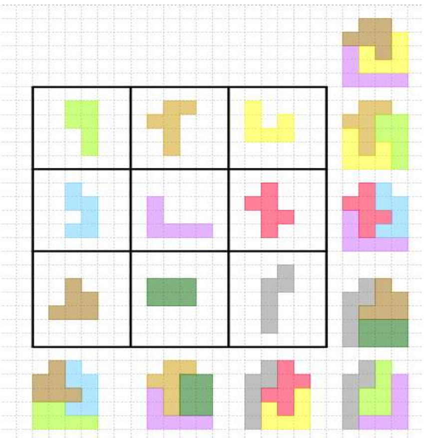


Fonte: Elaborado pelos autores, baseado em Sallows (2013).

Os resultados mais favoráveis foram obtidos através de deduções decorrentes da Fórmula de Édouard Lucas. A Figura 11 apresenta um quadrado mágico geométrico trivial (um quadrado cujas entradas são repetidas) 3×3 , onde cada elemento é um hexámino, um poliminó formado por 6 quadrados.

Na definição de um quadrado mágico geométrico, há a exigência de que as peças sejam diferentes entre si, mas não necessariamente em suas áreas. Desta forma, um quadrado mágico geométrico pode não estar associado a nenhum quadrado numérico específico. Sallows (2013) afirma que os quadrados mágicos tradicionais são apenas um exemplo especial de quadrados mágicos geométricos, em que as entradas são unidimensionais. No entanto, essa distinção apresenta uma excelente oportunidade para proporcionar uma aprendizagem significativa aos alunos, por meio de desafios em que eles devem converter um quadrado mágico tradicional em um quadrado mágico geométrico e vice-versa. Esses desafios como este podem ser usados para incentivar o desenvolvimento de habilidades de raciocínio abstrato, compreensão geométrica e resolução de problemas de maneira colaborativa.

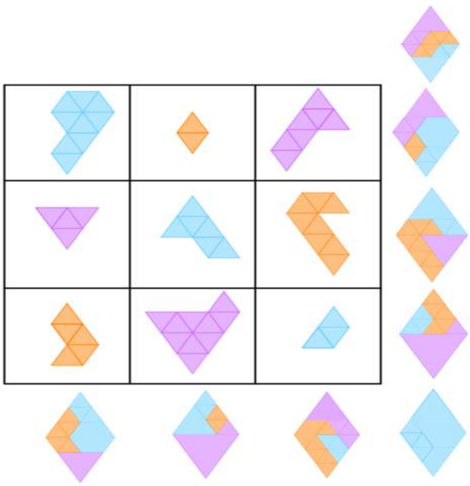
Figura 11 – Um quadrado mágico geométrico cujas peças são hexaminós.



Fonte: Elaborado pelos autores, baseado em Sallows (2013).

A Figura 12 apresenta a construção de um quadrado mágico geométrico 3×3 usando poliamantes, que são formas construídas a partir de triângulos equiláteros unitários, com tamanhos das peças variando entre 2 a 10. Essas peças formam uma série consecutiva que pode ser obtida adicionando 1 às entradas do Lo Shu. O alvo obtido é um losango ou paralelogramo equilátero. Sallows destaca uma das suas descobertas preferenciais, designada como *Diamond Sutra*, devido à conformação em formato de diamante da configuração almejada.

Figura 12 – Um quadrado mágico geométrico cujas peças são triângulos equiláteros.



Fonte: Elaborado pelos autores, baseado em Sallows (2013).

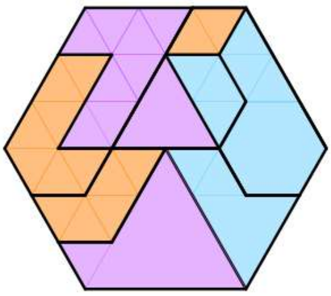
As nove peças utilizadas formam três diamantes, que juntos podemos compor um hexágono regular. Observe que, cada diamante corresponde a uma área de 18 unidades. Com isso, entre os números de $2, 3, \dots, 10$ existem apenas três números inteiros cuja soma representa 18 unidades.

Assim, das oitos possibilidades existentes, podemos escolher três peças para determinar a quantidade de hexágonos distintos que resulta uma combinação $\binom{8}{3}$, totalizando 56 maneiras. Além disso, cada diamante pode ser refletido em torno de uma ou de ambas as suas diagonais, gerando assim 4 orientações possíveis.

Com isso, o número de maneiras diferentes de completar um hexágono é dado por $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ que corresponde ao resultado de qualquer tríade de diamantes. Portanto, concluímos que existem $56 \cdot 64 = 3584$ hexágonos diferentes que podem ser criados a partir das peças apresentadas.

Além dos 3 584 já identificados, as peças utilizadas podem formar hexágonos regulares de muitas outras maneiras diferentes. Com o auxílio computacional, foram identificados um número de $17\,213$ hexágonos distintos, totalizando $20\,797$. A Figura 13 mostra um hexágono formado com todas as peças do *Diamond Sutra*.

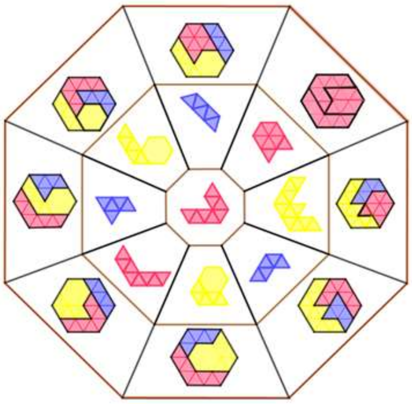
Figura 13 – Um hexágono regular formado com as peças do *Diamond Sutra*.



Fonte: Elaborado pelos autores, baseado em Sallows (2013).

Como uma contemplação dos quadrados mágicos geométricos, Sallows buscou estruturar um quadrado mágico 3×3 em um arranjo octogonal, denominado *Magic Mandala I*, apresentado na figura 14, cujas peças são poliamantes e o alvo corresponde a um hexágono regular de área 24. Esse conjunto acredita-se que não tenha significado matemático, mas sim a aparência estética que o torna hipnotizante.

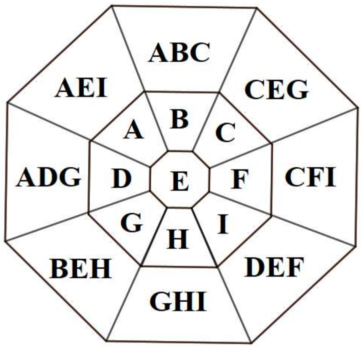
Figura 14 – Um quadrado 3×3 estruturado de forma octogonal.



Fonte: Elaborado pelos autores, baseado em Sallows (2013).

A Figura 15 traduz a legenda que identifica o alvo associado a cada linha, coluna e diagonal, neste caso, **ADG**, **BHE**, **CFI** correspondem às colunas, **ABC**, **DEF**, **GHI** são linhas e **AEI**, **CEG** são as diagonais.

Figura 15 – Legenda para *Magic Mandala I*.



Fonte: Elaborado pelos autores, baseado em Sallows (2013).

A utilização de poliformas, como poliminós, poliamantes e polihexes, na sala de aula oferece uma abordagem rica e multifacetada para o ensino da matemática. Ao introduzir essas formas, os professores podem criar atividades manipulativas que ajudam os alunos a visualizar e compreender conceitos geométricos fundamentais. A construção de figuras a partir de polígonos unitários não só reforça a compreensão espacial, mas também promove o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas (Ambrose e Falkner, 2002). Essas atividades iniciais podem servir como uma base sólida para a introdução de conceitos mais avançados, como progressões aritméticas e propriedades combinatórias, contextualizando a matemática de maneira concreta e tangível.

A exploração dos quadrados mágicos geométricos, particularmente a partir do quadrado Lo Shu, permite uma transição suave para a aplicação de conceitos matemáticos abstratos em situações práticas.

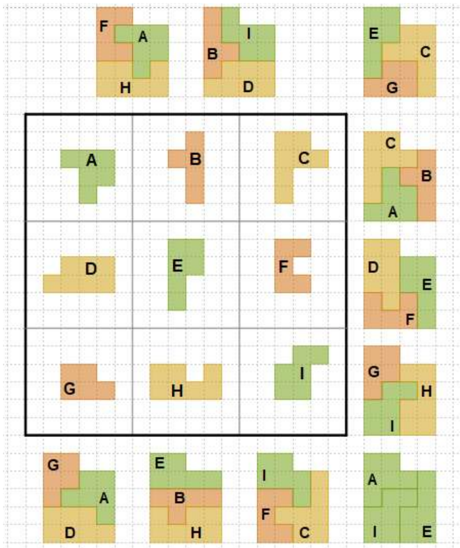
Ao analisar os quadrados mágicos geométricos propostos por Sallows, e a maneira como esses números mudam com diferentes alvos e condições, os alunos são incentivados a desenvolver um pensamento crítico e analítico.

Exemplos especiais de quadrados mágicos geométricos

Alguns quadrados mágicos, devido suas singularidades, recebem uma classificação especial, um exemplo disso é apresentado na Figura 16, que representa um quadrado semi-nasik.

Um quadrado 3 × 3 semi-nasik ou semi-panmágico são aquelas que apresentam um total de 4 diagonais mágicas, que incluem as duas diagonais principais e um destes dois pares paralelos.

Figura 16 – Um quadrado 3 × 3 semi-nasik.



6	5	7
7	6	5
5	6	7

Fonte: Elaborado pelos autores, baseado em Sallows (2013).

Note que em que cada diagonal, incluindo as diagonais “quebradas”, **AFH**, **BDI**, **CDH** e **BFG**, são mágicas, ou seja, as peças posicionadas formam o alvo. Além disso, **AFH** e **BDI** são paralelos, assim como **CDH** e **BFG**. Na parte superior da Figura 16, são mostrados os alvos **AFH** e **BDI**.

Observe ainda que as peças utilizadas consistem em três tamanhos diferentes: três pentaminós, três hexáminos e três heptaminós, formando assim as áreas de um quadrado latino.

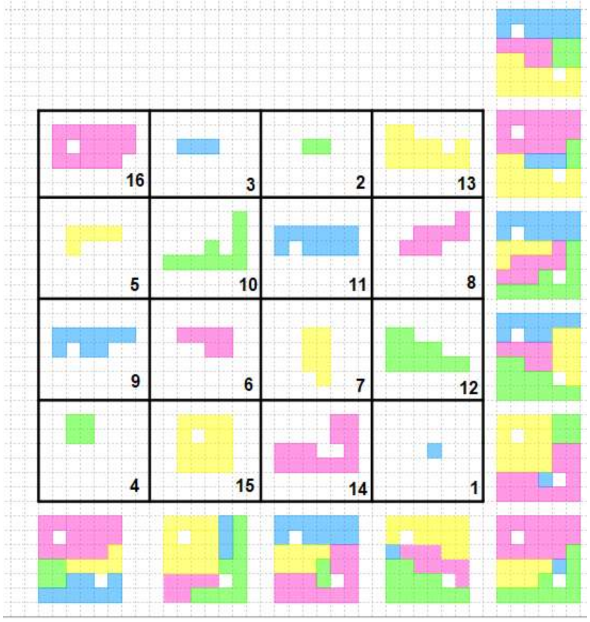
O artista e matemático alemão Albrecht Dürer (1471–1528), em sua célebre obra Melancolia I, tem despertado o interesse de inúmeros estudiosos por seu profundo simbolismo e pelas diversas interpretações acerca de seu significado na vida do autor. Um aspecto fascinante é a presença de elementos matemáticos como quadrado mágico 4 × 4, localizado no canto superior direito, composto pelos números de 1 a 16, cuja constante mágica é 34, como mostra a figura 18. Curiosamente, o ano da criação da gravura, 1 514, está presente nas duas casas centrais da linha final.

Figura 18 – À esquerda: Melancolia I, Obra de Albretcht Dürer (1514). À direita: ampliação do quadrado mágico presente em Melancolia I.

Fonte: Wikipédia (https://pt.wikipedia.org/wiki/Melancolia_I)

A Figura 19 mostra uma versão geométrica, descoberta por um computador, baseado no quadrado mágico numérico de Dürer cujo alvo é um quadrado 6×6 com dois furos internos retirados.

Figura 19 – Uma versão geométrica do quadrado 4×4 de Dürer



Fonte: Elaborado pelos autores, baseado em Sallows (2013).

Ao explorar as propriedades únicas desses quadrados, como as diagonais mágicas e as diagonais "quebradas", os alunos podem construir e analisar figuras geométricas, reforçando sua compreensão de progressões aritméticas e simetria. Utilizando poliformas como pentaminós, hexaminós e heptaminós, os alunos podem construir quadrados latinos e investigar suas propriedades combinatórias. Estas atividades não só promovem o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas e pensamento crítico, mas também permitem uma exploração visual e concreta dos conceitos matemáticos.

Um jogo como proposta pedagógica

Jogos têm sido utilizados como ferramentas didáticas em diversos contextos educacionais, incluindo o ensino de geometria (Bulut & Bulut, 2012). Muitos estudos têm demonstrado que a incorporação de jogos no ensino de geometria não apenas torna o processo de aprendizagem mais agradável para os alunos, mas também aprimora sua compreensão e retenção de conceitos geométricos. Jogos podem ajudar os alunos a desenvolver o raciocínio espacial, habilidades de resolução de problemas e capacidades de pensamento crítico, todos essenciais para dominar a geometria.

Exemplos de jogos tradicionais no ensino de geometria incluem “Quebra-Cabeças de Polígonos”, onde os alunos combinam diferentes polígonos com seus nomes e propriedades correspondentes (Clements & Battista, 1994), “Bingo de Formas”, onde os alunos identificam formas geométricas em um tabuleiro de bingo, e “Caça ao Tesouro

Geométrico”, onde os alunos procuram por objetos ou imagens que representam diferentes conceitos geométricos em seu ambiente (Tran et al., 2020).

De modo geral, a inclusão de jogos no ensino de geometria tem sido reconhecida por sua capacidade de enriquecer consideravelmente a experiência de aprendizado (Pramuditya et al., 2019) e elevar o desempenho acadêmico dos alunos (Wu & Wang, 2012).

Na busca por estratégias de ensino que integrem a prática com os conceitos abordados em sala de aula, e visando a desenvolver o pensamento geométrico dos alunos, os quadrados mágicos geométricos são considerados quebra-cabeças matemáticos que incorporam elementos geométricos em sua estrutura e oferecem aplicações que podem ser exploradas em toda a educação básica. Paralelamente, baseando-se no documento de caráter normativo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que define um conjunto de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. A componente curricular de matemática está dividida em cinco unidades temáticas, que orienta a formulação de habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental, dentre elas a geometria, que envolve um conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento.

Dentro da unidade temática de geometria, as habilidades se referem às capacidades que os estudantes irão desenvolver no estudo de determinados objetos de conhecimento (BNCC, 2018). Dentre essas, podemos identificar habilidades relacionadas a polígonos, classificação, propriedades, simetria, área e perímetro como pode ser observado no Quadro 1.

Quadro 1: Habilidades geométricas BNCC

EF05MA17	Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.
EF05MA20	Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes.

EF06MA20	Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação à lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
EF07MA21	Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
EF07MA32	Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.

Fonte: Baseado em BNCC (2018).

É interessante observar que nos anos iniciais do Ensino Fundamental, os alunos são introduzidos às formas geométricas básicas, aprendendo a identificar e comparar polígonos com base nas propriedades dos lados, vértices e ângulos. Através da manipulação dos quadrados mágicos, os estudantes podem classificar, nomear e comparar diferentes figuras geométricas, reforçando seu vocabulário e compreensão das propriedades geométricas. Além disso, atividades como a montagem de figuras específicas e a discussão sobre congruência ajudam a consolidar esses conceitos iniciais, tornando os quadrados mágicos geométricos opções atraentes não apenas para a apresentação, mas também para a consolidação desses conceitos.

Com o intuito de apresentar uma proposta pedagógica para a inserção dos quadrados mágicos geométricos na educação básica, apresentamos um jogo de cartas inspirado no quadrado mágico geométrico, aqui chamaremos este jogo de *Shape Shuffle*, que pode ser traduzido livremente como embaralhamento de formas. O jogo proposto foi desenvolvido com base nos conceitos aqui apresentados e nos conteúdos específicos contidos em livros didáticos de matemática para o ensino básico. O conteúdo completo do jogo pode ser encontrado em Souza (2024).

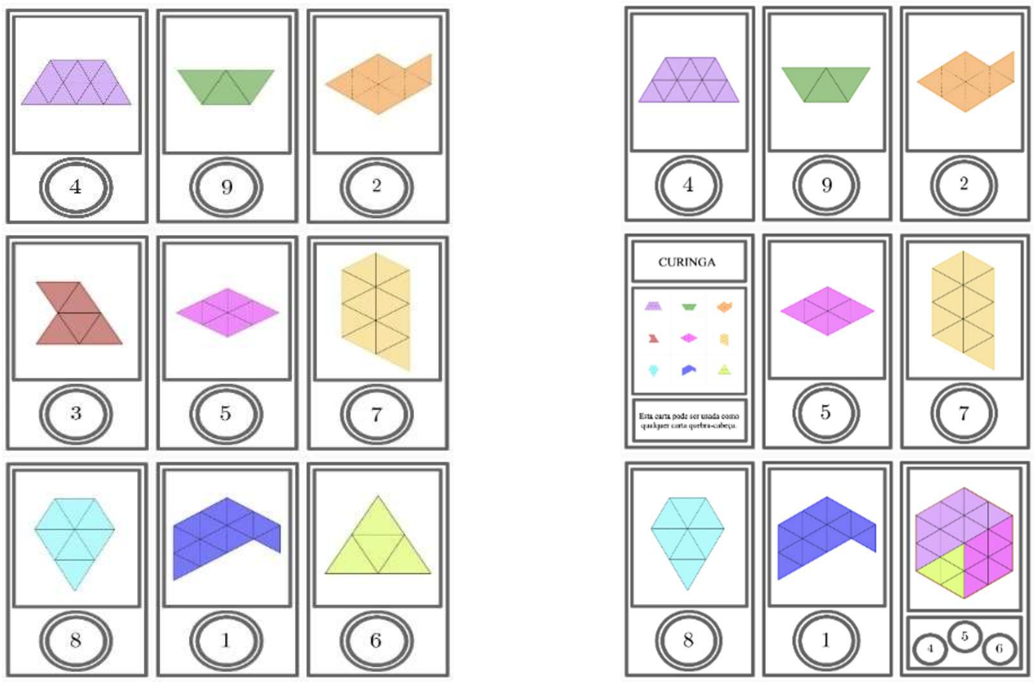
A proposta se desenvolve em torno da montagem de um quadrado geométrico 3×3, onde cada jogador busca completar seu tabuleiro com as peças adequadas. Composto por 9 cartas de quebra-cabeças e uma variedade de cartas de estratégia, a proposta do jogo é oferecer uma experiência desafiadora e dinâmica para 2 a 5 participantes.

As cartas de quebra-cabeças apresentam diferentes combinações de formas geométricas, exigindo dos jogadores análise espacial e tomada de decisões estratégicas. Além disso, as cartas de estratégia introduzem reviravoltas emocionantes, como troca de cartas com outros jogadores e aquisição de peças adversárias. Aqui faremos um pequeno resumo das regras do jogo.

- Quantidade de jogadores: 2 a 5.
- Objetivo: Ser o primeiro a completar as 9 peças do quadrado mágico geométrico.
- Cartas: Quebra-cabeça (36, 4 de cada peça do quadrado mágico geométrico); Pata mansa (5); Teletransporte (2); Bate e volta (5); Bloqueio (3); Soma 15 (2); Contra-ataque (5); Guloso (7); Cadeado (2); Promoção (5); Curinga (2); 15 completo (8, 1 de cada tipo). Total de 82 cartas.

Após o embaralhamento das cartas, cada jogador receberá um conjunto inicial de 5 cartas. Para começar, cada jogador irá sacar 2 cartas do topo do baralho. Em cada rodada subsequente, os jogadores podem jogar até 3 cartas, seguindo o sentido anti-horário. É importante observar que cada jogador pode ter no máximo 7 cartas em sua mão ao final de sua jogada. Se um jogador tiver mais de 7 cartas, ele deve descartar o excesso no fundo do baralho. Os jogadores seguem jogando cartas e preenchendo seus quadrados mágicos, até que um deles complete as 9 peças atingindo o objetivo de vencer o jogo.

Figura 1: Exemplos de soluções.



Fonte: Os autores.

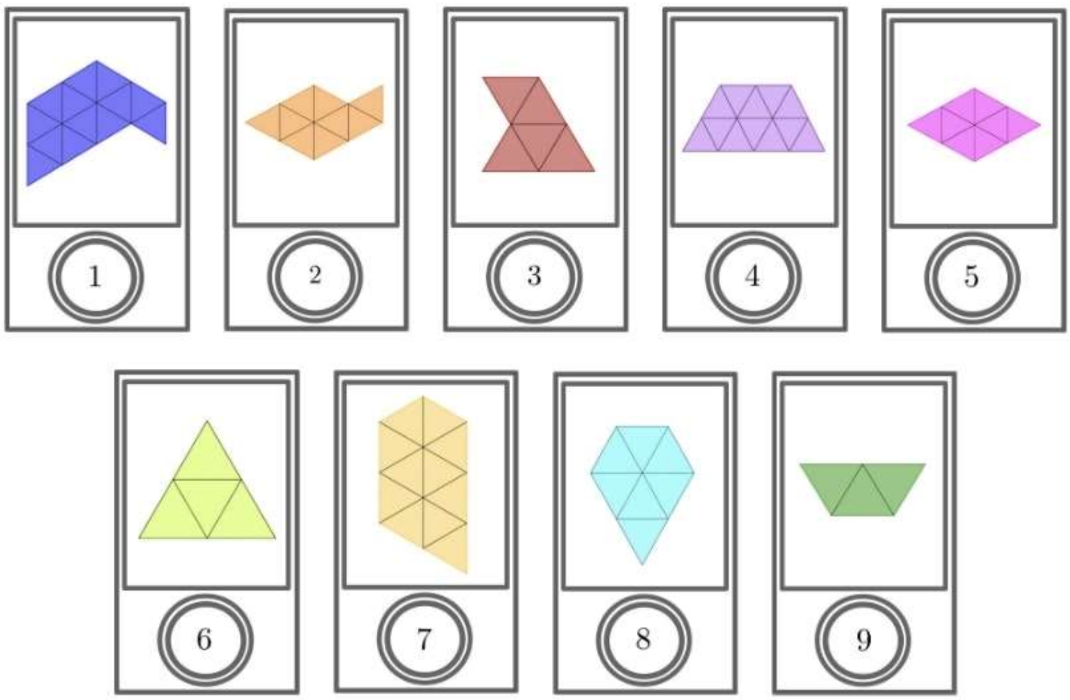
Duas possíveis soluções são ilustradas na Figura 1, sendo que uma utiliza apenas cartas de peças do quadrado mágico geométrico, enquanto a segunda utiliza duas cartas especiais em sua composição, onde a primeira solução utiliza todas as cartas que representam peças do hexágono regular. Já na segunda solução, o jogador pode utilizar, como estratégias, as cartas especiais para completar seu tabuleiro.

A mecânica do jogo promove a interação social e o pensamento tático, enquanto sua estrutura modular permite uma ampla gama de estratégias e abordagens. A combinação de elementos de sorte e habilidade contribui para uma experiência equilibrada e envolvente, adequada para jogadores de todas as idades e níveis de habilidade.

As cartas quebra-cabeça são a base do jogo, representando os elementos que os jogadores precisam para completar seus quadrados geométricos. Cada carta quebra-cabeça possui uma configuração única que corresponde a uma parte específica de um hexágono regular.

A estratégia reside na escolha cuidadosa dessas cartas para alcançar a vitória. O jogo conta com 9 cartas que representam peças necessárias para a montagem de um hexágono regular. Na Figura 2, apresentamos o layout de cada uma delas.

Figura 2: Layout das cartas.



Fonte: Os autores.

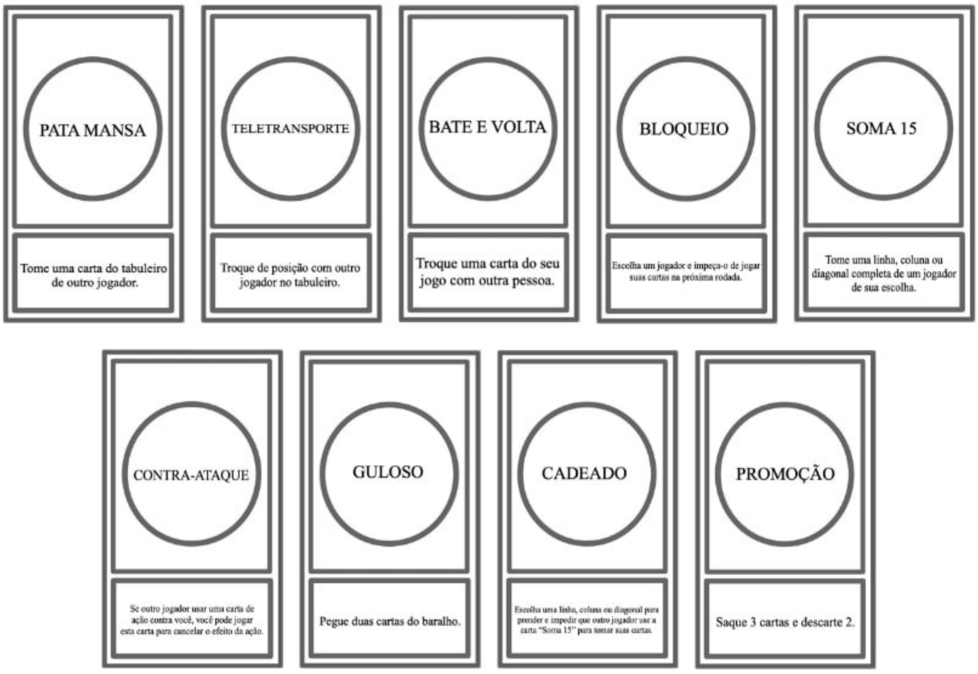
As cartas de estratégia são elementos-chave que podem mudar o rumo da partida em um instante. Estas cartas oferecem aos jogadores oportunidades únicas para dominar o tabuleiro e superar seus adversários.

Cada jogador deve usar cada carta com sabedoria para ganhar vantagem competitiva. Com uma variedade de opções à disposição, desde trocar peças até influenciar o jogo dos oponentes, essas cartas adicionam uma camada emocionante de tomada de decisões ao jogo.

O jogo conta com 9 cartas de estratégia, cada uma com habilidades especiais que podem mudar o curso do jogo. Para utilizar cada carta, o jogador deve jogá-la no centro, demonstrando a ação para todos os jogadores em disputa. As cartas de estratégia não têm efeito sobre as cartas que estão na mão dos jogadores. Na Figura 3, apresentamos cada carta e, em seguida, descrevemos detalhadamente cada uma delas, juntamente com a quantidade de cartas disponíveis no baralho.

- Pata mansa: Tome uma carta do tabuleiro de outro jogador. Quando esta carta é jogada, o jogador seleciona uma carta do jogo de um adversário e a captura. A carta capturada deve ser imediatamente incorporada ao jogo do jogador que a capturou, não podendo ser mantida na mão. Quantidade de cartas no baralho: 5 cartas disponíveis.

Figura 3: Cartas de estratégia.



Fonte: Os autores.

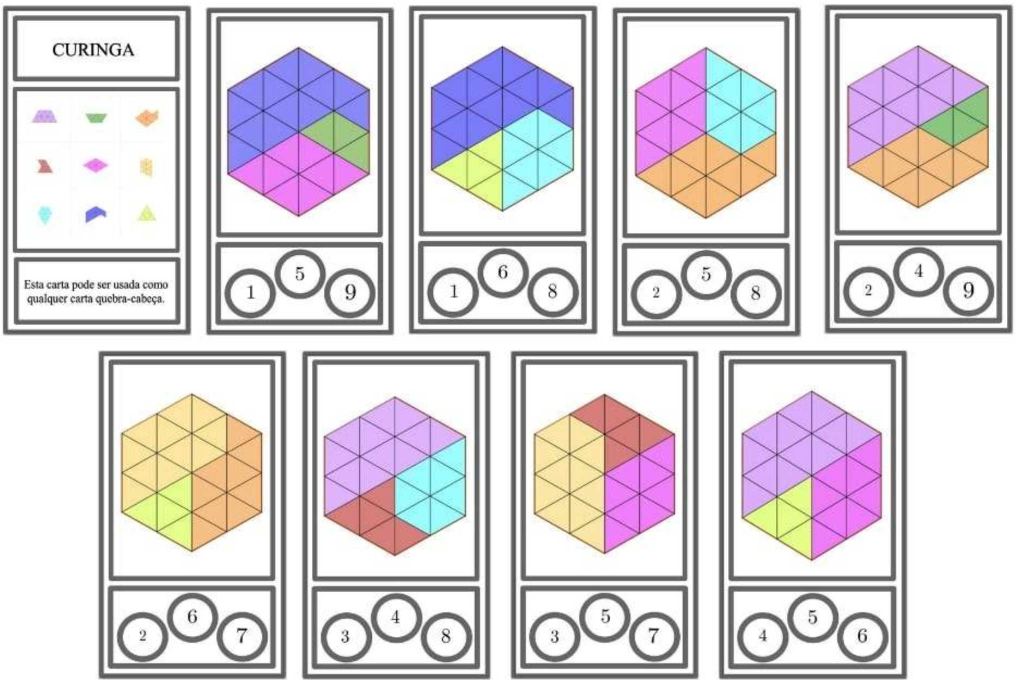
- Teletransporte: Troque de posição com outro jogador no tabuleiro. Ao utilizar esta carta, o jogador seleciona um oponente e troca todas as cartas em jogo com esse jogador. Quantidade de cartas no baralho: 2 cartas disponíveis.
- Bate e volta: Troque uma carta do seu jogo com outra pessoa. Selecione uma carta do seu jogo e, em seguida, escolha uma carta do jogo de um adversário para trocar com a carta selecionada. As cartas trocadas devem ser adicionadas ao jogo de ambos os jogadores. Quantidade de cartas no baralho: 5 cartas disponíveis.
- Bloqueio: Escolha um jogador e impeça-o de jogar suas cartas na próxima rodada. Quantidade de cartas no baralho: 3 cartas disponíveis.
- Soma 15: Tome uma linha, coluna ou diagonal completa de um jogador de sua escolha. Quantidade de cartas no baralho: 2 cartas disponíveis.
- Contra-ataque: Se outro jogador usar uma carta de ação contra você, você pode jogar esta carta para cancelar o efeito da ação. Quantidade de cartas no baralho: 5 cartas disponíveis.
- Guloso: Pegue duas cartas do baralho. Quantidade de cartas no baralho: 7 cartas disponíveis.

- Cadeado: Escolha uma linha, coluna ou diagonal para prender e impedir que outro jogador use a carta “Soma 15” para tomar suas cartas. Quantidade de cartas no baralho: 2 cartas disponíveis.
- Promoção: Saque 3 cartas e descarte 2. Quantidade de cartas no baralho: 5 cartas disponíveis.

Além das cartas de estratégia, há as cartas especiais, que oferecem aos jogadores alternativas para completar o quadrado mágico mesmo quando não possuem a carta específica necessária.

Na Figura 4, apresentamos o layout das cartas especiais. Em seguida, detalhamos cada carta especial, incluindo a quantidade de cada uma disponível no baralho.

Figura 4: Cartas Especiais.



Fonte: Os autores.

- Curinga: Esta carta pode ser usada como qualquer carta quebra-cabeça. Ela permite aos jogadores completar uma linha, coluna ou diagonal desse quadrado geométrico, escolhendo a peça que melhor se encaixa na estratégia atual do jogador. Quantidade de cartas no baralho: 2 cartas disponíveis.
- 15 completo: Esta carta pode ser usada como qualquer carta quebra-cabeça indicada em cada carta. Por exemplo, a carta 15 completo 4, 5 e 6, pode ser usada

com as peças de quebra-cabeça 4, 5 ou 6 na montagem do quebra-cabeça principal. O jogo possui 8 cartas 15 completo, que indicam os 8 hexágonos que são soluções do quadrado mágico geométrico principal.

Proposta Pedagógica de Aplicação do Jogo em Sala de Aula

O processo educacional conhecido como RICA (Raciocínio, Inteligência, Criatividade, Aprendizagem) caracteriza-se por uma abordagem pedagógica que desafia os alunos a resolverem problemas matemáticos de maneira intuitiva e progressiva. Este método inicia-se com a apresentação de um problema relacionado a um tema novo, instigando os alunos a utilizarem seu raciocínio lógico e intuitivo (Etapa R). O professor, então, fornece os recursos necessários para a resolução do problema (Etapa I), promovendo o desenvolvimento do pensamento matemático deliberativo. Posteriormente, os alunos são incentivados a criar problemas práticos do cotidiano utilizando o conteúdo abordado (Etapa C), culminando na avaliação da relevância do tópico para o aprendizado contínuo (Etapa A).

Segundo Pontes (2019), após a apresentação do tema e dos objetivos da aula, o procedimento segue da seguinte maneira:

Etapa R: Um problema matemático relacionado ao tema da aula é introduzido, e os alunos são questionados sobre a possibilidade de resolvê-lo intuitivamente. Um aluno é convidado a resolver o exercício no quadro-negro, sendo atribuída uma bonificação se o problema for resolvido.

Etapa I: O modelo matemático para a compreensão do problema é estabelecido. Os alunos são questionados sobre a compreensão da explicação, recebendo uma bonificação caso afirmem ter entendido.

Etapa C: Os alunos são desafiados a criar um problema prático do cotidiano que envolva o modelo matemático apresentado. Uma bonificação é atribuída se conseguirem criar o problema.

Etapa A: Avalia-se a necessidade do conteúdo para o cotidiano e o interesse em aprofundar o aprendizado, atribuindo-se uma bonificação se houver interesse em prosseguir.

O jogo *Shape Shuffle* foi concebido para integrar a dinâmica do processo educacional RICA, desafiando os jogadores a resolverem problemas de montagem de quebra-cabeças geométricos de maneira intuitiva e estratégica. No início do jogo, os jogadores são confrontados com o desafio de completar seus tabuleiros com as peças adequadas, espelhando a apresentação de um problema na Etapa R do método RICA, incentivando o uso do raciocínio intuitivo.

No segundo momento, os jogadores aplicam sua inteligência para encontrar soluções eficazes, alinhando-se à Etapa I do método RICA, onde se estabelece um modelo matemático para a resolução do problema. Aqui, os jogadores devem compreender as regras do jogo e as combinações possíveis para avançar.

O terceiro momento do jogo desafia os jogadores a usarem sua criatividade para desenvolver estratégias únicas para completar o quebra-cabeça, refletindo a Etapa C do método RICA, onde os alunos são incentivados a criar problemas práticos baseados no conteúdo aprendido.

Finalmente, ao término do jogo, os jogadores avaliam a relevância do conteúdo para suas experiências e interesses pessoais, semelhante à Etapa A do método RICA. Se os jogadores percebem benefícios educacionais e entretenimento, são motivados a continuar explorando o jogo, promovendo um aprendizado contínuo e engajador.

Dessa forma, a proposta pedagógica do *Shape Shuffle* busca tornar o aprendizado matemático mais dinâmico e interativo, e promover o desenvolvimento de habilidades fundamentais como raciocínio lógico, pensamento criativo e a aplicação prática dos conceitos matemáticos.

Considerações finais

O presente estudo buscou explorar o potencial dos quadrados mágicos geométricos como ferramenta pedagógica no ensino de matemática. Procuramos investigar sua história, propriedades e, principalmente, como esses quadrados podem ser introduzidos nas salas de aula da educação básica para promover o aprendizado de conceitos matemáticos de forma significativa e envolvente.

A substituição dos números tradicionais por formas geométricas nos quadrados mágicos oferece a oportunidade para os alunos explorarem padrões visuais e desenvolverem habilidades matemáticas enquanto se divertem. Essa abordagem interdisciplinar permite a integração de conceitos de geometria, álgebra e aritmética, proporcionando uma experiência de aprendizado holística e prazerosa para os alunos. Além disso, a interdisciplinaridade pode ser promovida através da integração de arte e design, permitindo que os alunos criem mosaicos ou padrões artísticos baseados em poliformas.

Neste estudo pudemos constatar o potencial dos quadrados mágicos geométricos como ferramenta pedagógica no ensino de matemática. A construção e análise desses quadrados exigem o uso do raciocínio lógico e espacial, habilidades essenciais para o aprendizado da matemática e para a resolução de problemas.

Com o intuito de promover uma aprendizagem significativa, onde os alunos possam explorar padrões visuais para desenvolver habilidades matemáticas de maneira lúdica, apresenta-se o jogo *Shape Shuffle* a fim de promover o desenvolvimento do raciocínio lógico, da inteligência estratégica e da criatividade, visndo tornar o aprendizado mais atrativo e significativo.

Espera-se que os resultados deste estudo sirvam de inspiração para educadores, incentivando-os a explorar ainda mais o potencial dos jogos como ferramentas pedagógicas, com vistas a enriquecer o processo de ensino e aprendizagem de matemática. Para trabalhos futuros, pretende-se aplicar a estratégia de ensino proposta neste trabalho em experiências de sala de aula, com o intuito de validar a ferramenta.

Recebido em: editora
Aprovado em: editora

Referências

AMBROSE, R. C.; FALKNER, K. Developing spatial understanding through building polyhedrons. **Teaching children mathematics**, v. 8, n. 8, p. 442–447, 2002.

BÁRTLOVÁ, T. **History and current state of recreational mathematics and its relation to serious mathematics**. Doctoral thesis. Charles University in Prague. Faculty of Mathematics and Physics – Department of Mathematical Analysis. Prague, 2016

BIOTTO, D. F., FAUSTINO, A. C., MOURA, A. Q. Cenários para investigação, imaginação e ação. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, 2017, p. 64-80.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

BULUT, N.; BULUT, M. Development of pre-service elementary mathematics teachers' geometric thinking levels through an undergraduate geometry course. **Procedia, social and behavioral sciences**, v. 46, p. 760–763, 2012.

CARUS, P. Introdução do livro de S. W. Andrews, **Magic Squares and Cubes**.Open Court Publishing Company, 1917.

CLEMENT, L.; TERRAZZAN, E. A. Atividades Didáticas de Resolução de Problemas e o Ensino de Conteúdos Procedimentais. **Revista electrónica de investigación en educación en ciencias**, v. 6, n. 1, p. 87–101, 2015.

CLEMENTS, D. H.; BATTISTA, M. T. Computer environments for learning geometry. **Journal of educational computing research**, v. 10, n. 2, p. 173–197, 1994.

DELAHAYE, Jean-Paul. **Les carrés magiques géométriques**. Pour La science, n. 428, p. 80-84, 2013.

DÜRER, Albrecht. Melancolia I, 1514. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Melencolia_I_(Durero).jpg> >. Acesso em: 18 jan 2024.

EVES, Howard.**Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

KISHIMOTO, Tizuko M. **Jogos infantis: o jogo, a criança e a educação**. Petrópolis, RJ: Vozes, 1993.2003.p.96.

MARTIN, L.; Towers, J.; Pirie, S. **Collective mathematical understanding as improvisation**. Mathematical Thinking and Learning, v. 8, n. 2, p. 149–183, 2006.

ORTON, A. **Pattern in the teaching and learning of mathematics.** [s.l.] Continuum, 2004.

PRAMUDITYA, S. A.; ROZAK, A.; RUKMANA, D. Solid geometry educational game based on student's mathematical understanding. **Journal of physics. Conference series,** v. 1360, n. 1, p. 012013, 2019.

SALLOWS, L. **Geometric Magic Squares : A Challenging New Twist Using Colored Shapes Instead of Numbers**, DoverPublications, 2013.

SALLOWS, L. **Geometric Magic Squares. The Mathematical Intelligencer**, v. 33, n. 4, p. 25–31, 2011.

SALLOWS, L. **Geomagic squares**, 2013 (site Internet avec une grande famille d’exemples). Disponível em: <<https://www.geomagicsquares.com/> >. Acesso em: 27 nov. 2023.

SKOVSMOSE, O. Pesquisando o que não é, mas poderia ser. In: D’AMBROSIO, U.;LOPES, C.E. (Org.). **Vertentes da subversão na produção científica em educação matemática**. Campinas: Mercado de Letras, 2015, p. 63-90.

SKOVSMOSE, O.; LIMA, P.; PENTEADO, M. G. Pedagogical imagination in mathematics teacher education. **Education sciences**, v. 13, n. 10, p. 1059, 2023.

SOUZA, Daniele Alves. **Quadrados mágicos geométricos.** 2024. 60 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Cariri, Juazeiro do Norte, 2024.

TRAN, C.; NGUYEN, T. H. N.; TRINH, V. T. The use of games in teaching Mathematics at high schools. **Vietnam Journal of Education**, v. 4, n. 1, p. 30–35, 2020.

VALE, I. Das tarefas com padrões visuais à generalização. Em J. Fernandes, H. Martinho, F. Viseu (Eds.), **Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática**. Viana do Castelo: Associação de Professores de Matemática (APM), 2009. p. 35-63.

WU, B.; WANG, A. I. A guideline for game development-based learning: A literature review. **International journal of computer games technology**, v. 2012, p. 1–20, 2012.