

Ensino e aprendizagem de proporcionalidade: algumas reflexões a partir de um mapeamento sistemático

Teaching and learning proportionality: some reflections from a systematic mapping

Roberta dos Santos Rodrigues¹

Francisco Eteval da Silva Feitosa²

RESUMO

Esse trabalho é um recorte de uma pesquisa de mestrado e tem como objetivo apresentar um panorama das pesquisas publicadas em anais de eventos nacionais e internacionais acerca do processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade, observando tendências de pesquisas e obstáculos recorrentes, por meio dos princípios do mapeamento sistemático. Foram estabelecidas como questões de pesquisa: (a) Quais as bases teóricas que subsidiam as pesquisas relacionadas a tópicos inerentes à proporcionalidade? (b) Quais teorias de ensino e de aprendizagem são mais utilizadas ao se tratar de tópicos inerentes a proporcionalidade? (c) Quais os principais obstáculos e dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade? (d) Quais os principais recursos pedagógicos que têm sido utilizados no processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade? (e) Quais outros tópicos costumam ser relacionados aos tópicos inerentes à proporcionalidade? A coleta de dados foi realizada em anais de eventos do campo da Educação Matemática – ENEM, SIPEM, CIAEM e CIBEM - que investigaram e discutiram aspectos relacionados ao pensamento proporcional, observando alguns resultados referentes ao ensino-aprendizagem de tópicos relacionados a esse tipo de pensamento matemático na educação básica. Os resultados de pesquisa evidenciam tendências quanto às teorias de aprendizagem geralmente elencadas para nortear as pesquisas sobre o tema, assim como permitiram emergir categorias de obstáculos e dificuldades relacionados ao processo de ensino-aprendizagem desse tópico.

Palavras-chave: *Pensamento Proporcional; Obstáculos; Tendências; Mapeamento sistemático.*

ABSTRACT

This work is an excerpt from a master's research and aims to present an overview of the research published in the annals of national and international events regarding the teaching-learning process of themes related to proportionality, observing research trends and recurrent obstacles, through the principles of systematic mapping. The following research questions were established: (a) What are the theoretical bases that support research related to the themes inherent to proportionality? (b) What theories of teaching and learning are most used when it comes to topics related to proportionality? (c) What are the main obstacles and difficulties in the teaching-learning process of topics related to proportionality? (d) What are the main pedagogical resources that have been used in the teaching-learning process of topics related to proportionality? (e) What other topics are usually related to the topics inherent to proportionality? Data collection was carried out in annals of events in the field of Mathematics Education - ENEM, SIPEM, CIAEM and CIBEM - which investigated and discussed aspects related

¹ Licenciada em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas - UFAM, discente do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática - PPGECiM/UFAM e bolsista do Programa de Apoio à Pós-graduação Stricto Sensu POSGRAD-FAPEAM-2024-2025. E-mail: roberta.rodrigues@ufam.edu.br

² Doutor em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas - UFAM e docente do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática - PPGECiM/UFAM. E-mail: sfeitosa@ufam.edu.br

to proportional thinking, observing some results related to the teaching-learning of this type of mathematical thinking in basic education. The research outcomes highlight trends regarding the learning theories generally listed to guide research on the topic, as well as allowing the emergence of categories of obstacles and difficulties related to the teaching-learning process of this topic.

Keywords: *Proportional Thinking; Obstacles; Trends; Systematic Mapping.*

Introdução

Noções envolvendo a proporcionalidade transparecem desde muito cedo na vida dos estudantes, seja dentro de sala de aula ou em suas atividades cotidianas, manifestadas de forma consciente assim como inconsciente. Um exemplo seria quando olhamos uma foto da família num quadro, intuitivamente percebemos que aquela imagem é uma representação reduzida do momento que realmente foi capturado pela câmera. Além disso, a proporcionalidade é a base para a compreensão de diversos outros conceitos dentro da matemática, como semelhança entre figuras, funções, probabilidade entre outros. Em todo o currículo de matemática da Educação Básica a proporcionalidade se faz presente, sendo inclusive abordada em outras ciências, como quando se estuda cartografia e suas escalas, na Geografia, ou quando se aprende que a força gravitacional entre dois corpos é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre eles, na disciplina de Física.

Além de ser um dos tópicos centrais na matemática e subsídio para o aprendizado de importantes temas em outras ciências, a proporcionalidade integra o que é conhecido como *pensamento proporcional*, o qual é um dos tipos de pensamento que compõem o pensamento matemático e que, segundo Lesh, Post e Behr (1988), pode ser considerado uma das pedras angulares da Matemática, além de constituir-se como “uma ponte entre a Matemática numérica e concreta da Aritmética, a Álgebra simbólica e a Matemática superior” (Jitendra et al., 2011, p. 731). Embora não haja um consenso quanto a definição de pensamento proporcional, Norton (2005, p. 17) o define como sendo aquele usado para “descrever os conceitos e pensamentos requeridos para compreender: taxa de variação, proporção e proporcionalidade, incluindo escala”. Dessa forma, o desenvolvimento adequado desse tipo de pensamento é essencial para compreender contextos e aplicações fundamentados na proporcionalidade (Falvo; Jucá, 2002).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do ensino evidencia a importância do tema quando afirma a proporcionalidade como uma das ideias fundamentais que constituem os diferentes campos que compõem a Matemática, junto com equivalência, ordem, interdependência, representação, variação e aproximação, as quais “são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento” (Brasil, 2018, p. 268). Além disso, espera-se que os estudantes dos Anos Iniciais e Finais possam desenvolver o pensamento proporcional através da investigação de situações que possibilitem a representação da

variação de grandezas em um sistema de coordenadas cartesianas, assim como da análise e identificação do tipo de variação apresentada (proporcional direta, proporcional inversa ou não proporcional) (Brasil, 2018).

Entretanto, não obstante sua relevância, pesquisas indicam que as ideias de proporcionalidade são pouco assimiladas, sobretudo porque seu ensino ocorre de maneira mecanizada em sala de aula, sem estimular uma compreensão aprofundada do pensamento proporcional subjacente (Lamon, 2012, 2016). Além do mais, segundo Dooley (2006, p. 3), se o pensamento proporcional “não for entendido conceitual, mas algoritmicamente, torna-se mais difícil a transferência e o uso na ‘vida real’”. Tendo em vista sua importância tanto para a Matemática quanto para outras ciências, assim como para as mais variadas atividades cotidianas, cabe ressaltar a necessidade de pesquisas cujo objetivo seja o aprimoramento do processo de ensino-aprendizagem desse tópico em sala de aula, buscando superar os obstáculos e dificuldades envolvidos.

Dito isso, o ponto de partida é investigar o que já vem sendo pesquisado dentro dessa temática, a fim de esboçar um cenário das pesquisas já produzidas com esse objetivo. Nesse sentido, o objetivo deste estudo é apresentar um panorama das pesquisas publicadas em anais de eventos nacionais e internacionais acerca do processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade, observando tendências de pesquisas e obstáculos recorrentes, por meio dos princípios do mapeamento sistemático.

Outros estudos secundários a respeito do pensamento proporcional já foram realizados antes, como o de Miranda (2009), a qual realizou uma metanálise qualitativa em dissertações de mestrado com o objetivo de sintetizar investigações cujo foco era as expressões matemáticas geradas na (ou reflexos da) manifestação e desenvolvimento do pensamento proporcional. Contudo, seu material de estudo diferencia-se do deste trabalho pois a autora restringiu-se à análise de dissertações, e, mais precisamente, às produzidas apenas no estado de São Paulo, enquanto o objeto de estudo deste são exclusivamente trabalhos publicados em anais de eventos, tanto nacionais quanto internacionais. Além disso, os dois trabalhos são metodologicamente diferentes, visto que a autora realiza uma revisão sistemática com foco em uma síntese e interpretação mais aprofundada, enquanto este tem um caráter mais exploratório, com vistas a mapear tendências, lacunas e padrões de pesquisa.

Dessa forma, a justificativa para a realização desse mapeamento é a possibilidade de uma compreensão geral das produções publicadas em anais de eventos nacionais e internacionais acerca do processo de ensino e aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade, identificando algumas tendências como as teorias de aprendizagem geralmente relacionadas às propostas pedagógicas para se trabalhar esse tópico assim como aos recursos mais utilizados para abordá-lo entre outros.

Metodologia

Um Mapeamento Sistemático (MS) é um tipo de estudo secundário, cujo objetivo deste, segundo Falbo (2018), é “revisar estudos primários, isto é, as investigações originais, relativos a certas questões de pesquisa, com o objetivo específico de integrar e sintetizar evidências relacionadas a essas questões”. Conforme Petersen et al. (2008), estudos de mapeamento sistemático são projetados para fornecer uma visão geral de uma área de pesquisa por meio da classificação e contagem de contribuições em relação às categorias dessa classificação, o que permite ao pesquisador observar lacunas e oportunidades de investigações como estudos primários.

De acordo com Falbo (2018), o processo para realização de um MS envolve três fases bem delineadas: planejamento, condução e publicação dos resultados. No *planejamento*, é identificada a motivação para se realizar o estudo, além de ser definido o protocolo da revisão, detalhando as questões da pesquisa, as estratégias de execução, os critérios para seleção dos estudos e o processo de extração e síntese dos dados dos estudos. Na fase de *condução*, os estudos primários são identificados e selecionados com base nos critérios de seleção que compõem o protocolo estabelecido, o qual deve considerar tanto o conteúdo quanto a qualidade dos estudos. Além disso, a fim de responder às questões de pesquisa, os dados devem ser extraídos e, posteriormente, sintetizados para futura análise. Quanto à *publicação dos resultados*, esta etapa representa a conclusão do processo, com a apresentação da síntese dos achados, bem como do registro esquematizado das etapas anteriores.

Este trabalho possui uma abordagem qualitativa e, quanto aos procedimentos para realização do mapeamento, seguimos as recomendações de Falbo (2018). Na etapa de *planejamento*, iniciamos definindo o objetivo geral deste estudo, que é apresentar um panorama das pesquisas publicadas em anais de eventos nacionais e internacionais acerca do processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes a proporcionalidade, observando tendências de pesquisas e temáticas recorrentes, por meio dos princípios do mapeamento sistemático.

A fim de alcançar o objetivo proposto, foram estabelecidas as seguintes questões de pesquisa: (a) Quais as bases teóricas que subsidiam as pesquisas relacionadas a tópicos inerentes à proporcionalidade? (b) Quais teorias de ensino e de aprendizagem são mais utilizadas ao se tratar de tópicos inerentes a proporcionalidade? (c) Quais os principais obstáculos e dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade? (d) Quais os principais recursos pedagógicos que têm sido utilizados no processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade? (e) Quais outros tópicos costumam ser relacionados à proporcionalidade?

Definimos os anais de quatro eventos de Educação Matemática como referência para a coleta dos dados, com o recorte temporal dos últimos 10 anos (2015 - 2024), sendo um nacional - Encontro

Nacional de Educação Matemática (ENEM), edições de 2016, 2019 e 2022 -, dois internacionais – Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM), edições de 2015, 2019 e 2022, e Congresso Ibero-americano de Educação Matemática (CIBEM), edições de 2017 e 2022 -, e um internacional mas promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), edições de 2015, 2018, 2021 e 2024. A escolha por esses eventos baseou-se na sua relevância e impacto na área de Educação Matemática no Brasil e no continente americano como um todo.

Para a etapa de *condução* do estudo, estabelecemos os descritores, inseridos separadamente, “proporcionalidade” (18 artigos), “pensamento proporcional” (1 artigo), “raciocínio proporcional” (7 artigos), “proporção” (14 artigos) e “proporcional” (3 artigos) com seus devidos correspondentes no inglês e espanhol, assim como no plural, os quais deveriam constar no título dos trabalhos. A ferramenta de busca em anais de eventos não permite o uso de operadores *booleanos*, portanto os termos foram pesquisados de forma isolada, retornando um total de 43 artigos. Além disso, em algumas edições, foi necessária a busca manual nos arquivos em PDF dos anais, documento por documento. Após a escolha dos termos de busca, foram adotados os critérios de inclusão e exclusão para seleção dos estudos (Quadro 1), aplicados primeiro no título, palavras-chave e resumo dos trabalhos e, quando necessário, após leitura na íntegra, a fim de refinar as buscas.

Quadro 1 – Critérios de Inclusão (CI) e Exclusão (CE) e total de artigos selecionados e excluídos

Código	Critério de Inclusão	Total
CI1	Abordar o ensino e aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade	43
CE1	Ausência ou discussão insuficiente sobre o tópico proporcionalidade	14
CE2	Não é um estudo primário (revisões sistemáticas, revisões de literatura, estado da arte, metanálise)	2
CE3	Pesquisas de natureza básica	3
CE4	Pesquisas de análise de currículo, livro didático e afins	2

Fonte: dados do estudo

A respeito dos trabalhos excluídos a partir do CE1, embora alguns estudos tenham trazido como tópico principal a proporcionalidade e noções relacionadas, ou, como proposta, o uso desses tópicos para se trabalhar outros conceitos matemáticos, notou-se que o foco destes trabalhos não foi a discussão dos tópicos inerentes à proporcionalidade em si, ou ainda, o texto deu destaque a outros aspectos do trabalho que não a discussão do tópico proporcionalidade, não aprofundando nesse último, motivo pelo qual não foram selecionados para este estudo.

Conforme um dos critérios de exclusão estabelecidos, os estudos de revisão, por serem secundários, não farão parte do *corpus* da pesquisa. No entanto, embora estudos semelhantes tenham

sido encontrados (Batista; Lima, 2016), este diferencia-se daquele em termos de recorte temporal e fontes de busca, que, no trabalho citado, contempla apenas as publicações que constam no ENEM, limitando-se às edições de 2010 e 2013 (X e XI edições, respectivamente). Além disso, enquanto o foco desse estudo foi apenas nos conceitos matemáticos de “razão” e “proporção”, este busca abranger vários tópicos que compõem o pensamento proporcional. Ademais, pretende-se usar mais critérios de classificação dos estudos além do seu tipo, como foi realizado no trabalho mencionado.

Silva e Costa Júnior (2016) também realizaram um levantamento bibliográfico, mas com o objetivo de apresentar os métodos utilizados pelos babilônios e egípcios para lidarem com o conceito de proporcionalidade. A revisão foi realizada em obras que tratavam de História da Matemática, pois, segundo os autores, fundamentados em Brolezzi (1991), reconhecer eventos históricos relacionados à proporcionalidade pode contribuir para uma melhor compreensão desse conceito e, por extensão, para o aprimoramento do ensino e aprendizagem em Matemática (Silva; Costa Júnior, 2016). Dessa forma, ao final, foram selecionados 22 trabalhos para compor o *corpus* da pesquisa (Quadro 2).

Quadro 2 – Corpus do Mapeamento

Evento	Título/Autores/Ano do trabalho
IX CIBEM	Desempenhos de estudantes dos 6º e 9º anos na resolução de problemas de proporção: um estudo comparativo (Merlini; Santos; Magina, 2022)
	Indicadores de progresso em níveis de raciocínio algébrico elementar na resolução de tarefas de proporcionalidade no Ensino Primário (Gaita; Wilhelmi; Ugarte; Gonzales, 2022)
XIV CIAEM	Investigando a formação para a docência – as relações proporcionais em sólidos geométricos (Aroma; Beltrame, 2015)
	Características dos Três Mundos da Matemática que emergem na resolução de um problema de proporcionalidade direta (Galvão; Souza; Poggio, 2015)
	El tipo de cantidad en proporcionalidad con problemas de valor faltante (Maciel; Soto, 2015)
	Proporção simples: um estudo de caso sobre o raciocínio de estudantes brasileiros do ensino fundamental (Zanella; Zanella, 2015)
	Antanairesis: un recurso didáctico para la enseñanza de la proporcionalidad (Suica; Ramírez, 2015)
	Proporcionalidade e função afim: uma possível conexão através da Resolução de Problemas (Costa; Allevato, 2015)
XVI CIAEM	Interpretar características del razonamiento proporcional para tomar decisiones que ayuden a los estudiantes a progresar en su aprendizaje (González; Lloret; Ciscar, 2023)
	Razonamiento proporcional: desafíos de su enseñanza en la formación inicial del profesorado (Peña-Rincón; González; López; Maggio, 2023)
	Uma classe sobre proporcionalidad em uma escuela multigrado (Luna, 2023)
VI SIPEM	Proporcionalidade através da resolução de problemas no curso superior de licenciatura em matemática (Onuchic; Allevato, 2015)
	Aprendizagens a respeito do raciocínio proporcional em uma comunidade de prática de professores de matemática (Oliveira; Cyrino, 2015)
VII SIPEM	Conhecimentos profissionais explicitados por uma professora ao ensinar proporcionalidade (Silva; Lopes; Pietropaolo; Campos, 2018)
	Resolução de problemas de divisão de proporção simples por estudantes do 3º e 5º anos (Lautert; Santos; Merlini, 2018)
IX SIPEM	Aspectos do raciocínio proporcional de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental: foco nas resoluções escritas de uma tarefa exploratória (Rodrigues; França; Rodrigues, 2024)

	A explicitação da correspondência um para muitos na resolução de problemas de proporção simples por estudantes do ensino fundamental (Sousa; Spinillo, 2024)
XII ENEM	Análise de desempenho e de estratégias de estudantes do 6º ano do ensino fundamental em situações de proporção simples (Castro; Souza; Medeiros; Souza; Dias; Filho, 2016)
	Raciocínio proporcional em um problema envolvendo relações de proporcionalidade: aspectos evidenciados na CoP-PAEM (Oliveira, 2016)
XIII ENEM	Uma introdução do conceito de proporção através da resolução de problemas no contexto do estágio obrigatório (Gardin; Rodrigues; Teixeira, 2019)
	Raciocínio proporcional: uma discussão com base nas dimensões epistêmicas do saber (Oliveira; Lins; Pereira, 2019)
	Situações de proporcionalidade: um caminho para trabalhar a relação funcional nos anos iniciais (Merlini; Teixeira, 2019)

Fonte: dados do estudo

Em termos de caracterização das pesquisas, o que tange a filiação dos autores, embora alguns dos trabalhos selecionados envolvam parcerias entre pesquisadores filiados a universidades de diferentes Estados (4) e até diferentes países (2), no que tange ao âmbito internacional, há trabalhos vinculados à Espanha (2) – contudo as experimentações ocorreram em países latino-americanos –, ao México (2), à Colômbia (1), ao Peru (1), à Costa Rica (1) e ao Chile (1). Já no âmbito nacional, os autores estão distribuídos em instituições, tanto de ensino superior quanto de educação básica, dos Estados de São Paulo (5), Paraná (4), Bahia (3), Pernambuco (2), Mato Grosso do Sul (2), Maranhão (1), Rio de Janeiro (1), Ceará (1), e Paraíba (1). É importante destacar, no contexto nacional, a falta de produções – relacionadas ao foco desta pesquisa – provenientes da região Norte do Brasil, bem como a concentração dessas iniciativas no Estado de São Paulo, envolvendo diversas instituições.

Acerca do público-alvo das pesquisas, 4 contemplam a Educação Básica Anos Iniciais (Zanella; Zanella, 2015; Lautert; Santos; Merlini, 2018; Sousa; Spinillo, 2024; Merlini; Teixeira, 2019), 7 abrangem os Anos Finais (Merlini; Santos; Magina, 2022; Gaita et al., 2022; Suica; Ramírez, 2015; Rodrigues; França; Rodrigues, 2024; Castro et al., 2016; Gardin; Rodrigues; Teixeira, 2019; Oliveira; Lins; Pereira, 2019) e 2 contemplam o Ensino Médio (Galvão; Souza; Poggio, 2015; Maciel; Soto, 2015). Já com relação à formação de professores, 3 trabalham com Formação Inicial (Costa; Allevato, 2015; González; Lloret; Ciscar, 2023; Peña-Rincón et al., 2023), 5 com Formação Continuada (Aroma; Beltrame, 2015; Luna, 2023; Oliveira; Cyrino, 2015; Oliveira, 2016; Silva et al., 2018) e 1 com ambos os seguimentos (Onuchic; Allevato, 2015).

Vale ressaltar que, apesar da pouca diferença entre o quantitativo de trabalhos cujo foco são estudantes da Educação Básica (13) e cujo público é a formação de professores (9), segundo diversos estudos, uma possível explicação para as dificuldades relacionadas à tópicos inerentes à proporcionalidade está na formação de professores, visto que tanto os professores em exercício quanto os na formação inicial têm dificuldades em ensinar conceitos relacionados à proporcionalidade (Burgos et al., 2018). Na próxima seção apresentaremos os resultados do trabalho discutindo-os a partir de cada questão de pesquisa as quais buscamos responder.

Resultados e discussões

Houve trabalhos que enfatizaram um dos tópicos abaixo em detrimento dos demais, ou os ignoraram por completo nas suas análises, por isso nem todos são citados nas respostas e discussões das questões de pesquisa.

Com vistas a responder à indagação “Quais as principais bases teóricas que subsidiam as pesquisas relacionadas a tópicos inerentes à proporcionalidade?”, buscamos identificar nos trabalhos os teóricos selecionados pelos pesquisadores para subsidiar as discussões a respeito desses tópicos. O mapeamento dessas bases a respeito do pensamento proporcional visa a compreensão do aparato teórico a partir do qual os autores traçam os objetivos dos seus trabalhos e norteiam as suas ações para, então, observar o que indicam os resultados das pesquisas.

Assim, um trabalho (Onuchic; Allevato, 2015) cita o estudo a respeito do ensino e aprendizagem de razão e proporção de Cramer, Post e Currier (1993), enquanto que seis trabalhos (Galvão; Souza; Poggio, 2015; Oliveira; Cyrino, 2015; Silva et al., 2018; Rodrigues; França; Rodrigues, 2024; Oliveira, 2016; Oliveira; Lins; Pereira, 2019) citam Lesh, Post e Behr (1988) quando falam a respeito do pensamento proporcional, os quais veem este como um conceito fundamental que representa o ponto culminante da Aritmética elementar e serve como base para tudo o que vem depois, além de proporem sete categorias de problemas envolvendo o pensamento proporcional: problema de valor omisso; problema de comparação; problema de transformação; problema de média; problema de conversão; problema envolvendo unidades de medida e números; problema de translação. Rodrigues, França e Rodrigues (2024) se fundamentam nos trabalhos de Silvestre (2012) e Silvestre e Ponte (2012) para caracterizar os aspectos relevantes do pensamento proporcional.

Galvão, Souza e Poggio (2015) trazem Post, Behr e Lesh (1995) a fim de discutir a importância do pensamento proporcional na aprendizagem de Álgebra, apresentando três principais razões para essa importância: a representação algébrica das proporções; a igualdade entre duas razões; e os diferentes modos de representação, como tabelas, gráficos, símbolos, desenhos e diagramas. Também com a proposta de desenvolver o raciocínio algébrico por meio de situações envolvendo proporcionalidade, Gaita et al. (2022), através de um enfoque ontosemiótico, trazem os indicadores identificados por Burgos e Godino (2019) para determinar o nível RAE (Raciocínio Algébrico Elementar) em práticas matemáticas associadas à proporcionalidade.

Quatro trabalhos (Peña-Rincó et al., 2023; Oliveira; Cyrino, 2015; Rodrigues; França; Rodrigues, 2024; Oliveira, 2016) basearam-se na caracterização de Lamon (2012, 2016) para o pensamento proporcional. Já Maciel e Soto (2015), para fundamentar suas ações, consideraram o estudo de Tjoe et al. (2013), os quais investigam os atributos do pensamento proporcional que estão presentes em problemas de proporcionalidade e que os estudantes deveriam dominar: comparar e ordenar frações;

construir razões; construir proporções; identificar uma reação multiplicativa entre conjuntos de valores; diferenciar a relação proporcional de uma não proporcional; e aplicar algoritmos na solução de problemas de pensamento proporcional.

Dois trabalhos (Aroma; Beltrame, 2015; Rodrigues; França; Rodrigues, 2024) fundamentaram-se na meta-análise de Maranhão e Machado (2011) a respeito do pensamento proporcional, as quais, recorrendo a diferentes referenciais teóricos, enfatizam a importância desse pensamento matemático, cujos descritores já existentes sintetizam em apenas cinco, a saber: distinguir situações proporcionais e não proporcionais; diferenciar variáveis diretamente proporcionais das inversamente proporcionais; usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade; fazer comparações numéricas envolvendo os racionais e também não numéricas, ao trabalhar com proporcionalidade; usar ideia de covariação. Em seu trabalho, Aroma e Beltrame (2015) focalizaram apenas os descritores 1 e 2, pois eram os que mais se aproximavam da proposta didática apresentada pela professora participante da pesquisa aos seus estudantes de 5º ano dos Anos Iniciais.

Costa e Allevato (2015), não obstante mencionem as autoras supracitadas, enfatizam Tinoco (1996) e Schliemann e Carraher (1997) como suas fontes de leitura a respeito das discussões que envolvem o processo de ensino e aprendizagem do tópico proporcionalidade. Luna (2023) fundamenta-se na noção de proporcionalidade de Freudenthal (1983) e Block et al. (2010), enquanto González, Lloret e Ciscar (2023) fazem uso das transições entre os níveis de pensamento proporcional (Lobato et al., 2010) dos alunos do ensino secundário que os professores devem ter em conta quando pensam em ensinar os conceitos de razão e proporção.

Seis trabalhos (Merlini; Santos; Magina, 2022; Zanella; Zanella, 2015; Lautert; Santos; Merlini, 2018; Sousa; Spinillo, 2024; Castro et al., 2016; Merlini; Teixeira, 2019) usaram a Teoria dos Campos Conceituais, mais especificamente o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas (Vergnaud, 1983), seus eixos e categorias, para embasar as suas atividades e analisar os dados. Zanella e Zanella (2015) e Lautert, Santos e Merlini (2018) usaram, também, os quatro níveis de raciocínio para a estrutura multiplicativa propostos por Magina, Santos e Merlini (2014): Nível 1: Incompreensível; Nível 2: Pensamento aditivo; Nível 3: Transição do Pensamento Aditivo para o Multiplicativo; Nível 4: Pensamento Multiplicativo, para categorizar o raciocínio dos estudantes participantes de sua pesquisa.

Suica e Ramírez (2015) partem da perspectiva de Guacaneme (2001), o qual, com base na análise de diversos textos de matemática, evidencia algumas contradições que surgem, tanto na matemática quanto intuitivamente, ao se tratar indistintamente a noção de razão e de quociente exato entre dois números, enquanto que Gardin, Rodrigues e Teixeira (2019) fundamentam seus argumentos sobre

proporcionalidade com base no trabalho de Onuchic e Allevato (2008), que trata dos diferentes “significados” do número racional.

A partir desses dados, pode-se retirar que o aparato teórico a respeito de proporcionalidade e do pensamento proporcional levado em consideração pelos trabalhos é bastante diverso, embora Lesh, Post e Behr (1988), Lamon (2012, 2016) e a Estrutura Multiplicativa dos Campos Conceituais de Vergnaud (1983) sejam os mais utilizados, o que evidencia uma tendência na interpretação de como o pensamento proporcional é estruturado e desenvolvido pelos estudantes.

A fim de responder à questão de pesquisa “Quais teorias de ensino e de aprendizagem são mais utilizadas ao se tratar de tópicos inerentes a proporcionalidade?”, identificamos as teorias e metodologias de ensino e aprendizagem utilizadas pelos professores, de forma explícita, para se trabalhar os tópicos específicos de cada um dos trabalhos.

Em se tratando de metodologias de ensino, Costa e Allevato (2015) e Onuchic e Allevato (2015) fizeram uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (Allevato; Onuchic, 2009), a qual é realizada a partir de problemas geradores de novos conteúdos, enquanto que Silva et al. (2018) e Gardin, Rodrigues e Teixeira (2019) usaram apenas esta última, seguindo as 9 etapas propostas pelas autoras, a saber: 1) Preparação do problema; 2) Leitura individual; 3) Leitura em conjunto; 4) Resolução do problema; 5) Observar e incentivar; 6) Registro das resoluções na lousa; 7) Plenária; 8) Busca do consenso; 9) Formalização do conteúdo.

Gaita et al. (2022) e Luna (2023) utilizaram as fases da Teoria das Situações Didáticas - TSD, de Brousseau (1986, 2007), para construir a sua proposta de ensino e realizar a análise dos dados coletados, elencando também noções como “contrato didático” e “variáveis didáticas”. Rodrigues, França e Rodrigues (2024) conduziram suas atividades a partir da perspectiva do Ensino Exploratório, que se organiza em quatro fases: apresentação e proposição da tarefa; desenvolvimento da tarefa; discussão coletiva e sistematização das aprendizagens (Canavarro; Oliveira; Menezes, 2012).

Já com respeito às teorias de aprendizagem, seis trabalhos (Merlini; Santos; Magina, 2022; Zanella; Zanella, 2015; Lautert; Santos; Merlini, 2018; Sousa; Spinillo, 2024; Castro et al., 2016; Merlini; Teixeira, 2019) fundamentaram-se na Teoria dos Campos Conceituais, mais especificamente na Estrutura Multiplicativa (Vergnaud, 1983), para estruturar a tarefa proposta e/ou realizar a análise das estratégias de resolução dos estudantes.

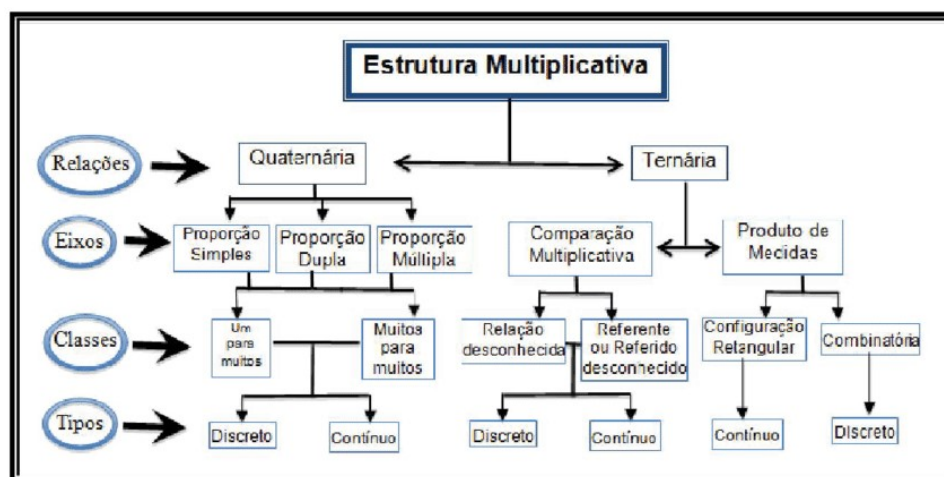
Galvão, Souza e Poggio (2015) norteiam sua questão de pesquisa e sua ação a partir da Teoria dos Três Mundos da Matemática (Tall, 2004), a qual defende que, para o desenvolvimento cognitivo do ser humano em Matemática, são necessárias atividades que abarquem os diferentes tipos de pensamento matemático, e que categoriza a aprendizagem em três diferentes mundos: mundo conceitual corporificado, mundo operacional simbólico e mundo axiomático formal.

Maciel e Soto (2015) basearam-se no Enfoque Ontológico e Semiótico da Cognição Matemática – EOS, de Godino (1998, 2002), a fim de tentar compreender as diferentes interpretações do significado de um objeto matemático e analisar as relações que se formam entre esses objetos. Gaita et al. (2022) também se apoiaram nessa teoria, embora com foco no modelo de Raciocínio Algébrico Elementar – RAE (Godino et al., 2014) e nos indicadores propostos para determinar o nível RAE (Burgos; Godino, 2019) em práticas matemáticas associadas à proporcionalidade. Aroma e Beltrame (2015) fundamentaram-se na Teoria dos Registros de Representações Semióticas (Duval, 2002) durante a análise das respostas dos estudantes à tarefa proposta.

Suica e Ramírez (2015) basearam suas ações no chamado “Retreinamento cognitivo” (Ames, 1987), o qual propõe estratégias que estimulam a reflexão e a modificação de comportamentos cognitivos através de intervenções planejadas. Já Oliveira e Cyrino (2015) e Oliveira (2016) nortearam suas ações a partir da perspectiva da Teoria Social de Aprendizagem por meio de uma Comunidade de Prática (Wenger, 1998), utilizando da Teoria da Aprendizagem Situada (Wenger, 1998) para fazer a análise de seus dados.

A partir do exposto, pode-se destacar a Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud, mais especificamente o Campo Conceitual Multiplicativo (Figura 1), como a mais utilizada pelos pesquisadores. Segundo Merlini, Santos e Magina (2022), esse campo abrange diversas situações que exigem o uso das operações de multiplicação, divisão ou uma combinação entre ambas, além de contemplar um conjunto de conceitos, incluindo espaço vetorial, análise dimensional, fração, razão, proporção, número racional, multiplicação e divisão.

Figura 1 – Esquema do Campo Conceitual Multiplicativo.



Fonte: Magina, Merlini e Santos (2016, p. 5).

Dessa forma, o campo conceitual multiplicativo, focando nas relações quaternárias, é composto por um conjunto de situações que envolvem os conceitos que subjazem o tópico de proporcionalidade,

proporcionando toda uma estrutura de relações entre essas situações e os conceitos a fim de que o professor tenha um aporte para traçar seus objetivos de aprendizagem.

Para responder à questão “Quais os principais obstáculos e dificuldades no processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade?”, identificamos os que foram levantados e conjecturados pelos autores das pesquisas que fazem parte do *corpus* desse trabalho, não dos obstáculos que estes citam na sua introdução e referencial teórico através de referências a outros estudos. Após análises, classificamos as dificuldades encontradas em seis categorias principais (Quadro 3):

Quadro 3 – Categorias de obstáculos e dificuldades

Categoria	Trabalhos
Confusão entre raciocínio aditivo e multiplicativo	Gaita et al. (2022), Silva et al. (2018) e Oliveira (2016)
Dificuldade com a constante de proporcionalidade	Costa e Allevato (2015), Galvão, Souza e Poggio (2015) e Onuchic e Allevato (2015)
Obstáculos relacionados às operações matemáticas e temas prévios e subjacentes ao pensamento proporcional	Castro et al. (2016), Costa e Allevato (2015), Lautert; Santos e Merlini (2018) e Oliveira (2016)
Dificuldades na interpretação de grandezas e tipos de quantidades	Maciel e Soto (2015), Rodrigues, França e Rodrigues (2024) e Suica e Ramírez (2015)
Ensino mecanizado e falta de compreensão conceitual	Galvão, Souza e Poggio (2015), Oliveira e Cyrino (2015), Onuchic e Allevato (2015), Oliveira (2016) e Rodrigues, França e Rodrigues (2024)
Engajamento e dificuldades na resolução de problemas	Castro et al. (2016), Merlini, Santos e Magina (2022), Oliveira, Lins e Pereira (2019), Peña-Rincón et al. (2023), Silva et al. (2018), Sousa e Spinillo (2024) e Zanella e Zanella (2015)

Fonte: dados do estudo

(1) *Confusão entre raciocínio aditivo e multiplicativo*: Muitos estudantes apresentam dificuldades em diferenciar situações que exigem o uso do raciocínio multiplicativo daquelas que envolvem soma e subtrações diretas (Gaita et al., 2022; Silva et al. 2018). Segundo Oliveira (2016), o pensamento relativo (multiplicativo) não é desenvolvido de maneira natural, assim verifica-se a mobilização do pensamento absoluto (aditivo) quando deveria ser usado o relativo, pois aquele é base de experiências de contagem direta e do trabalho com números naturais. Segundo a autora, as dificuldades apresentadas pelas professoras participantes da sua pesquisa em relacionar as grandezas e diferenciar o significado das comparações absolutas e multiplicativas podem ser considerados reflexos das propostas de ensino vigentes, que não têm priorizado o desenvolvimento matemático dos indivíduos, sua capacidade de comunicação, argumentação e interpretação ao lidar com relações abstratas de natureza multiplicativas.

(2) *Dificuldade com a constante de proporcionalidade*: Galvão, Souza e Poggio (2015) e Costa e Allevato (2015) observaram que os alunos frequentemente definem relações proporcionais apenas com base no aumento ou diminuição das grandezas envolvidas, sem compreender a relação multiplicativa subjacente. Costa e Allevato (2015) e Onuchic e Allevato (2015) também identificaram dificuldades na identificação da constante de proporcionalidade, a qual é responsável por constituir

tal relação como uma função linear (Costa; Allevato, 2015), assim como na distinção entre proporcionalidade e outras relações matemáticas.

(3) *Obstáculos relacionados às operações matemáticas e temas subjacentes ao pensamento proporcional*: Algumas dificuldades estão diretamente ligadas às operações matemáticas envolvidas no pensamento proporcional e aos temas subjacentes a esse. Lautert, Santos e Merlini (2018) destacam que a divisão é um dos obstáculos mais difíceis para as crianças, sendo um conceito intrínseco à Estrutura Multiplicativa, enquanto Castro et al. (2016), além da divisão, citam também a multiplicação como sendo as operações de maior dificuldade entre os estudantes, as quais são requisitadas para trabalhar conceitos como proporção, covariação, razão entre outros.

Na sua pesquisa, Costa e Allevato (2015) evidenciaram a dificuldade dos participantes em operar com uma expressão, o que, segundo os autores, demonstra falta de conhecimento algébrico e numérico. Oliveira (2016) traz ainda que os temas subjacentes ao pensamento proporcional, como os supracitados, são, por vezes, pouco explorados na formação de professores.

(4) *Dificuldades na interpretação de grandezas e tipos de quantidades*: Maciel e Soto (2015) argumentam que o tipo de quantidade envolvida pode ser a base de algumas das problemáticas que enfrentam os estudantes com os problemas de proporcionalidade, citando, como exemplo, o uso de quantidades heterogêneas, visto que os estudantes não estabelecem uma relação significativa imediata entre as quantidades – a dificuldade nesse processo, segundo os autores, está no tratamento semântico da interpretação das unidades geradas pela comparação, como newton-metro, pressão-temperatura etc. Os autores citam, nesse caso, os antecedentes históricos do tema como um obstáculo epistemológico, visto que historicamente as relações de proporcionalidade foram primeiro estabelecidas entre quantidades de mesma natureza e, só então, ampliadas para quantidades de naturezas distintas, o que mostra que chegar à ideia de razão de quantidades não homogêneas não é uma inclinação natural.

Suica e Ramirez (2015) também identificaram dificuldades entre os estudantes quando os problemas envolvem a busca por um segmento em vez de um número devido à tendência dos alunos de reduzir todas as relações matemáticas a números porque é mais fácil para eles tratarem com estes últimos. Além disso, Rodrigues, França e Rodrigues (2024) reforçam essa dificuldade ao destacar o desafio que é para muitos estudantes identificarem corretamente as grandezas e suas relações.

(5) *Ensino mecanizado e falta de compreensão conceitual*: Vários estudos indicam que o ensino da proporcionalidade muitas vezes enfatiza abordagens mecânicas, sem promover uma real compreensão conceitual. Onuchic e Allevato (2015) e Oliveira e Cyrino (2015) mencionam que o ensino é frequentemente restrito à aplicação de regras como a regra de três, sem explorar conexões com outros conceitos dentro e fora da matemática.

Além disso, com relação à resolução de problemas, os estudantes podem até responder às situações, mas não porque têm familiaridade com a ideia de grandezas proporcionais, mas porque sabem aplicar um dos métodos: taxa unitária; regra de três; ou decomposição em parcelas, e não associam estes métodos à proporcionalidade (Galvão; de Souza; Poggio, 2015).

Há ainda casos em que a natureza multiplicativa da relação é observada pelos alunos, mas não compreendida em termos de comparação e relação entre as grandezas envolvidas (Rodrigues; França; Rodrigues, 2024), ou seja, os alunos sabem que devem realizar operações de natureza multiplicativa, mas não compreendem o porquê de estarem fazendo isso, o que evidencia uma fragilidade na produção de significado para as comparações multiplicativas e seus valores resultantes (Oliveira, 2016).

(6) *Engajamento e dificuldades na resolução de problemas*: Algumas pesquisas também apontam desafios relacionados ao engajamento dos alunos e à sua capacidade de resolver problemas envolvendo proporcionalidade. Oliveira, Lins e Pereira (2019) apontam que a falta de engajamento dificulta a identificação de relações multiplicativas e a interpretação de tabelas e gráficos, enquanto Silva et al. (2018) destacam que a forma como os problemas são explorados pode influenciar as dificuldades enfrentadas pelos alunos. Peña-Ricón et al. (2023) apresentam o caso de um grupo de professores em formação inicial que, ao elaborar uma situação envolvendo proporcionalidade, cometeu erros de sentido. Embora a relação entre as variáveis representasse corretamente o tipo de relação matemática desejada, havia inconsistências entre a situação proposta e a realidade, o que comprometia a conexão desse conceito com o cotidiano dos alunos.

Sousa e Spinillo (2024) indicam que a ausência de uma estrutura explícita de "um para muitos" em certos enunciados dificulta a resolução, enquanto Castro et al. (2016) observam que os alunos enfrentam maiores dificuldades ao resolver situações da classe "muitos-para-muitos" do que da classe "um-para-muitos". Além disso, geralmente os estudantes possuem mais dificuldades com o produto de medidas do que com o isomorfismo, a não ser que esse seja interpretado como dupla proporção (Zanella; Zanella, 2015). Merlini, Santos e Magina (2022) evidenciaram que a estratégia de resolver problemas estabelecendo uma relação de correspondência funcional é mais simples para os estudantes do que resolver o problema por meio do escalar multiplicativo, além de hipotetizar que problemas em que a relação funcional entre as variáveis distintas está dentro do domínio dos números naturais são mais simples do que quando não estão.

Dessa forma, os obstáculos identificados na literatura reforçam a necessidade de abordagens pedagógicas que promovam uma compreensão conceitual da proporcionalidade, em vez de apenas enfatizar métodos procedimentais, de modo a dar sentido ao tipo de relação entre as grandezas e significado aos resultados encontrados pelos estudantes ao resolver as situações propostas.

Deve-se também dar uma maior atenção a forma como os problemas são explorados em sala de aula, de forma que os alunos analisem criticamente o tipo de estratégia adequado para resolver situações de proporcionalidade. Além disso, o professor deve privilegiar situações conectadas com a realidade e com outros conceitos matemáticos, a fim de haver um maior engajamento por parte dos estudantes na resolução dos problemas.

Para responder à questão “Quais os principais recursos pedagógicos que têm sido utilizados no processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade?”, buscamos identificar que recursos os professores costumam usar para sustentar a sua prática pedagógica ao tratar de tópicos relacionados ao pensamento proporcional, assim como a sua potencialidade para promover a aprendizagem dos estudantes. Dito isso, Rodrigues, França e Rodrigues (2024) fizeram uso de uma tarefa exploratória (Ponte, 2005), a fim de favorecer a mobilização de aspectos específicos do pensamento proporcional dos alunos, e da Plataforma digital Genially para introduzir a tarefa a partir de uma história animada.

Em seu trabalho, Aroma e Beltrame (2015) fizeram uso, a partir das etapas de uma sequência didática, de sólidos geométricos em material acrílico e de desenhos, manipulação, recorte e colagem de caixas de embalagem diversas, além de tabelas para explorar a relação entre o número de vértices (arestas) da base de prismas com diferentes configurações com o número total de vértices (arestas) do prisma. Já Gaita et al. (2022) utilizaram as tabelas como instrumento para ordenar valores e estabelecer relações entre magnitudes diretamente proporcionais com os estudantes.

Peña-Rincón et al. (2023), utilizando a metodologia de pesquisa Design Based Research – DBR (Reimann, 2011), também através de uma sequência didática, propuseram uma atividade que fez uso de 116 cartões plastificados de 9x12cm, de cores diferentes e associados a uma mesma situação, organizados da seguinte forma com relação a coloração: amarelos: *situação*; vermelhos: *variáveis implicadas*; verdes: *tabela de valores*; cinzas: *gráficos* (alguns cartões estavam em branco pra que os acadêmicos pudessem completar), com o objetivo principal de caracterizar o tipo de relação que ocorre entre duas variáveis envolvidas na mesma situação.

Suica e Ramírez (2015) usaram como recurso à sua proposta a história da matemática através do Método de Antanairesis (Algoritmo de Euclides) e classificaram, como material concreto utilizado, palitos de madeira coloridos e, como recurso intangível, representações de pares de segmentos de diferentes medidas. Já Silva et al. (2018), fundamentando-se no Método Modelo de Cingapura (MMC), trabalharam com barrinhas para que os estudantes modelassem as situações³. Os demais

³ O MMC é um método específico de resolver problemas matemáticos que utiliza barras retangulares como representações pictóricas de relações quantitativas em situações problema (Silva et al., 2018).

trabalhos fizeram uso de tarefas e situações diversas com objetivos bem delineados, mas sem recorrer a outros recursos para integrar a sua prática.

Pelo exposto, visto que dos 22 (vinte e dois) trabalhos, apenas 6 (seis) fizeram uso de recursos alternativos, evidencia-se uma tendência ao uso de tarefas e situações estruturadas com objetivos específicos, porém sem recorrer a demais recursos para sustentar a prática, embora a eficácia da proposta não seja prejudicada.

Para responder à seguinte questão: “Quais outros tópicos costumam ser relacionados à proporcionalidade?”, assim como na seção de obstáculos, buscamos identificar essas conexões a partir das reflexões e conclusões dos trabalhos que compõem o *corpus* da pesquisa, e não das citações de outros teóricos que estes trazem no seu referencial. Portanto, referenciamos apenas os trabalhos que fazem esse movimento.

Assim, baseando-se em Maranhão e Machado (2011), segundo os quais a compreensão dos conceitos inerentes ao pensamento proporcional se manifesta por meio de sua aplicação em problemas de diferentes áreas da Matemática e nas atividades humanas, Aroma e Beltrame (2015), a partir de sua investigação, concluíram que a abordagem didática dos sólidos geométricos pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento proporcional, desde que haja essa intencionalidade no trabalho docente, que foi precisamente a proposta dos autores.

Já Gaita et al. (2022) e Merlini e Teixeira (2019) apresentam situações envolvendo proporcionalidade como potenciais para o desenvolvimento do Pensamento Algébrico, visto que essa noção é transversal no currículo da Educação Básica, associando-a desde as relações de dobro e metade⁴ até modelagem mediante função linear (Wilhelmi, 2017 apud Gaita et al., 2022). Merlini, Santos e Magina (2022) também trazem uma conexão com este último, pensando a introdução do conceito de função a partir da generalização de situações multiplicativas, no âmbito da relação quaternária, tendo em vista o Campo Conceitual Multiplicativo. Já Costa e Allevato (2015), além de também relacionarem a proporcionalidade com o tópico função (afim), com a proposta de desvinculá-lo da função afim não linear, afirmam que:

a proporcionalidade não é apenas um conteúdo matemático, mas um ‘formador’ de estruturas cognitivas para a compreensão de outros importantes conceitos matemáticos, tanto nas questões numéricas como naquelas que envolvem medidas, Álgebra e Geometria (p. 143).

Onuchic e Allevato (2015) veem a proporcionalidade como princípio unificador na matemática, ou seja, segundo as autoras:

as relações proporcionais desempenham um papel chave em outros assuntos importantes como: razões, proporções, porcentagem, taxa, escala, semelhança de figuras geométricas, declividade, funções lineares, divisão em partes direta e inversamente proporcionais, regras de três, probabilidade e chance, sequências,

⁴ Relación de doble-mitad.

De forma mais localizada, Galvão, Souza e Poggio (2015) relacionam a proporcionalidade aos tópicos de fração, semelhança, regra de três, porcentagem e grandezas direta e inversamente proporcionais, no Ensino Fundamental, razão e proporção, semelhança, representação gráfica de funções que relacionam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, no Ensino Médio, e função e derivada no Ensino Superior. Luna (2023) também conecta a proporcionalidade ao tópico de fração, mas no sentido de que esta pode ser usada como estratégia para resolver problemas envolvendo proporcionalidade. Já em Silva et al. (2018), os participantes da pesquisa relacionam-no à fração e à porcentagem.

Suica e Ramírez (2015) vinculam o tópico de proporcionalidade ao de Máximo Divisor Comum (MDC) ao introduzirem o primeiro a partir de situações que visavam a busca de um segmento cuja medida seria a comum entre um par de segmentos dado. Por discutir o pensamento proporcional como um todo, Oliveira e Cyrino (2015) trazem as noções necessárias para o seu desenvolvimento/mobilização, a saber:

produzir significado para as diferentes representações do número racional (porcentagem, decimal, fração), para as interpretações da representação fracionária a/b (relação parte-todo/medida, quociente, razão, probabilidade, operador) e ainda identificar relações coerentes entre essas representações (proporcionalidade direta ou inversa, equivalência) (p. 3).

Localizando as situações envolvendo proporcionalidade dentro do Campo Conceitual Multiplicativo, Silva et al. (2018) consequentemente relacionam esse tópico à fração, razão, função linear e função n-linear, número racional, dentre outros. Já Sousa e Spinillo (2024) associam a relação do tipo “um para muitos” com atividades envolvendo o raciocínio combinatório e, junto com Castro et al. (2016), colocam as operações de multiplicação e divisão como pré-requisitos para resolução de certos problemas envolvendo proporção. Por fim, Oliveira (2016, p. 4) destaca a importância do pensamento relativo “para lidar com relações de proporcionalidade e proporção em problemas que envolvam comparações entre razões e para desenvolver/mobilizar o Pensamento Proporcional”.

Dessa forma, percebe-se que o tópico proporcionalidade é envolto por uma gama de outros conceitos que o subjazem ou que dependem do seu entendimento para serem plenamente compreendidos, além de perpassar todo o ensino básico dos estudantes. Dito isso, sua importância se faz mais evidente visto que fragilidades conceituais dentro da proporcionalidade impactam nos mais diversos conceitos subsequentes, tanto dentro da matemática – semelhança, funções, razões trigonométricas, derivadas entre outros –, como em outros contextos.

Conclusões

Este estudo teve como objetivo apresentar um panorama das pesquisas publicadas em anais de eventos nacionais e internacionais acerca do processo de ensino-aprendizagem de tópicos inerentes à proporcionalidade, observando tendências de pesquisas e obstáculos recorrentes, por meio dos princípios do mapeamento sistemático. A partir da análise dos trabalhos que compuseram o *corpus* do estudo, visamos responder a cinco questões de pesquisa, observando tendências.

Com base nos achados, observa-se que a literatura sobre proporcionalidade e pensamento proporcional se apoia em diversas bases teóricas, com destaque para a Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud, e os estudos de Lesh, Post e Behr, além das contribuições de Lamon. Essa diversidade reflete diferentes perspectivas sobre como os estudantes desenvolvem esse tipo de pensamento, mas também sugere uma tendência à interpretação da proporcionalidade sob a ótica das Estruturas Multiplicativas. No entanto, os desafios identificados apontam para a necessidade de abordagens que transcendam o ensino mecanizado e favoreçam a construção de sentido sobre as relações proporcionais. A forma como os problemas são trabalhados em sala de aula tem um impacto significativo na compreensão dos estudantes, além de que o ensino deve privilegiar conexões entre a proporcionalidade e outras áreas da matemática e da vida cotidiana, promovendo maior engajamento e entendimento conceitual.

Além disso, a análise indica que, embora as pesquisas utilizem tarefas estruturadas para explorar a proporcionalidade, há uma baixa adesão a recursos alternativos, como materiais manipulativos ou tecnologias, que poderiam enriquecer a prática pedagógica. Por fim, fica evidente que a proporcionalidade não é um conceito isolado, mas um eixo central no desenvolvimento matemático dos alunos, influenciando desde a compreensão de semelhança entre figuras e funções até conceitos avançados em trigonometria e cálculo. Assim, o ensino eficaz desse tema tem implicações diretas na construção do pensamento matemático e na aprendizagem de diversas disciplinas, reforçando a necessidade de abordagens didáticas mais integradas e contextualizadas.

Uma das limitações deste estudo diz respeito ao *corpus* da pesquisa, composto exclusivamente por trabalhos publicados em anais de eventos. Embora esses estudos forneçam um panorama relevante e atual sobre a produção acadêmica na área, a ausência de artigos publicados em periódicos pode restringir a abrangência das discussões e aprofundamentos teóricos sobre o tema. Além disso, diante do grande número de trabalhos selecionados, torna-se inviável uma análise aprofundada sobre cada um dos trabalhos. Outra limitação envolve o recorte geográfico das pesquisas, cujas experimentações ocorrem apenas em países latino-americanos, fornecendo um panorama reduzido em comparação às pesquisas realizadas no mundo todo.

Diante dessas limitações, pretende-se dar continuidade a essa investigação por meio de uma revisão sistemática, que permitirá uma análise mais aprofundada sobre os obstáculos envolvidos no

ensino e na aprendizagem da proporcionalidade. Para isso, o estudo focará em um *corpus* reduzido, priorizando trabalhos que tenham como participantes professores em serviço e professores em formação inicial. O objetivo será compreender melhor os desafios que emergem da atuação docente e relacioná-los ao conhecimento especializado do professor de e que ensina matemática, ampliando as discussões sobre a influência desse conhecimento na superação das dificuldades no ensino da proporcionalidade.

Referências

- ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 55, p.1-19. 2009.
- AMES, C. The enhancement of student motivation. In: MAEHR, M.; KLEYBER, D. (ed.), **Avances y Motivation and Achievement: Enhacing Motivation**, vol.5. Greenwich: Jai Press, 1987.
- AROMA, A. C. S.; BELTRAME, S. R. M. Investigando a formação para a docência – as relações proporcionais em sólidos geométricos. In: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais [...]**. República Dominicana: IACME, 2015, p. 308-314.
- BATISTA, J. A.; LIMA, T. N. S. Trabalhos sobre razão e proporção nos X e XI encontros nacionais de educação matemática. In: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-13.
- BLOCK D.; MENDOZA, T.; RAMÍREZ, M. **Al doble le toca el doble?** La enseñanza de la proporcionalidad en la educación básica. México: Somos maestros/ Cinvestav, 2010.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- BROLEZZI, A. C. **A arte de contar: uma introdução ao sentido do valor didático da História da Matemática**. São Paulo, 1991. 75 p. Dissertação (Mestrado em Educação) –Programa de Pós-Graduação em Educação – PPGE, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1991.
- BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. **Recherches en didactique des mathématiques (Revue)**, v. 7, n. 2, p. 33-115, 1986.
- BROUSSEAU, G. **Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas en matemáticas**. 1 ed. Buenos Aires: Libros de Zorzal, 2007.
- BURGOS, M.; BELTRÁN-PELLICER, P.; GIACOMONE, B.; GODINO, J. Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. **Educación e Pesquisa**, v. 44, n. e182013, 2018.
- BURGOS, M.; GODINO, J. D. Emergencia de razonamiento proto-algebraico en tareas de proporcionalidad en estudiantes de primaria. **Educación Matemática**, v. 31, n. 3, p. 117-150, 2019.
- CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In: L. Santos (ed.). **Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática**. Portalegre: SPIEM, 2012. p. 255-266.

- CASTRO, J. B.; SOUZA, D. C.; MEDEIROS, D. M.; SOUZA, M. S. M. X.; DIAS, A. C. A. M.; FILHO, J. A. C. Análise de desempenho e de estratégias de estudantes do 6º ano do ensino fundamental em situações de proporção simples. In: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-12.
- COSTA, M. S.; ALLEVATO, N. S. G. Proporcionalidade e função afim: uma possível conexão através da Resolução de Problemas. In: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais [...]**. República Dominicana: IACME, 2015, p. 141-152.
- CRAMER, K.; POST, T.; CURRIER, S. Learning and teaching ratio and proportion: research implications. In: OWENS, D. T. (ed.). **Research ideas for the classroom: middle grades Mathematics**. New York: Macmillan, 1993. p. 159-178.
- DOOLEY, K. B. **An investigation of proportional thinking among high school students**. 2006. 170 f. Doctoral Dissertation (Philosophy Curriculum and Instruction) – Graduate School of Clemson University, Clemson, 2006.
- DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking: Basic issues for learning. In: HITT, F. (Ed.) **Representations and mathematics visualization**. México, D.F.: Departamento de Matemática Educativa Del Cinestav, 2002.
- FALBO, R. de A. Mapeamento sistemático. **Retrieved October**, v. 7, 2018.
- FALVO, S. R.; JUCÁ, R. S. O raciocínio proporcional através da resolução de problemas: uma experiência de formação com professores que atuam nos anos iniciais. **Com a Palavra, o Professor**, v. 7, n. 18, p. 135-152, 2022.
- FREUDENTHAL, H. **Ratio and Proportionality**. Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Mathematics Education Library. Springer, 1993.
- GAITA, C.; WILHELMI, M. R.; UGARTE, F.; GONZALES, C. Indicadores de progresso em níveis de raciocínio algébrico elementar na resolução de tarefas de proporcionalidade no Ensino Primário. In: IX CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2022, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: PUC-SP, 2022, p. 2417-2429.
- GALVÃO, M. E. E. L.; SOUZA, V. H. G.; POGGIO, A. M. P. P. Características dos Três Mundos da Matemática que emergem na resolução de um problema de proporcionalidade direta. In: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais [...]**. República Dominicana: IACME, 2015, p. 175-186.
- GARDIN, F. S.; RODRIGUES, A. L.; TEIXEIRA, B. R. Uma introdução do conceito de proporção através da resolução de problemas no contexto do estágio obrigatório. In: XIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2019, Cuiabá. **Anais [...]**. Cuiabá: SBEM, 2019. p. 1-10.
- GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 22, n. 2/3, p. 237-284, 2002.
- GODINO, J. D.; AKÉ, L.; GONZATO, M.; WILHELMI, M. R. Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. **Enseñanza Ciencias**, v. 32, n. 1, p. 199-219, 2014.

- GODINO J. D.; BATANERO C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 14, n. 3, p. 325-355, 1994.
- GODINO, J. D.; RECIO, A. M. A semiotic model for analysing the relationship between thought, language and context in mathematics education. In: OLIVIER, A.; NEWSTEAD, K. (ed.), 22ND PME CONFERENCE, v. 3, 1998, Stellenbosch, South Africa. **Proceedings [...]**. Stellenbosch: University of Stellenbosch, Faculty of Education, 1998. p. 1-8.
- GONZÁLEZ, J. E.; LLORET, A. B.; CISCAR, S. L. Interpretar características del razonamiento proporcional para tomar decisiones que ayuden a los estudiantes a progresar en su aprendizaje. In: XVI CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2023, Lima, Perú. **Anais [...]**. República Dominicana: IACME, 2023, p. 191-198.
- GUACANEME, E. **Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad**: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas (Tesis de maestría). Universidad del Valle: Cali, Colombia, 2001.
- JITENDRA, A. K.; STAR, J. R.; RODRIGUEZ, M.; LINDELL, M.; SOMEKI, F. Improving student's proportional thinking using schema-based instruction. **Learning and Instruction**, v. 21, n. 6, p. 731-745, 2011.
- LAMON, S. J. Rational number and proportional reasoning. Toward a theoretical framework for research. In: LESTER, F. (ed.) **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Volume 1. Information AGE, 2016. p. 629-667.
- LAMON, S. J. **Teaching fractions and ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional strategies for teacher. New York: Routledge, 2012.
- LAUTERT, S. L.; SANTOS, E. M.; MERLINI, V. L. Resolução de problemas de divisão de proporção simples por estudantes do 3º e 5º anos. In: VII SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais [...]**. Foz do Iguaçu: SBEM, 2018. p. 1-13.
- LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Proportional reasoning. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (ed.) **Number concepts and operations in the middle grades**. Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p. 93-118.
- LOBATO, J.; ELLIS, A. B.; CHARLES, R. I.; ZBIEK, R. M. **Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2010.
- LUNA, A. A. Una clase sobre proporcionalidad en una escuela multigrado. In: XVI CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2023, Lima, Perú. **Anais [...]**. República Dominicana: IACME, 2023, p. 400-407.
- MACIEL, J. C. R.; SOTO, C. M. A. El tipo de cantidad en proporcionalidad con problemas de valor faltante. In: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais [...]**. República Dominicana: IACME, 2015, p. 293-303.
- MAGINA, S.; MERLINI, V. L.; SANTOS, A. A estrutura multiplicativa sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. In: CASTRO, F. et al. (org.), **Matemática, cultura e tecnologia: perspectivas internacionais**. Editora CRV: Curitiba, 2016. p. 65-82.

- MAGINA, S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência e Educação**, v. 20, n. 2, p. 517-533, 2014.
- MARANHÃO, C.; MACHADO, S. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revista**, v. 27, n. 1, p. 141-156, 2011.
- MERLINI, V. L.; SANTOS, A.; MAGINA, S. M. P. Desempenhos de estudantes dos 6º e 9º anos na resolução de problemas de proporção: um estudo comparativo. In: IX CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2022, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: PUC-SP, 2022, p. 2920-2931.
- MERLINI, V.; TEIXEIRA, C. Situações de proporcionalidade: um caminho para trabalhar a relação funcional nos anos iniciais. In: XIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2019, Cuiabá. **Anais [...]**. Cuiabá: SBEM, 2019. p. 1-15.
- MIRANDA, M. R. **Pensamento proporcional: uma metanálise qualitativa de dissertações**. 2009. 132 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.
- NORTON, S. J. The construction of proportional reasoning. **International Group for the Psychology of Mathematics Education**, v. 4, p. 17-24, 2005.
- OLIVEIRA, E. S.; LINS, A. F.; PEREIRA, P. S. Raciocínio proporcional: uma discussão com base nas dimensões epistêmicas do saber. In: XIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2019, Cuiabá. **Anais [...]**. Cuiabá: SBEM, 2019. p. 1-14.
- OLIVEIRA, L. M. C. P.; CYRINO, M. C. C. T. Aprendizagens a respeito do raciocínio proporcional em uma comunidade de prática de professores de matemática. In: VI SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2015, Pirenópolis. **Anais [...]**. Pirenópolis: SBEM, 2015, p. 1-12.
- OLIVEIRA, L. M. C. P. Raciocínio proporcional em um problema envolvendo relações de proporcionalidade: aspectos evidenciados na CoP-PAEM. In: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-12.
- ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. As Diferentes “Personalidades” do Número Racional trabalhadas através da Resolução de Problemas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 21, n. 31, p. 79-102, 2008.
- ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Proporcionalidade através da resolução de problemas no curso superior de licenciatura em matemática. In: VI SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2015, Pirenópolis, Brasil. **Anais [...]**. Pirenópolis: SBEM, 2015, p. 1-12.
- PEÑA-RINCÓN, P.; GONZÁLEZ, N. R.; LÓPEZ, C. L.; MAGGIO, H. M. Razonamiento proporcional: desafíos de su enseñanza en la formación inicial del profesorado. In: XVI CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2023, Lima, Perú. **Anais [...]**. República Dominicana: IACME, 2023, p. 280-287.
- PETERSEN, K., FELDT, R., MUJTABA, S., MATTSSON, M., Systematic Mapping Studies in Software Engineering. In: **Proceedings of the 12th International Conference on Evaluation and Assessment in Software Engineering (EASE 2008)**, 2008. p. 68-77.

- PONTE, J. P. Gestão Curricular em matemática. In: GTI (ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2005. p. 11-34.
- POST, R. T.; BEHR, J. M.; LESH, R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.
- REIMANN, P. Design-Based Research. In: MARKAUSKAITE, L.; FREEBODY, L.; IRWIN, P. (ed.), **Methodological Choice and Design: Scholarship, Policy and Practice in Social and Educational Research**. Dordrecht: Springer Netherlands, 2011. p. 37-50.
- RODRIGUES, S. P.; FRANÇA, M. E. V.; RODRIGUES, R. V. R. Aspectos do raciocínio proporcional de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental: foco nas resoluções escritas de uma tarefa exploratória. In: IX SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2024, Natal. **Anais [...]**. Natal: SBEM, 2024. p. 1-15.
- SCHLIEMANN, A. D.; CARRAHER, D. W. Razões e Proporções na vida diária e na escola. **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: Editora da universidade Federal de Pernambuco, p. 13-37, 1997.
- SILVA, J. B. R.; COSTA JÚNIOR, J. R. Contribuições da história da matemática para o estudo de conceitos matemáticos: o caso da proporcionalidade. In: XII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-12.
- SILVA, A. F. G.; LOPES, S. C.; PIETROPAOLO, R. C.; CAMPOS, T. M. M. Conhecimentos profissionais explicitados por uma professora ao ensinar proporcionalidade. In: VII SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais [...]**. Foz do Iguaçu: SBEM, 2018. p. 1-13.
- SILVESTRE, A. I. **O desenvolvimento do raciocínio proporcional: Trajetórias de Aprendizagem de Alunos do 6.º Ano de Escolaridade**. 392f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de Lisboa. Lisboa, 2012.
- SILVESTRE, A. I.; PONTE, J. P. Proporcionalidade directa no 6.º ano de escolaridade: uma abordagem exploratória. **Interacções**, v. 8, n. 20, 70-97, 2012.
- SOUSA, M. R.; SPINILLO, A. G. A explicitação da correspondência um para muitos na resolução de problemas de proporção simples por estudantes do ensino fundamental. In: IX SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2024, Natal. **Anais [...]**. Natal: SBEM, 2024. p. 1-8.
- SUICA, D. I. Q.; RAMÍREZ, N. V. Antanairesis: un recurso didáctico para la enseñanza de la proporcionalidad. In: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais [...]**. República Dominicana: IACME, 2015, p. 33-41.
- TALL, D. O. Thinking Through Three Worlds of Mathematics. 28th CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, v. 4, 2004, Bergen, Norway. **Proceedings [...]**. 2004. p. 281-288.
- TINOCO, L. A. A. **Razões e proporções**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática / UFRJ, 1996.

- TJOE et al. Identification and validation process of proportional reasoning attributes: an application of a cognitive diagnosis modeling frame work. **Mathematics Education Research Journal**, p. 1-19, 2013.
- VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: R. LESH; M. LANDAU (ed.). **Acquisitions of mathematics concepts and procedures**. New York: Academic Press, 1983, p.127-174.
- WENGER, E. **Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity**. New York: Cambridge University Press, 1998.
- ZANELLA, M. S.; ZANELLA, I. A. Proporção simples: um estudo de caso sobre o raciocínio de estudantes brasileiros do ensino fundamental. In: XIV CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 2015, Tuxtla Gutiérrez, México. **Anais [...]**. República Dominicana: IACME, 2015, p. 210-219.

Recebido em: editora
Aprovado em: editora



Artigo está licenciado sob forma de uma licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional.