emd Ensino da Matemática em Debate

DOI:https://doi.org/10.23925/2358-4122.72659

Figuras isoperimétricas equivalentes, pentaminós e geoplano

Equivalent isoperimetric figures, pentominoes, and geoboard

Inácio de Sousa Fadigas[1]
Jeane de Jesus Soares[2]

RESUMO

Este artigo apresenta uma investigação sobre estratégias para a construção de figuras poligonais isoperimétricas (aquelas com mesmo perímetro) e equivalentes (aquelas com mesma área), utilizando como base elementos da geometria recreativa e manipulativa. O objetivo é usar as propriedades de isoperimetria e equivalência de poliminós, em particular de pentaminós, em combinação com o geoplano, como recursos didáticos para a construção de figuras poligonais isoperimétricas e equivalentes. No presente estudo, adotou-se uma abordagem metodológica baseada em um ensaio teórico, com potencial para aplicação em contextos de ensino e aprendizagem. Tal abordagem apresenta potencial para o ensino e a aprendizagem, pois possibilita uma compreensão aprofundada dos mecanismos envolvidos na concepção dessas representações e sua função pedagógica. Os resultados indicam que a articulação entre pentaminós e geoplano configura uma estratégia didática eficaz para o ensino e a aprendizagem de conceitos geométricos, favorecendo a visualização, comparação e análise de propriedades métricas de figuras planas.

Palavras-chave: *Isoperimetria; Equivalência; Pentaminós; Geoplano.*

ABSTRACT

This article presents an investigation into strategies for constructing isoperimetric polygonal figures (those with the same perimeter) and equivalent figures (those with the same area), based on elements of recreational and manipulative geometry. The objective is to use the properties of isoperimetry and equivalence of polyominoes, particularly pentominoes, in combination with the geoboard as didactic tools for constructing isoperimetric and equivalent polygonal figures. The study adopts a methodological approach grounded in a theoretical essay, with potential applicability in teaching and learning contexts. This approach is pedagogically valuable, as it enables a deeper understanding of the mechanisms involved in designing such representations and their educational function. The results indicate that the integration of pentominoes and the geoboard constitutes an effective didactic strategy for teaching and learning geometric concepts, promoting visualization, comparison, and analysis of metric properties of plane figures.

[1] Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEnM) – Universidade Estadual de Feira de Santana (Uefs). Orcid: https://orcid.org/0000-0002-9330-506X. E-mail: fadigas@uefs.br
[2] Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PPGEnM) – Universidade Estadual de Feira de Santana (Uefs). Orcid: https://orcid.org/0009-0005-1197-9386. E-mail: jeanni_anny@hotmail.com

Keywords: *Isoperimetry; Equivalence; Pentominoes; Geoboard.*

Introdução

O estudo de áreas e perímetros de figuras planas constitui um conteúdo fundamental da matemática escolar, sendo contemplado nas diretrizes curriculares brasileiras desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. Esse tema está presente tanto nos anos iniciais (do 3º ao 5º ano), quanto nos anos finais (do 6º ao 9º ano), conforme estabelecido pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), com o objetivo de desenvolver a compreensão geométrica e a capacidade de resolução de problemas envolvendo medidas. Embora o cálculo de áreas e perímetros seja relativamente direto para figuras geométricas elementares, como retângulos, triângulos e círculos, a generalização desses conceitos para figuras planas arbitrárias pode envolver um grau de complexidade significativamente maior. Nessas situações, torna-se necessário o uso de ferramentas matemáticas mais avançadas, como o Cálculo Integral, que permite a determinação precisa de áreas sob curvas e de contornos irregulares. Por outro lado, a relação entre área e perímetro é um tema que possui raízes históricas profundas, remontando à Antiguidade Clássica. Essa conexão é ilustrada desde relatos lendários, como a fundação de Cartago, até investigações matemáticas realizadas por matemáticos notáveis como Zenodoro e Papus de Alexandria (BOYER, 1996, p. 217; GARBI, 2010, p. 87–89). O aprofundamento teórico desse vínculo culminou em formulações rigorosas, como a demonstração de Jakob Steiner sobre problemas isoperimétricos, posteriormente aperfeiçoadas por Karl Weierstrass e outros matemáticos do século XIX (COURANT e ROBBINS, 1971, p. 383–385). Todo esse desenvolvimento histórico e matemático converge para a resolução de uma questão aparentemente simples: *dentre todas as figuras planas com o mesmo perímetro, qual apresenta a maior área?* Essa indagação, conhecida como *problema isoperimétrico*, motivou importantes avanços na geometria. A demonstração de que o círculo é a figura que maximiza a área entre todas as que possuem perímetro fixo levou à formulação do que hoje é denominado *desigualdade isoperimétrica.*

No contexto das relações entre perímetro e área, embora distinta da desigualdade isoperimétrica clássica, a questão abordada neste estudo refere-se a uma problemática de natureza mais elementar. Especificamente, investiga-se a construção de figuras poligonais simples que apresentem simultaneamente o mesmo perímetro (figuras isoperimétricas) e a mesma área (figuras equivalentes), a partir da justaposição e recortes de poliminós. A problemática pode, portanto, ser compreendida sob a perspectiva da *equivalência isoperimétrica*. Este artigo propõe uma análise de estratégias para a obtenção de figuras poligonais que sejam simultaneamente isoperimétricas e equivalentes, a partir da composição com poliminós, com ênfase nos pentaminós, explorando suas construções e transformações no geoplano, este como recurso didático manipulável e investigativo.

A proposta apresentada alinha-se aos pressupostos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especialmente nas competências previstas para o Ensino Fundamental. No componente de Matemática, especificamente na unidade temática *Grandezas e Medidas* para o 4º ano do Ensino Fundamental, consta entre os objetos de conhecimento o tópico "Áreas de figuras construídas em malhas quadriculadas". A habilidade associada, descrita como (EF04MA21), orienta que os estudantes devem "medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área" (BRASIL, 2018, p. 292–293). Tal diretriz corrobora a relevância pedagógica da abordagem adotada neste estudo, que articula conceitos de área e equivalência por meio de representações em malhas. No 5º ano do Ensino Fundamental, ainda no âmbito da unidade temática *Grandezas e Medidas*, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) contempla, entre os objetos de conhecimento, o tópico "Áreas e perímetros de figuras poligonais: algumas relações". A habilidade correspondente, identificada como (EF05MA20), estabelece que os estudantes devem "concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes" (BRASIL, 2018, p. 296–297). Essa diretriz evidencia a importância do desenvolvimento de estratégias investigativas no ensino de relações métricas, em consonância com a abordagem proposta neste estudo. No 7º ano do Ensino Fundamental, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) mantém a articulação com o tema na unidade temática *Grandezas e Medidas*, ao incluir, entre os objetos de conhecimento, a "Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas, como triângulos e quadriláteros". A habilidade associada, descrita como (EF07MA32), orienta os estudantes a "resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas” (BRASIL, 2018, p. 308–309). Essa diretriz reforça a relevância da decomposição e recomposição de figuras como estratégia pedagógica para o desenvolvimento da compreensão sobre equivalência de áreas, fundamento central da proposta apresentada neste trabalho.

Considera-se que a compreensão da relação entre os conceitos de área e perímetro, conforme abordada neste estudo, por meio das propriedades isoperimétricas dos pentaminós e da manipulação dessas figuras no geoplano, revela-se pertinente tanto para o docente, no contexto do ensino, quanto para o discente, no processo de aprendizagem. Embora a literatura científica aborde, separadamente, temas como área, perímetro, pentaminós e o uso do geoplano, identificou-se uma lacuna no que se refere à articulação desses elementos na análise de figuras poligonais isoperimétricas equivalentes.

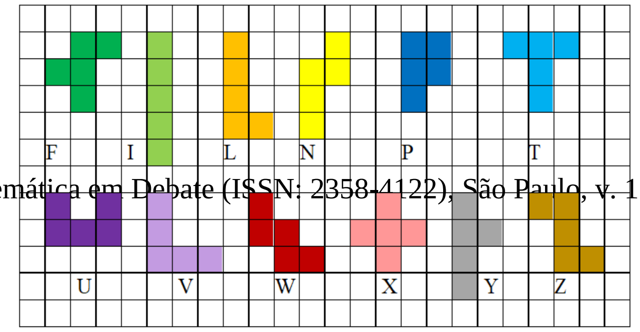
A estrutura do artigo está organizada da seguinte maneira: o tópico *Pentaminós e Geoplano*, apresenta as definições fundamentais, uma breve contextualização histórica sobre a origem desses elementos, bem como as propriedades relevantes para a investigação proposta. No tópico *Extensão da propriedade dos pentaminós a figuras poligonais isoperimétricas e equivalentes*, são analisadas figuras derivadas dos pentaminós, construídas por meio de combinações e transformações geométricas apropriadas. Ao final dessa seção, discute-se ainda a viabilidade de estender a análise a outros tipos de poliminós, ampliando o escopo da proposta.

Pentaminós e Geoplano

O termo *poliminó* foi introduzido pelo matemático Solomon W. Golomb, inicialmente em seu artigo *Checker Boards and Polyominoes* (Golomb, 1954), e posteriormente consolidado na obra *Polyominoes* (1965). Essa publicação, mais tarde ampliada sob o título *Polyominoes: Puzzles, Patterns, Problems, and Packings* (Golomb, 1994), tornou-se uma referência fundamental para investigações e desenvolvimentos subsequentes na área. O termo é utilizado para designar "formas construídas pela conexão de um determinado número de quadrados congruentes, cada um dos quais deve estar unido a pelo menos outro quadrado ao longo de uma de suas bordas" (Golomb, 1994). Conforme a quantidade de quadrados unitários que os compõem, os poliminós são classificados como monominó (1 quadrado), dominó (2 quadrados), triminó (3 quadrados), tetraminó (4 quadrados), pentaminó (5 quadrados), hexaminó (6 quadrados), entre outros. Cada tipo de poliminó pode ser representado no plano por um conjunto distinto de peças, cuja quantidade é determinada pelas diferentes combinações possíveis dos quadrados, desconsiderando transformações por simetria reflexiva e simetria de rotação. Como resultado da classificação segundo as combinações distintas, desconsideradas as simetrias por rotação e reflexão, tem-se que: o monominó e o dominó possuem apenas uma peça cada; o triminó apresenta 2 peças distintas; o tetraminó, 5 peças; o pentaminó, 12 peças; o hexaminó, 35 peças, e assim sucessivamente. A escolha do pentaminó como objeto central de análise nesta pesquisa fundamenta-se em diversos fatores: (i) o número reduzido de peças nos casos do monominó, dominó e triminó limita a diversidade necessária para a exploração das propriedades isoperimétricas; (ii) embora o tetraminó possua cinco configurações distintas, uma delas apresenta perímetro inferior ao das demais, o que compromete a isoperimetria; (iii) o hexaminó, por sua vez, apresenta uma quantidade relativamente elevada de peças, sendo que oito delas possuem perímetros inferiores aos das demais, o que dificulta a análise comparativa entre figuras isoperimétricas. O pentaminó é constituído pela justaposição de cinco quadrados congruentes, unidos ao longo de suas bordas, resultando em 12 configurações distintas, quando desconsideradas as simetrias de rotação e reflexão. Dentre essas peças, apenas uma apresenta perímetro inferior ao das demais, o que favorece a análise de propriedades isoperimétricas. Além disso, a escolha do pentaminó neste estudo também se justifica por sua utilização como recurso manipulável em investigações voltadas ao ensino e à aprendizagem de conceitos geométricos.

A Figura 1 apresenta as 12 configurações distintas de pentaminós. Cada uma dessas configurações pode ser considerada uma *peça* pertencente ao conjunto dos pentaminós. As peças são tradicionalmente identificadas por letras do alfabeto latino, atribuídas com base em sua semelhança visual com essas letras (Golomb, 1996, p. 6). Essas peças podem ser confeccionadas utilizando-se papelão, madeira fina, plástico rígido ou outros materiais apropriados, tornando-as materiais manipuláveis. Seu uso é recorrente em atividades didáticas, especialmente em problemas de ladrilhamento, jogos geométricos e tarefas exploratórias no ensino de geometria.

Figura 1 – Representação dos pentaminós e suas denominações usuais



Fonte: Autores

Uma propriedade fundamental dos pentaminós, decorrente diretamente de sua definição, é que todas as peças possuem a mesma área, correspondente a 5 unidades de medida quadrada. Além disso, essas figuras são equidecomponíveis, ou seja, podem ser subdivididas e reconfiguradas em partes congruentes de modo a formar outros polígonos de mesma área. Quanto ao perímetro, observa-se uma regularidade derivada do processo construtivo: com exceção da peça identificada pela letra “P”, que tem perímetro de 10 unidades, todas as demais possuem perímetro igual a 12 unidades de medida linear. Dessa forma, as 11 peças restantes constituem um conjunto de figuras poligonais isoperimétricas equivalentes.

O geoplano configura-se como um instrumento pedagógico relevante para o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos, especialmente no âmbito da geometria. Apesar da limitada acessibilidade às fontes primárias concernentes à sua gênese e aplicação inicial, a literatura especializada, a exemplo de De Bock e Vanpaemel (2015), atribui a sua invenção, na década de 1950, a Caleb Gattegno, educador, psicólogo e matemático de nacionalidade egípcia, com o propósito de aplicar ao ensino de geometria. Ademais, em consonância com os referidos autores, Vahamme (1955) explora a ferramenta em suas múltiplas facetas, complementando que o próprio Gattegno explicou a aplicabilidade de geoplanos de distintas dimensões, tanto na geometria elementar quanto em tópicos de maior complexidade. Conforme amplamente documentado na literatura especializada, o geoplano tradicional caracteriza-se por uma base plana de formato quadrangular, tipicamente confeccionada em madeira ou outros materiais como um plástico rígido. Nesta base, são fixados pinos, geralmente metálicos ou de madeira, dispostos de maneira a constituir uma grade regular de pontos equidistantes. O espaçamento ortogonal (horizontal ou vertical) entre pinos adjacentes é convencionalmente adotado como a unidade de medida de comprimento. A construção de figuras geométricas planas é efetuada mediante a aplicação de elásticos, os quais, ao serem tensionados entre os pinos, facilitam a visualização e a manipulação de formas como quadrados, retângulos, triângulos e outros polígonos simples.

A aplicação mais proeminente do geoplano reside na determinação de áreas de polígonos simples, frequentemente empregando o Teorema de Pick. Este teorema, cuja descoberta é atribuída a Georg Alexander Pick e cuja publicação original data de 1899, obteve maior disseminação a partir da publicação da obra "Mathematical Snapshots" de H. Steinhaus (STEINHAUS, 1969, p. 100). O teorema postula que, para um polígono simples cujos vértices estão localizados em pontos de coordenadas inteiras de uma malha, e definindo i como o número de pontos inteiros situados no interior do polígono e f como o número de pontos inteiros coincidentes com sua fronteira, a área A do polígono é expressa pela seguinte relação (1), conhecida como fórmula de Pick:

$$A = \frac{f}{2} + i - 1 \qquad (1)$$

No que concerne a polígonos delimitados exclusivamente por segmentos de reta horizontalmente ou verticalmente em relação à malha do geoplano, a determinação do comprimento do perímetro limita-se à quantificação dos segmentos unitários (espaços entre pinos adjacentes) que compõem o contorno da figura geométrica. Com exceção do pentaminó denominado “P”, todos os demais apresentam perímetro de 12 unidades lineares. Por definição, os pentaminós, considerados como polígonos, podem ser representados em um geoplano retangular. Dado que esses polígonos não possuem pontos interiores, a aplicação da Equação (1) aos 11 pentaminós isoperimétricos equivalentes resulta em f=2(A+1) e sendo A= 5 unidades quadradas, obtém-se f = 12, o que indica que esses pentaminós possuem 12 pontos do geoplano localizados em sua fronteira. Como os pentaminós são polígonos, o valor de f corresponde numericamente ao seu perímetro, o que confirma a consistência com quantificação previamente realizada. Esse resultado não apenas evidencia a relação entre os pentaminós e a fórmula de Pick, como também fornece um método para a determinação do perímetro de outros poliminós sem pontos interiores. Por exemplo, para o monominó o perímetro $p = f = 2(1+1) = 4$, enquanto para os hexaminós (sem pontos interiores) têm-se o valor $p = f = 2(6+1) = 14$.

Cabe destacar a existência de versões digitais do geoplano, como o geoplano virtual, nas quais o perímetro de polígonos pode ser exibido automaticamente pelo sistema. Entretanto, esse valor é obtido por meio de algoritmos implementados no *software*, não sendo resultado direto de uma ação do usuário.

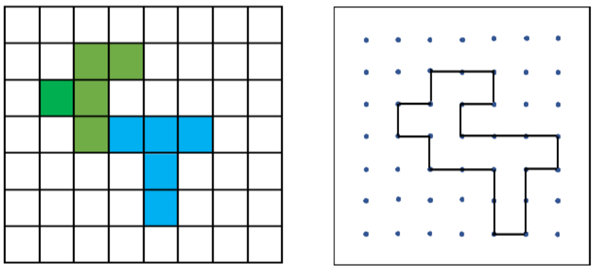
Extensão da propriedade dos pentaminós a figuras isoperimétricas e equivalentes

Neste tópico, analisamos como ampliar as propriedades de isoperimetria e equivalência observadas nos pentaminós para outras formas poligonais, por meio da combinação de duas ou mais peças, bem como por modificações na malha quadriculada. O objetivo é obter figuras poligonais que preservem a propriedade de isoperimetria equivalente. Para isso, introduzimos dois tipos fundamentais de manipulação: (i) a justaposição de peças e (ii) o “recorte” retilíneo das peças, de modo a gerar figuras poligonais com lados contendo segmentos diagonais.

Justaposição de pentaminós

A justaposição de pentaminós é definida como a formação de uma nova figura a partir da união de duas ou mais peças, conectadas por um ou mais quadrados adjacentes em seus contornos. Para fins de análise, restringimo-nos a figuras poligonais simples, isto é, aquelas que não apresentam vazios internos. A Figura 2 ilustra um exemplo de justaposição entre os pentaminós “F” e “T”, unidos por um lado de um quadrado, bem como sua correspondente representação no geoplano.

Figura 2 – (a) Justaposição dos pentaminós “F” e “T” e (b) sua figura correspondente no geoplano

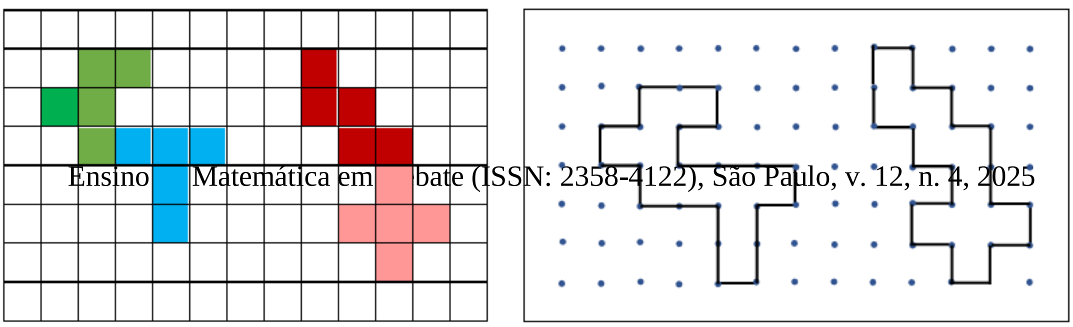


(a) (b)

Fonte: Autores

Demonstramos que a justaposição de pares de pentaminós isoperimétricos equivalentes, com exceção do pentaminó “P”, resulta em figuras que preservam a equivalência isoperimétrica. Considerem-se, por exemplo, os pares de pentaminós “F” e “T” e “W” e “X”, justapostos por um lado de quadrado adjacente, conforme ilustrado na Figura 3.

Figura 3 – (a) Pares de pentaminós justapostos e (b) suas figuras correspondentes no geoplano.



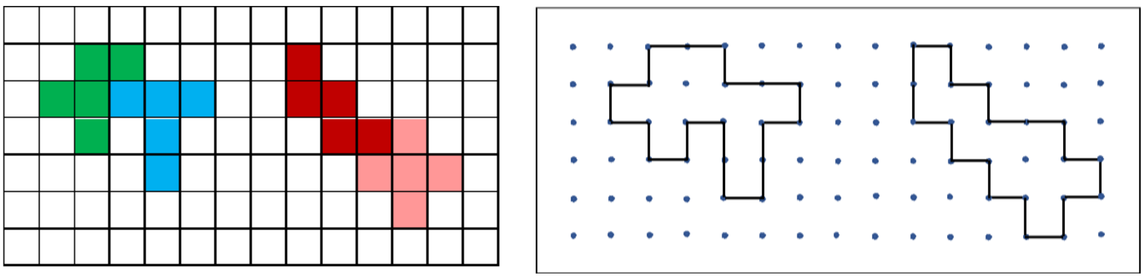
(a) (b)

Fonte: Autores

Verifica-se que a justaposição preserva a área individual dos pentaminós, resultando em uma figura composta com área total igual a $2A$, sendo A = 5 unidades quadradas. Assim, a área das figuras obtidas por justaposição é de 10 unidades quadradas. Quanto ao perímetro, observa-se que, ao serem justapostos por um lado comum, cada pentaminó tem uma unidade de perímetro compartilhada, o que implica uma redução de duas unidades no total. Dessa forma, o perímetro da figura composta é dado por $2p_i$ - 2, onde p_i = 12 corresponde ao perímetro de um pentaminó isolado, o que resulta em um perímetro da figura poligonal p = 22 unidades lineares. Por outro lado, aplicando a fórmula de Pick, considerando que a área da figura é conhecida e que não há pontos interiores (i = 0), obtém-se a relação $2A = \frac{f}{2} - 1$. Como $A = 5$ e $f = p$, temos p = 22 unidades lineares, o que confirma o valor do perímetro obtido anteriormente.

Consideremos novamente os pares de pentaminós “F” e “T” e “W” e “X”, agora justapostos por dois lados de quadrados adjacentes, conforme ilustrado na Figura 4. Ressalta-se que a justaposição não é única, sendo possível realizar diferentes configurações por meio de transformações posicionais (translações, rotações ou reflexões) aplicadas a cada pentaminó.

Figura 4 – (a) Pares de pentaminós justapostos com dois lados do quadrado e (b) suas figuras correspondentes no geoplano



(a) (b)

Fonte: Autores

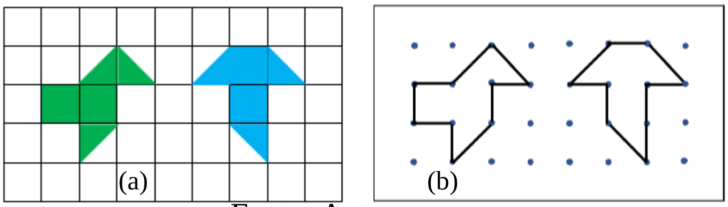
Novamente, a área das figuras resultantes da justaposição permanece igual a $2A$, com A = 5 unidades quadradas, totalizando uma área de 10 unidades quadradas. No entanto, ao serem justapostos por dois lados de quadrados adjacentes, cada pentaminó compartilha duas unidades lineares de seu perímetro com o outro, o que implica uma redução total de quatro unidades lineares. Assim, o perímetro da figura composta é dado por $2p_i - 4$, sendo $p_i = 12$ o perímetro de um pentaminó isolado, resultando em um perímetro total de $p = 20$ unidades lineares. Para a aplicação da fórmula de Pick, é necessário considerar a ocorrência de pontos interiores que surgem em decorrência da justaposição. Temos então que $2A = \frac{f}{2} + i - 1$. Com $A = 5$, $i = 1$ e $f = p$. Os cálculos resultam em $p = 20$ unidades lineares, validando a estratégia de cálculo anterior.

Não é objetivo deste trabalho apresentar uma demonstração por indução para n unidades de lados de quadrados compartilhados. Contudo, a análise da Figura 1 indica que o número máximo de lados compartilhados entre quadrados justapostos ocorre nos pares de pentaminós “I-L”, “L-Y”, “I-Y” nos quais cada peça compartilha um máximo de 4 unidades lineares de seu perímetro com o outro, o que implica uma redução total de 8 unidades lineares em seu perímetro. Dessa forma, o perímetro da figura composta é dado por $2p_i$ - 8, onde p_i = 12, resultando em 16 unidades lineares. Até o momento, demonstramos a obtenção de figuras por meio da justaposição de pares de pentaminós. A partir desses resultados, é possível generalizar a construção de outras figuras isoperimétricas equivalentes através da justaposição de três ou mais pentaminós, desde que a configuração preserve a mesma quantidade total de lados compartilhados entre as peças.

Recortes em pentaminós

Com o intuito de ampliar as possibilidades de obtenção de figuras isoperimétricas equivalentes, investigamos alterações topológicas nos pentaminós, denominadas 'recortes'. Nesse contexto, o termo refere-se à remoção estratégica de porções dos quadrados que compõem a peça original, de modo a preservar a propriedade de isoperimetria equivalente. A Figura 5 exemplifica uma das configurações possíveis resultantes dessa operação.

Figura 5 – (a) Exemplo de recortes nos pentaminós e (b) suas correspondentes figuras no geoplano.



Fonte: Autores

Conforme ilustrado na Figura 5, as figuras poligonais resultantes dos recortes preservam a mesma área, uma vez que, em cada pentaminó, três quadrados foram divididos diagonalmente, preservando a quantidade total de unidades de área. Em relação ao perímetro, não se observa variação relativa, pois cada figura resultante apresenta três segmentos diagonais de mesmo comprimento. A combinação de justaposições, tanto entre pentaminós íntegros quanto entre figuras recortadas, possibilita a construção de uma ampla variedade de figuras isoperimétricas equivalentes.

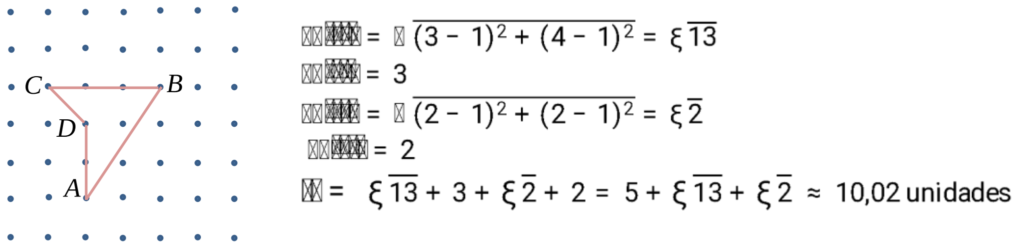
A partir da análise apresentada na Figura 5, foi possível verificar empiricamente a preservação da propriedade de isoperimetria equivalente, mesmo sem a necessidade de cálculo explícito do perímetro. No entanto, para figuras de maior complexidade geométrica, o cálculo preciso do perímetro torna-se essencial para a validação dessa propriedade. Uma revisão da literatura especializada revelou uma escassez de abordagens que generalizem o cálculo do perímetro em geoplanos, excetuando-se os casos em que se utiliza o geoplano virtual. Diante disso, propomos uma estratégia em analogia à contagem de pontos da fórmula de Pick, adaptada para considerar a presença de segmentos diagonais, a fim de viabilizar o cálculo do perímetro em tais configurações.

A estratégia proposta baseia-se no conceito de distância entre dois pontos no plano, embora apresentada de maneira simplificada. Para cada segmento diagonal presente na figura, considera-se a construção de um triângulo retângulo em que a diagonal corresponde à hipotenusa. Dessa forma, o comprimento do segmento pode ser obtido por meio da contagem dos pontos que definem os catetos do triângulo, conforme expressa a equação (2).

$$d_i = \sqrt{(n_h - 1)^2 + (n_v - 1)^2} \qquad (2)$$

Na Equação (2), n_h e n_v representam, respectivamente, o número de pontos ao longo dos catetos horizontal e vertical do triângulo retângulo associado a cada segmento diagonal. Embora a equação também seja válida para segmentos puramente horizontais ou verticais, sua aplicação nesses casos torna-se desnecessária, uma vez que o comprimento pode ser diretamente determinado por contagem linear. O cálculo do perímetro total da figura consiste, portanto, na soma dos comprimentos dos segmentos horizontais e verticais, acrescida da soma dos comprimentos dos segmentos d_i diagonais. A Figura 6 ilustra esse procedimento.

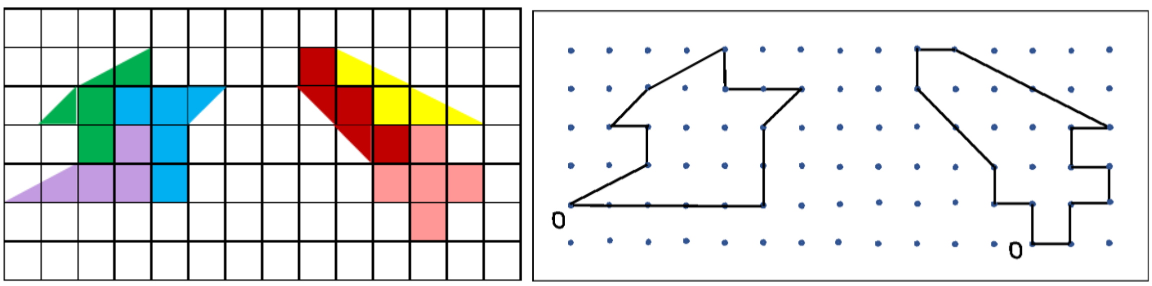
Figura 6 - Cálculo da medida do perímetro usando pontos no geoplano



Fonte: Autores

Apresentamos, a seguir, um exemplo de figuras isoperimétricas equivalentes geradas por meio da combinação de justaposição e recortes de pentaminós. Na Figura 7(a), à esquerda, exibe-se a composição formada pelos pentaminós “F”, “T” e “L” (este último rotacionado), após a realização de recortes adequados; à direita, apresenta-se a configuração análoga obtida com os pentaminós “W”, “X” e “N” (igualmente rotacionado). A Figura 7(b) mostra as correspondentes figuras poligonais representadas no geoplano. A justaposição foi conduzida de modo que o número de lados compartilhados entre quadrados seja idêntico em ambos os conjuntos, o que garante que a quantidade de pontos interiores gerados também permaneça invariável, preservando assim a equivalência isoperimétrica das figuras resultantes.

Figura 7 - Cálculo da medida do perímetro usando pontos no geoplano



(a) (b)

Fonte: Autores

O cálculo da área das figuras poligonais na Figura 7 (b) pode ser feito usando a equação (1). Para as duas figuras $f = 16\ e\ \ i = 5$, o que resulta em $A = \frac{16}{2} + 5 - 1 =$ 12 unidades quadradas. Para o cálculo do perímetro, pode ser usada a Equação (2) no cômputo dos comprimentos das diagonais. Temos então da Figura 7 (b):

Figura poligonal à esquerda, calculando o tamanho dos segmentos a partir do ponto O no sentido anti-horário, em unidades lineares

$$p = 5 + 2 + \sqrt{2} + 2 + 1 + \sqrt{5} + \sqrt{2} + 1 + 1 + \sqrt{5} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 12 \cong 19{,}3$$

Figura poligonal à direita, calculando o tamanho dos segmentos partir do ponto O no sentido anti-horário, em unidades lineares

$$p = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \sqrt{20} + 1 + 1 + \sqrt{8} + 1 + 1 + 1 = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 12 \cong 19{,}3$$

Os cálculos mostram que as figuras são isoperimétricas equivalentes.

Em contextos práticos de ensino e aprendizagem, as peças de pentaminós podem ser utilizadas como materiais manipuláveis para a construção de figuras isoperimétricas equivalentes, por meio de justaposições apropriadas. Posteriormente, essas configurações podem ser representadas no geoplano físico, utilizando-se elásticos para demarcar os contornos. A manipulação criteriosa dos elásticos permite a formação de figuras com segmentos diagonais, sem alteração relativa do perímetro, conforme exemplificado no exemplo da Figura 7(b).

No exemplo anterior, foram utilizadas apenas três peças de pentaminós na construção de cada figura. Esse número, no entanto, pode ser ampliado, e é possível empregar outras peças pertencentes a diferentes classes de poliminós, além dos pentaminós. Para garantir a equivalência isoperimétrica entre as figuras resultantes, é fundamental observar os seguintes critérios: (i) preservar a área total, assegurando que as peças adicionadas em cada etapa sejam da mesma categoria e compartilhem a propriedade de isoperimetria relativa; e (ii) manter iguais a quantidade de lados compartilhados em cada justaposição, de modo a conservar o número de pontos interiores nas figuras poligonais correspondentes no geoplano. A partir da observação do critério (i), é possível generalizar a construção com pentaminós, incluindo o uso do pentaminó “P” em ambas as figuras, desde que sejam respeitadas as condições mencionadas.

Considerações finais

Este ensaio teórico traçou um caminho metodológico para a construção de figuras poligonais simples que apresentem, simultaneamente, as propriedades de isoperimetria e equivalência. Como resultado relevante sob a perspectiva didática, especialmente no contexto dos processos de ensino e aprendizagem, destacou-se a utilização dos poliminós, em particular, dos pentaminós, como elementos matemáticos eficazes na construção dessas figuras. A integração dos poliminós ao geoplano, ambos empregados como materiais manipuláveis, constitui uma estratégia pedagógica que possibilita a professores e estudantes superar dificuldades relacionadas à abstração típica da geometria, promovendo abordagens lúdicas e significativas no ensino desse domínio matemático.

A presente investigação ajuda a preencher uma lacuna identificada na literatura acadêmica ao estabelecer conexões entre dois conceitos fundamentais da geometria: área e perímetro, via isoperimetria e equivalência de figuras. Além disso, possibilitou a articulação entre os poliminós, tratados simultaneamente como figuras poligonais simples e como objetos manipuláveis, e o geoplano, ampliando as possibilidades didáticas de ambos. Os resultados obtidos apontam para potenciais implicações práticas e metodológicas, tais como o desenvolvimento de sequências didáticas voltadas à aprendizagem de figuras poligonais isoperimétricas equivalentes, bem como a organização progressiva e significativa do ensino desse conteúdo no âmbito da educação matemática. Pesquisas futuras podem aprofundar a compreensão e possibilitar a generalização da relação entre o número de lados dos quadrados elementares que compõem os poliminós e a quantidade de pontos interiores resultantes, quando tais figuras poligonais são representadas em geoplanos. Tal investigação pode contribuir para a criação de modelos matemáticos mais sólidos no contexto da geometria discreta e da teoria dos poliminós. Este ensaio teórico não abrangeu análises empíricas com estudantes, nem explorou computacionalmente a totalidade das combinações entre poliminós, o que pode ser aprofundado em trabalhos futuros.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica**. Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC/SEB, 2018.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. ¿**Qué es la matemática**? una exposicion elemental de sus ideas y metodos, 5. ed. Madrid: Aguilar, 1971.

DE BOCK, D; VANPAEMEL, G. The belgian journal mathematica & paedagogia (1953-1974): A forum for the national and international scene in mathematics education. **Proceedings of the Seventh European Summer University on the History and Epistemology in Mathematics Education**, p. 723-734, 2015.

GARBI, Gilberto Geraldo. **A rainha das ciências:** um passeio pelo maravilhoso mundo da matemática. **- -** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

GOLOMB, Solomon W. Checker boards and polyominoes. **The American Mathematical Monthly**, v. 61, n. 10, p. 675-682, 1954.

GOLOMB, Solomon W. **Polyominoes: puzzles, patterns, problems, and packings**. 2. ed. New Jersey: Princeton University Press, 1994.

GRÜNBAUM, Branko; SHEPHARD, Geoffrey C. Pick's theorem. **The American Mathematical Monthly**, v. 100, n. 2, p. 150-161, 1993. Disponível em <https://www.jstor.org/stable/2323771>. Acesso em 07 jul. 2025.

STEINHAUS, Hugo. **Mathematical snapshots**. Courier Corporation, 2012. Disponível em <https://archive.org/details/mathematicalsnap0000stei/page/100/mode/2up?q=base>. Acesso em 07 jul. 2025.

VANHAMME, W. (1954). Le “Géoplan” [The “geoboard”]. **Mathematica & Paedagogia**, 6, 43-44. Disponível em <https://bibnum.publimath.fr/ACF/ACF15069.pdf >. Acesso em 05 jul. 2025

Recebido em: 23-07-25

Aprovado em: 31-12-25