emd Ensino da Matemática em Debate

DOI:https://doi.org/10.23925/2358-4122.72688

Planejando aulas assentes no Ensino Exploratório de Matemática para o ensino de equações do primeiro grau

Planning lessons based on Exploratory Mathematics Teaching for teaching first-degree equations

Patricia Andressa Maieski[1]

Maria Ivete Baniak[2]

RESUMO

O objetivo deste trabalho é discutir o planejamento de aulas assentes no Ensino Exploratório de Matemática (EEM) para o ensino de equações do primeiro grau, elaborado para uma turma do sétimo ano dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Neste trabalho são apresentados e discutidos aspectos do EEM, características do trabalho com equações do primeiro grau, e todo o processo de construção do planejamento de aulas assentes no EEM, elaborados pela professora/pesquisadora. As reflexões revelam que o planejamento de aulas assentes no EEM é desafiador por envolver várias etapas e cuidados na elaboração, além de exigir tempo e dedicação do professor. Para a construção do plano, foram necessárias várias etapas, como (re)elaboração de tarefas de natureza exploratória, discussão das tarefas em um grupo de pesquisa do qual as autoras deste trabalho fazem parte, testes das tarefas com estudantes, construção de quadros de antecipações, e reflexão sobre vários aspectos relacionados com a elaboração de aulas assentes no EEM. No entanto, os resultados apontam que é possível elaborar aulas assentes no EEM para o ensino de equações do primeiro grau. Este trabalho contribui para o aumento de pesquisas envolvendo o EEM e pode auxiliar outros professores, tanto na formação inicial quanto continuada que desejam conhecer, discutir e desenvolver essa perspectiva de ensino.

Palavras-chave: *Educação Matemática; Planejamento; Álgebra escolar.*

ABSTRACT

This work has as aim at discussing the planning of lessons based on Exploratory Mathematics Teaching (EEM in its Portuguese acronym) for teaching first-degree equations, prepared for a seventh-grade class in the Final Years of Elementary School. This work presents and discusses aspects of EEM, characteristics of working with first-degree equations, and the entire process of constructing lesson plans based on EEM, prepared by the teacher/researcher. Reflections reveal that planning lessons based on EEM is challenging because it involves several stages and care in its preparation, in addition to requiring time and dedication from the teacher. To construct the plan, several steps were necessary, such as (re)elaboration of exploratory tasks, discussion of tasks in a research group in which the authors of this work are part, testing the tasks with students, construction of anticipation tables and reflection on various aspects related to elaboration of classes based on EEM. However, findings indicate that it is possible to develop classes based on the EEM for teaching first-degree equations. This work contributes to the increase in research involving EEM and can help other teachers, both in the initial and continuing education, who wish to learn about, discuss and develop this teaching perspective.

[1] Mestre em Educação Matemática pelo PRPGEM-UNESPAR; patriciaamaiesk@gmail.com

[2] Professora associada do Colegiado de Matemática do campus de União da Vitória e professora permanente do PRPGEM- UNESPAR; maria.basniak@unespar.edu.br

Keywords: *Mathematics Education; Planning; School algebra.*

Introdução

As equações do primeiro grau são geralmente trabalhadas com os estudantes, inicialmente, nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Frequentemente, elas são apresentadas em uma abordagem tradicional de ensino, na qual os estudantes se deparam com sua definição e estratégias de resolução sem conexão com outros conceitos matemáticos já estudados, e sem atribuir significados aos objetos da Álgebra, constituindo-se em uma repetição de exemplos resolvidos pelo professor, sem a compreensão necessária (Almeida 2016). Nesse contexto, a fim de romper com essa barreira do ensino transmissivo e buscando uma abordagem diferente para trabalhar com equações do primeiro grau, foram inseridas, no planejamento das aulas, tarefas de natureza exploratória permeadas pela perspectiva do Ensino Exploratório de Matemática (EEM).

O EEM é uma perspectiva de ensino na qual os alunos possuem papel ativo na aprendizagem, que ocorre pela realização de tarefas desafiadoras, explorando, discutindo, refletindo e compartilhando ideias matemáticas com o intuito de sistematizar novos conceitos, além de estabelecer relações com os conhecimentos prévios. Nessa perspectiva, o professor também possui um trabalho desafiador e essencial para que os objetivos de aprendizagem das aulas sejam alcançados, tanto nas ações que ocorrem antes quanto durante as aulas (Canavarro, 2011; Canavarro; Oliveira; Menezes, 2012; Cyrino; Oliveira, 2016).

Aulas pautadas no EEM exigem um planejamento bem elaborado, começando pela definição dos objetivos das aulas, seguindo pela elaboração de tarefas, antecipações das possíveis ações do professor e dos estudantes durantes as aulas, e planejamento das fases das aulas.

Dessa maneira, propôs-se o planejamento de aulas assentes no EEM para o ensino de equações do primeiro grau para uma turma de sétimo ano dos Anos Finais do Ensino Fundamental, com objetivo de trabalhar principalmente a mobilização de conceitos para a compreensão da ideia de equações do primeiro grau, atribuindo ao sinal de "=" (igual), presente nas equações, o significado de uma relação de equivalência e introduzindo a ideia de incógnita. Considera-se que seria a primeira abordagem de ensino desse conteúdo com a turma.

Segundo Lozada e D'Ambrosio (2018, p. 23), "a maneira com a qual um conteúdo é introduzido direciona substancialmente o modo com que o sujeito aprendente se apropria, operacionaliza e mobiliza os conhecimentos matemáticos".

Para a elaboração das tarefas, foram consideradas as contribuições do Grupo de Estudos sobre Prática e Tecnologia na Educação Matemática e Estatística (GEPTEMatE), do qual a professora/pesquisadora faz parte, além de testes pilotos realizados com duas turmas de nono ano, nas quais a já referida professora/pesquisadora lecionava em 2024, a fim de construir tarefas que atendessem aos objetivos e perspectivas de ensino estabelecidas.

Assim, este trabalho apresenta e debate todas as etapas desse planejamento, bem como os elementos que compõem o plano de ensino na perspectiva do EEM.

Na seção que segue, são apresentados e discutidos aspectos relacionados ao EEM, seguindo para a seção em que se discutem aspectos das equações do primeiro grau. A quarta seção apresenta o contexto e os pressupostos metodológicos, detalhando os passos da construção das tarefas. Em seguida, o planejamento é detalhado, abordando os objetivos de cada tarefa; a elaboração das suas versões finais, especificando as modificações realizadas durante o processo de elaboração do planejamento das aulas; os quadros de antecipação elaborados para cada uma delas; e critérios estabelecidos para a fase de Discussão da Tarefa. Na última seção estão as considerações finais em relação à elaboração do planejamento de aulas assentes no EEM para o ensino de equações do primeiro grau.

O Ensino Exploratório de Matemática

O EEM pode ser entendido como uma perspectiva de ensino que difere do modelo tradicional de ensino, este último definido como direto ou expositivo, segundo Ponte (2005), em que o professor tem o papel de transmissor de conhecimento.

O EEM traz o estudante para o foco central das aulas, e o conhecimento matemático dos estudantes pode ser construído por meio de experiências adquiridas ao realizarem tarefas matemáticas que favoreçam a aprendizagem. Essas tarefas precisam ser escolhidas criteriosamente, de modo que proporcionem a exploração de conceitos matemáticos com atribuição de significado aos objetos matemáticos estudados.

> O ensino exploratório da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva. Os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática (Canavarro, 2011, p. 11).

Na perspectiva do EEM, o professor possui papel importante e desafiante. Começa com o delineamento dos objetivos curriculares estipulados pelo professor no seu planejamento, que visam a ser atingidos com as aulas; a elaboração das tarefas, que envolve toda uma ação de antecipação do professor; e o planejamento de todos os momentos das aulas que se sucedem a partir da proposição da tarefa aos estudantes.

Ao escolher as tarefas, o professor deve levar em conta os conhecimentos prévios dos alunos (Oliveira; Cyrino, 2013). Portanto, as tarefas devem proporcionar

> [...] um desafio e basear-se em uma situação concreta; possibilitar aos alunos a confiança em sua experiência quando resolvê-las e, portanto, fazer uso de várias estratégias com diferentes níveis de sofisticação matemática. Elas devem ser ancoradas no currículo e ser destinadas a uma compreensão mais profunda de conceitos matemáticos que têm uma forte ligação com o conhecimento que os alunos constroem durante as aulas (Oliveira; Cyrino, 2013, p. 218, tradução nossa).

Rossa e Estevam (2022) apresentam algumas características de tarefas de natureza exploratória que sustentam práticas assentes na perspectiva do EEM, apontadas em uma pesquisa de revisão bibliográfica. Em síntese, os autores identificam que as tarefas de natureza exploratória que favorecem a aprendizagem matemática com significado apresentam:

> [...] propostas instigadoras; contexto significativo; nível de complexidade adequado aos alunos; resoluções envolvendo formas complexas de pensamento; diferentes possibilidades de estratégias, procedimentos e representações de/para resolução; destaque de pontos–chave relacionados ao conceito, procedimento ou ideia matemática envolvida; promoção de raciocínio indutivo (além do dedutivo) e; articulação com os objetivos da aula, com o currículo, com as normas da sala e com a prática do professor (Rossa; Estevam, 2022, p. 9).

Além disso, segundo Ponte (2014, p. 218), "a prática de ensino exploratório da Matemática exige do professor muito mais do que a identificação e seleção das tarefas para a sala de aula". O professor precisa compreender como os estudantes resolvem as tarefas para relacionar as ideias deles com os objetivos de aprendizagem (Canavarro, 2011).

Porém, para que ocorra a aprendizagem matemática, não basta apenas a elaboração e a proposição de tarefas desafiadoras, pois "o ensino exploratório exige, para além de tarefas matemáticas adequadas, uma prática do professor que seja compatível com os aspectos referidos sobre o processo de inquirição" (Cyrino; Oliveira, 2016, p. 24).

Segundo Cyrino e Teixeira (2016), na construção de *framework* preparado para subsidiar o trabalho de professores na elaboração de aulas pautadas no EEM, as ações do professor, nessa perspectiva, acontecem em duas etapas: *antes da aula* e *durante a aula*.

O trabalho de planejamento do professor na perspectiva do EEM começa pela etapa de *antecipar*. Nessa etapa, após estabelecer os objetivos de aprendizagem a serem atingidos com as aulas, o professor (re)elabora tarefas que priorizam elevado nível de demanda cognitiva e planeja como fará a proposição da tarefa para que se mantenha esse nível cognitivo esperado na realização da tarefa (Cyrino; Teixeira, 2016).

No planejamento pautado no EEM, tanto para a elaboração da tarefa quanto para a proposição aos estudantes, é necessário que o professor pondere

> [...] as características dos alunos, o modo como eles se envolvem com as tarefas que são propostas, e os seus conhecimentos prévios, para que se possa prever intervenções a serem realizadas para auxiliá-los no processo de compreensão e resolução. Por exemplo, o professor pode utilizar recursos disponíveis na escola (livros, materiais manipuláveis, dicionários, laboratório de informática, dentre outros) ou propor outras tarefas com grau de complexidade menor, que os preparem para a resolução das mais complexas (Cyrino; Teixeira, 2016, p. 88-89).

Antes da aula, Cyrino e Teixeira (2016) sugerem algumas ações para o professor, descritas em um *framework*, que contemplam etapas antes das aulas, que são ações de *antecipação* do professor, importantes para favorecer o desenvolvimento das aulas e atingir os objetivos. Também são destacadas ações que cabem ao professor *durante as aulas*, pautadas no EEM, contempladas nesse quadro[3].

Baseando-se nessas ações, o professor tem um trabalho que requer bom planejamento e preparo. No EEM, as ações do professor, segundo Canavarro, Oliveira e Menezes (2012, p. 258), são norteadas por dois objetivos centrais: "a promoção das aprendizagens matemáticas dos estudantes e a gestão das relações e do trabalho dos estudantes e da turma como um todo". Assim, todas as ações e intenções do professor têm como ponto de partida um desses objetivos, mas ambos estão relacionados (Cyrino; Oliveira, 2016).

Em relação à organização das aulas no EEM, elas podem ocorrer em fases, não sendo uma condição, nem mesmo uma ordem a ser seguida ou contemplada na sua totalidade, mas que pode contribuir para a realização das aulas. Essas fases, segundo Canavarro, Oliveira e Menezes (2012), podem ser admitidas como: *i) Introdução da tarefa, ii) Realização da tarefa, iii) Discussão da tarefa e iv) Sistematização das aprendizagens.*

A *Introdução da tarefa* é o momento em que o professor propõe a tarefa aos estudantes e certifica-se de que eles se apropriaram da tarefa, e provoca-os para uma espécie de desafio, instigando à realização da tarefa. Nessa fase, o professor também organiza os estudantes e dá as primeiras orientações para a realização da tarefa, explicando como serão organizados, em duplas ou grupos, e o tempo destinado para isso. Pode explicar, também, como será o desenvolvimento das aulas, quais fases e momentos as constituem, os recursos que estão disponíveis para o auxílio na

[3] Essas ações que cabem ao professor são sugeridas por Cyrino e Oliveira (2016) em um *framework*, disponível na obra *Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática: elaboração e perspectivas*.

resolução da tarefa, como deverão ser feitos os registros e as apresentações, e como serão avaliados (Canavarro; Oliveira; Menezes, 2012; Cyrino; Oliveira, 2016).

A *Resolução da tarefa* é o momento em que os estudantes resolvem a tarefa em pequenos grupos. Nessa fase, o professor fará mediações nos grupos durante a resolução da tarefa, tomando cuidado para não comprometer o grau de demanda cognitiva. É importante que o professor esteja preparado, antecipando possíveis situações, dúvidas, equívocos e estratégias de resoluções dos estudantes para que não valide ou refute ideias, e incentive a *comunicação* entre os integrantes do grupo, favorecendo a *reflexão* e a *colaboração* (Canavarro; Oliveira; Menezes, 2012; Cyrino; Oliveira, 2016). Durante essa fase, o professor precisa monitorar, selecionar e sequenciar as resoluções da tarefa dos grupos para apresentação e discussão coletiva na fase seguinte (Cyrino; Teixeira, 2016).

A fase da *Discussão da tarefa* é o momento em que os grupos apresentam suas resoluções para a turma toda, para que compreendam as ideias, explicações e estratégias de resolução dos outros grupos, sejam elas corretas ou não, para que, na troca coletiva, os estudantes possam atribuir e construir significados, promovendo a *reflexão* matemática e o compartilhamento de conhecimento. O professor precisa organizar essas apresentações valorizando as diferentes ideias de resolução, de modo que todos possam entender as diferentes resoluções propostas pelos grupos (Canavarro; Oliveira; Menezes, 2012; Cyrino; Oliveira, 2016).

A *Sistematização das aprendizagens* é uma fase mais centrada no professor, que precisa fazer com que a aprendizagem matemática das ideias que foram discutidas pelos grupos seja sistematizada, levando os estudantes a estabelecerem possíveis relações com os conteúdos já estudados e com novos conceitos que serão abordados a partir da discussão das resoluções da tarefa (Canavarro; Oliveira; Menezes, 2012; Cyrino; Oliveira, 2016).

No âmbito da EEM, o aluno aprende por meio da interação com os colegas e por meio das questões levantadas pelo professor, ao longo do desenvolvimento da tarefa, bem como durante as fases de discussão coletiva e sistematização das aprendizagens. Dessa forma, o aluno é capaz de construir seu próprio conhecimento, atribuindo significado aos objetos matemáticos estudados, o que pode contribuir para uma aprendizagem mais profunda da matemática estudada.

Acredita-se que a abordagem de aulas na perspectiva do EEM representa uma oportunidade para a compreensão de características de equações do primeiro grau, possibilitando o desenvolvimento do pensamento algébrico, o que se discute brevemente na seção que segue.

Ensino de equações do primeiro grau

A Álgebra é um campo da Matemática que evoluiu ao longo da história, apresentando mudanças em relação ao que se entendia como Álgebra e os objetos de estudo que ela abrange, conforme o avanço da própria Matemática (Ponte; Branco; Matos, 2009). De acordo com Kaput (2008), até o início do século XVIII, a característica principal da Álgebra foi o uso de símbolos literais (letras) e a resolução de equações.

O ensino da Álgebra, nas escolas, por muito tempo foi centrado na resolução de equações e diferentes modos de justificar o transformismo algébrico (Coelho; Aguiar, 2018). A linguagem algébrica é uma característica da Álgebra, mas não é a finalidade da Álgebra escolar (Kaput, 2008).

A partir do final da década de 1980 e início da década de 1990, as pesquisas relacionadas à Álgebra escolar tomaram como foco principal o desenvolvimento do pensamento algébrico (Almeida, 2016; Kaput, 2008; Ponte; Branco; Matos, 2009). Conforme destacado por Kaput (2008), para favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico, é essencial oferecer aos estudantes experiências que desencadeiem esse tipo de pensamento ao longo dos anos escolares.

Na literatura, há diferentes caracterizações do que se entende por pensamento algébrico e como esse tipo de pensamento pode ser desenvolvido. Blanton e Kaput (2005, p. 413, tradução nossa) caracterizam o pensamento algébrico como "[...] um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados à sua idade". Assim como Blanton e Kaput (2005), para Kaput (2008), em uma versão mais recente de seus trabalhos envolvendo pensamento algébrico, uma das principais características do pensamento algébrico é o processo de generalização. Para ele, o modo como os estudantes estabelecem e expressam essas generalizações e o raciocínio sobre essas generalizações segue por caminhos cada vez mais formais, de acordo com o nível de experiência dos estudantes em relação à Álgebra, ou seja, de acordo com o desenvolvimento de seu pensamento algébrico. Assim, a forma de expressão utilizando símbolos convencionais tende a seguir uma linguagem algébrica formal, de acordo com as experiências dos estudantes em relação à Álgebra.

O uso da generalização, característica importante do pensamento algébrico (Kaput, 2008; Radford, 2009), também está presente no trabalho com as equações do primeiro grau, pois os estudantes generalizam operações aritméticas para processos algébricos, como o uso da propriedade distributiva, por exemplo. A manipulação algébrica de equações equivalentes também pode ser associada a processos de generalização. Além disso, compreender a incógnita e suas formas de representação é essencial para que os estudantes reconheçam as letras e os símbolos das equações como representações de valores desconhecidos, trabalhando com símbolos convencionais da Álgebra à medida que o pensamento algébrico dos estudantes evolui (Kaput, 2008).

Portanto, o trabalho com equações do primeiro grau está ligado ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Trata-se de uma via de mão dupla: a aprendizagem de equações do primeiro grau com atribuição de significados favorece o desenvolvimento do pensamento algébrico, assim como o pensamento algébrico favorece a aprendizagem das equações e de outros objetos contemplados pela Álgebra escolar.

A razão para isso é que "a noção de equilíbrio é importante para a compreensão do conceito de equação" (Fernandes, 2011, p. 12), o que envolve uma compreensão do símbolo de "=" (igual) de modo diferente da que geralmente é atribuída na Aritmética, como resultado de uma operação.

O trabalho com as equações do primeiro grau exige a compreensão da igualdade para além da Aritmética. Isso ocorre porque o sinal de "=" (igual) deve ser entendido como igualdade entre expressões, e não apenas como um operador indicando resultado, atribuindo (novo) significado ao símbolo. O sinal de "=" (igual), segundo Kieran (1992, *apud* Ponte; Branco; Matos, 2009), pode assumir diferentes significados: (i) como resultado de uma operação, em uma perspectiva processual, fortemente ligado à aritmética; e (ii) como relação de equivalência, na perspectiva estrutural. A passagem do entendimento do sinal de "=" (igual) de (i) para (ii) guarda relação com a passagem do pensamento aritmético para o algébrico. Essa compreensão pode favorecer o entendimento sobre a definição de equações e os processos de resolução.

Kieran (1981, *apud* Fernandes, 2011) aponta que, se o sinal de "=" (igual) for trabalhado desde os primeiros anos de escolaridade como indicativo de equivalência entre igualdades na Aritmética, pode contribuir para amenizar as dificuldades dos estudantes futuramente no estudo das equações.

Além da interpretação do sinal de "=" (igual) na perspectiva estrutural, como uma relação de equivalência, em Álgebra, outros sinais, como "+" e "–" podem gerar dificuldades para os estudantes, que estão habituados a interpretar esses sinais como operações aritméticas para obter um resultado numérico, e "verificam-se, também, dificuldades de natureza pré-algébrica, tais como a separação de um número do sinal 'menos' que o precede" (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 96).

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p. 98), "a interpretação do sinal '+' como indicador de uma adição algébrica e a compreensão do sinal '=' como indicador de uma relação de equivalência são aspectos que não surgem nos alunos de forma imediata". Dessa forma, é necessário propor tarefas que permitam essa compreensão, o que também envolve o trabalho com expressões algébricas.

Além disso, quando o estudante consegue escrever uma equação usando linguagem simbólica para representar o modelo matemático de determinado problema ou situação, a partir da qual poderá encontrar a solução, está mobilizando mais uma característica do pensamento algébrico, a *Modelação e Resolução de Problemas* (Almeida, 2016; Kaput, 2008).

Na resolução de equações do primeiro grau, os estudantes podem apresentar diferentes estratégias de resolução. Desde a resolução de equações por tentativa de erro e acerto, para equações da forma mais simplificada, como $ax + b = c$, que demandam de estratégias aritméticas, até a resolução de equações do tipo $ax + b = cx + d$, em que são necessárias estratégias relacionadas aos princípios da equivalência, remetendo ao pensamento algébrico (Araújo, 2009). Para a resolução de equações desse último tipo, "[...] é necessário a ajuda de transformações que conservam um sentido de igualdade que não é próprio do pensamento aritmético" (Araújo, 2009, p. 52).

Ainda segundo Araújo (2009, p. 65), a técnica de testar a igualdade por tentativa e erro, por exemplo, mesmo que estritamente ligada à Aritmética, pode ser "[...] utilizada para introduzir o trabalho com o estudo de resolução de equações, visando dar sentido ao sinal de igualdade", sendo mais útil em casos em que a solução da equação é um número inteiro ou decimal exato.

> Particularmente importantes são as noções de "solução de uma equação" e "equações equivalentes". Para além de serem capazes de resolver equações, os alunos devem ser capazes de verificar se um dado valor é ou não solução de uma certa equação. Além disso, devem saber que duas equações são equivalentes se e só se tiverem as mesmas soluções (Ponte; Branco; Matos, p. 94).

Conforme apontado em Ponte, Branco e Matos (2009), o trabalho com as equações do primeiro grau deve iniciar por equações mais simples, que envolvam no máximo duas operações, mesmo que os estudantes inicialmente não utilizem princípios de equivalência. Ao resolver equações do tipo $ax + b = c$, por exemplo, "[...] os alunos podem usar estratégias informais de resolução de equações. Estas abordagens servem de preparação para a abordagem formal, recorrendo às regras de resolução de equações, baseadas nos princípios de equivalência" (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 95).

Ponte, Branco e Matos (2009) apontam alguns erros e dificuldades mais comuns apresentados pelos estudantes ao resolverem equações do primeiro grau: (i) adição incorreta de termos semelhantes, (ii) adição incorreta de termos não semelhantes e interpretação incorreta do sinal de "=" (igual), (iii) interpretação incorreta de monômios do primeiro grau, (iv) separação entre a parte literal e a parte numérica em uma expressão algébrica, (v) resolução incorreta de uma equação do tipo $ax = b$, (vi) uso de pressupostos intuitivos e raciocínio pragmático sobre um sistema de notações não familiar, (vii) estabelecimento de analogias com sistemas simbólicos usados no quotidiano em outras áreas da Matemática ou outras disciplinas, (viii) interferência de outras aprendizagens em Matemática, e (ix) influência de materiais e estratégias de ensino pouco adaptados.

Ponte, Branco e Matos (2009) afirmam que a progressão na aprendizagem com as equações do primeiro grau acontece de maneira sucessiva em relação ao nível de complexidade das equações, indo das mais simples, envolvendo uma incógnita, até duas ou mais variáveis.

Em síntese, a abordagem das equações do primeiro grau integra várias características que podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico. De igual modo, à medida que o estudante desenvolve características do pensamento algébrico, o trabalho com as equações do primeiro grau pode ser favorecido.

A seguir, descreve-se a elaboração das tarefas e o planejamento das aulas que subsidiaram o trabalho da professora/pesquisadora durante as intervenções realizadas em uma turma de sétimo ano dos Anos Finais do Ensino Fundamental, considerada a primeira experiência dos estudantes com equações do primeiro grau.

Contexto e primeiros encaminhamentos

O planejamento das aulas assentes na perspectiva do EEM foi elaborado no ano de 2024, para uma turma de sétimo ano dos Anos Finais do Ensino Fundamental de uma escola pública do município de Porto União, no estado de Santa Catarina. A turma era composta por 26 estudantes do ensino regular, com idades entre 12 e 16 anos, tendo a maioria entre 12 e 13 anos. A turma era considerada pela professora/pesquisadora como participativa nas tarefas propostas durante as aulas, e seus integrantes também eram agitados, falantes, mas com bom rendimento escolar.

A professora/pesquisadora faz parte do quadro docente dessa escola desde o ano de 2019 e conhecia os alunos da turma, pois já havia trabalhado com esses estudantes no ano anterior à pesquisa, tendo iniciado um trabalho com tarefas de natureza exploratória. Entretanto, por falta de tempo e/ou de planejamento adequado, o ensino abrangeu algumas fases do EEM, como introdução e desenvolvimento da tarefa, e algumas tentativas de discussão e sistematização.

As quatro aulas de matemática de 45 minutos nessa turma eram distribuídas em três dias da semana. Ocorriam na segunda-feira, quando a turma tinha duas aulas, não sendo conjugadas, pois havia um intervalo de aula entre elas, e na terça e quarta-feira havia somente uma aula.

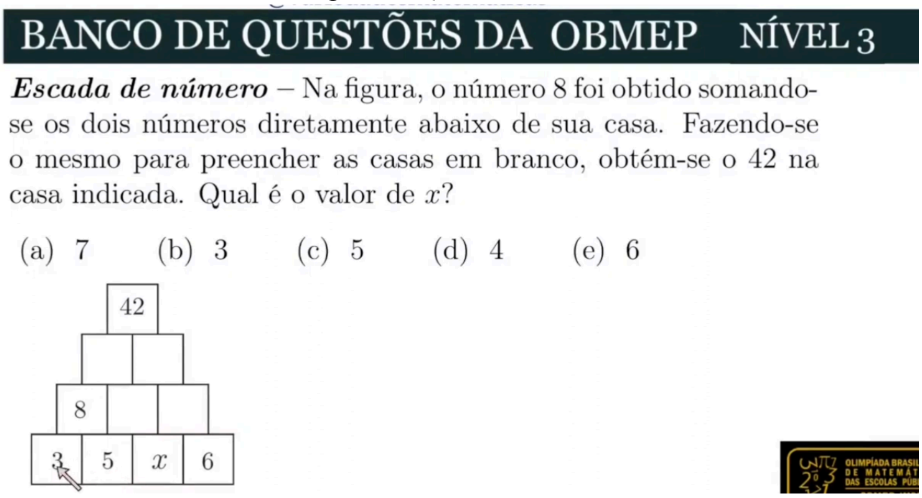
Definido o conteúdo matemático que seria trabalhado, equações do primeiro grau, passou-se ao delineamento dos objetivos das aulas, de acordo com o elencado no planejamento do trabalho docente da professora/pesquisadora, seguindo para a elaboração das tarefas.

Para construir a tarefa, alguns livros didáticos disponíveis na escola foram revisados, e o material utilizado nos trabalhos sobre equações do primeiro grau foram usados no referencial teórico dessa pesquisa, como o de Fernandes (2011) e de Almeida (2016), por exemplo, além das propostas de ensino que a professora/pesquisadora já conhecia durante os anos em que leciona. De acordo com esses materiais, as propostas de ensino são para estudantes que já iniciaram os estudos em equações do primeiro grau, como jogos de fixação, problemas ou exercícios, e outras que faziam uso da analogia da balança de dois pratos para iniciar o estudo de equações do primeiro grau.

Assim, essas propostas não atendiam aos objetivos propostos para as aulas, nem se adequavam às tarefas de natureza exploratória. Reconhece-se que a analogia da balança de dois pratos pode favorecer o entendimento de alguns procedimentos de resolução das equações do primeiro grau e da igualdade, como descrito no trabalho de Fernandes (2011). Porém, essa analogia não contempla o trabalho com números negativos, por exemplo. Assim, não é possível atribuir significado às soluções das equações com resultado negativo, sendo essa atribuição de significados umas das características principais do pensamento algébrico (Lins, 1992). Então, foram buscadas questões na internet que envolvessem equações do primeiro grau, a fim de adaptá-las para uma tarefa de acordo com o EEM e aos objetivos de ensino estipulados para os planos de aulas.

Inicialmente, foi construída uma tarefa adaptando uma questão do banco de questões (Figura 1) das Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas e Particulares (OBMEP).

Figura 1 - Questão OBMEP


BANCO DE QUESTÕES DA OBMEP NÍVEL 3

Escada de número – Na figura, o número 8 foi obtido somando-se os dois números diretamente abaixo de sua casa. Fazendo-se o mesmo para preencher as casas em branco, obtém-se o 42 na casa indicada. Qual é o valor de x?

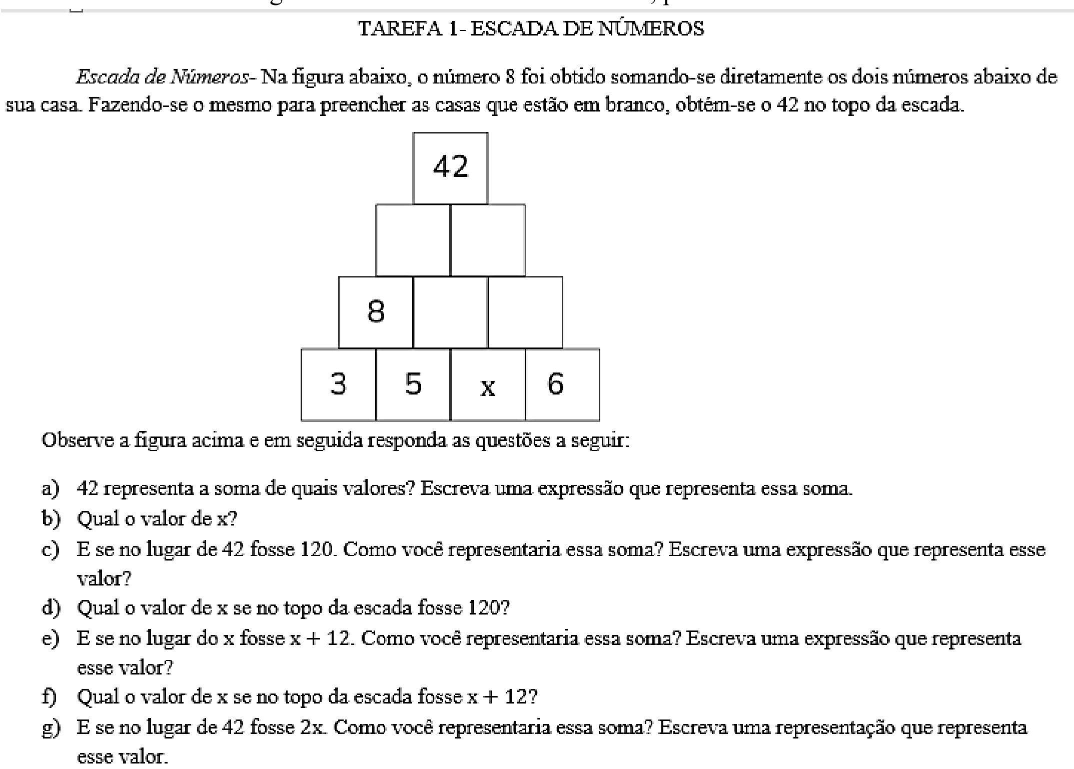
(a) 7 (b) 3 (c) 5 (d) 4 (e) 6

Fonte: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP (IMPA, s.d.).

O objetivo das aulas e das tarefas era que os estudantes mobilizassem conceitos para a compreensão da ideia de equações do primeiro grau e a ideia de incógnita, contemplando aspectos do pensamento algébrico relacionados com as equações do primeiro grau.

Partindo dessa questão, foi criada a primeira versão da tarefa, conforme a Figura 2.

Figura 2 – Tarefa Escada de Números, primeira versão


TAREFA 1- ESCADA DE NÚMEROS

Escada de Números- Na figura abaixo, o número 8 foi obtido somando-se diretamente os dois números abaixo de sua casa. Fazendo-se o mesmo para preencher as casas que estão em branco, obtém-se o 42 no topo da escada.

Observe a figura acima e em seguida responda as questões a seguir:

a) 42 representa a soma de quais valores? Escreva uma expressão que representa essa soma.
b) Qual o valor de x?
c) E se no lugar de 42 fosse 120. Como você representaria essa soma? Escreva uma expressão que representa esse valor?
d) Qual o valor de x se no topo da escada fosse 120?
e) E se no lugar do x fosse x + 12. Como você representaria essa soma? Escreva uma expressão que representa esse valor?
f) Qual o valor de x se no topo da escada fosse x + 12?
g) E se no lugar de 42 fosse 2x. Como você representaria essa soma? Escreva uma representação que representa esse valor.

Fonte: Elaborada pelas autoras.

Essa primeira versão da tarefa foi proposta e respondida por uma turma de nono ano, na qual a professora/pesquisadora lecionava, a fim de levantar possíveis dúvidas dos estudantes em relação à tarefa, e (re)ações deles em relação a cada um de seus itens. Após isso, a tarefa foi (re)elaborada e encaminhada para o grupo de pesquisa do qual a professora/pesquisadora faz parte, o GEPTEMatE, para ser avaliada e discutida em reunião com os membros.

Após as discussões do grupo, que estão detalhadas na próxima subseção, houve uma nova elaboração de tarefas, criando duas tarefas finais. Essas versões finais das tarefas foram desenvolvidas com outra turma do nono ano, com o objetivo de realizar mais um teste piloto, o qual subsidiou a construção do plano de aula e dos quadros de antecipação.

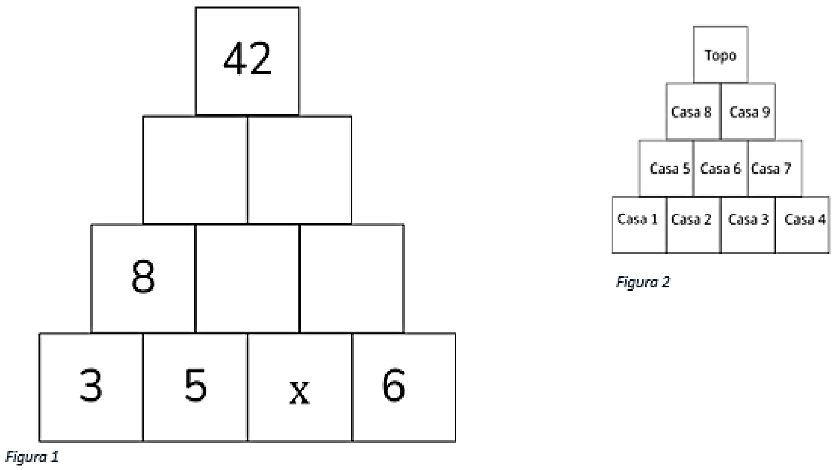
(Re)Planejamento de aulas assentes no EEM para o ensino de equações do primeiro grau

Após o primeiro teste piloto, partiu-se para a reformulação da tarefa, conforme o ilustrado na Figura 3, que em seguida foi discutida no GEPTEMatE, para que os membros pudessem contribuir a respeito da tarefa e do planejamento das aulas.

Figura 3 - Tarefa 1, versão 1

TAREFA 1- ESCADA DE NÚMEROS

Escada de números- Na figura, o número 8 foi obtido somando-se os diretamente os dois números das casas abaixo dele (casa 1 + casa 2). Fazendo-se o mesmo para preencher as casas que estão em branco, obtém-se o 42 no topo da escada. A posição de cada casa segue o modelo apresentado na figura 2.



Observe a figura acima e em seguida responda as questões a seguir:

a) Como você encontraria o valor da Casa 6? Escreva uma expressão que representa esse valor.
b) E o valor da Casa 7? Escreva uma expressão que representa esse valor.
c) Como é obtido o 42 nessa escada de números? Escreva uma expressão que representa esse valor.
d) Qual é o valor de x para que se obtenha 42 no topo da escada?
e) E se no lugar do 42 fosse 120. O valor de x seria o mesmo? Qual seria o valor de x?
f) Qual seria o valor de x se no topo da escada fosse -36?

Fonte: Elaborada pelas autoras.

Nessa reunião, a professora/pesquisadora relatou ao grupo as dúvidas observadas durante sua realização com a turma do nono ano, bem como suas percepções sobre a tarefa após o primeiro teste piloto realizado, e indicou as reformulações realizadas a partir disso.

Na reunião com o GEPTEMatE, foram discutidas as questões referentes aos objetivos da tarefa, sendo sugeridas algumas mudanças. Primeiramente, o grupo sugeriu que fosse explicado aos estudantes o motivo do nome da tarefa, já que havia dúvida quanto ao nome dado à figura para completarem, pelo fato de que os estudantes já haviam trabalhado com tarefas semelhantes para completar valores com operações básicas no sexto ano, as quais eram chamadas de pirâmides. Porém, como o termo pirâmide remete a um sólido geométrico, uma figura tridimensional, o nome poderia não ser adequado. Então, foi optado por manter o nome *Escada de Números,* e explicar que os números comporiam os degraus da escada. Também foi sugerida a mudança da palavra *expressão* por *expressão matemática*, ou que fosse explicado, no momento de *introdução da tarefa,* que se tratava de uma expressão matemática, visto que, no primeiro teste, os estudantes apresentaram dificuldades em entender do que se tratavam as expressões que deveriam ser escritas, necessitando de intervenção da professora.

Outra sugestão inicial do grupo de pesquisa foi que a discussão da tarefa acontecesse em dois momentos: i) uma após a resolução da questão *c* da tarefa 1; e ii) no final da resolução da tarefa, pelo fato de que era necessário que os estudantes utilizassem o sinal de igual para escrever as equações. Entretanto, foi avaliado que isso poderia dispersar os estudantes para a continuação da tarefa. Então, outra ideia sugerida pelos membros do GEPTEMatE foi criar uma tarefa com número reduzido de questões, com foco no uso do sinal de igual, elemento essencial para trabalhar equações do primeiro grau a partir da igualdade entre duas expressões.

Após as sugestões apontadas pelo GEPTEMatE, a tarefa foi reformulada novamente, originando duas novas tarefas, com o intuito de que, após a discussão e sistematização da tarefa 1, *Escada de números*, fosse possível realizar a discussão dos demais itens na tarefa 2, *Escada de Números II*. Dessa maneira, os estudantes deveriam ter condições de resolver a segunda tarefa, construindo estratégias de resoluções para as equações estabelecidas por eles, fazendo o uso apropriado do sinal de "=" nas equações. A seguir, cada tarefa é explicada detalhadamente.

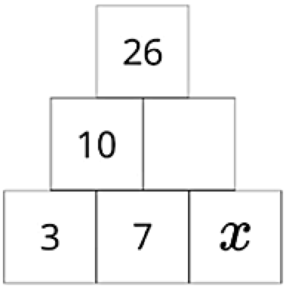
Tarefa Escada de Números

A versão final da primeira tarefa, *Escada de Números*, elaborada a partir dessas discussões, está apresentada na Figura 4, na página seguinte.

Figura 4 - Tarefa 1 *Escadas de Números*, versão final

TAREFA 1- ESCADA DE NÚMEROS

Na figura abaixo, o número 10 foi obtido somando diretamente os dois números das casas abaixo dele. Fazendo o mesmo para preencher a casa que está em branco, obtém-se o 26 no topo da escada.



Observe a figura acima e em seguida responda as questões a seguir:

a) Escreva uma expressão que representa o 10 obtido na escada de números.
b) Escreva uma expressão que representa como obter o 26 na escada de números.
c) O que o x representa nessa escada de números? Determine o valor de x. Explique como você pensou.
d) Qual ou quais outros valores o x pode assumir nessa escada de números? Justifique sua resposta.

Fonte: Elaborada pelas autoras.

Considerando que os objetivos das aulas relacionadas à tarefa *Escada de Números* (Figura 4) eram (i) reconhecer que o sinal de igual representa a igualdade entre duas expressões, e não a indicação de um resultado, e (ii) identificar a incógnita como a única solução de uma equação, a tarefa foi (re)elaborada, criando questões a partir da situação inicial, procurando atingir esses objetivos.

Para tanto, na tarefa *Escada de Números*, a questão a) *Escreva uma expressão que representa o 10 obtido na escada de números*, foi pensada para que os estudantes fizessem o uso do sinal de igual, escrevendo uma igualdade. Já na questão b) *Escreva uma expressão que representa como obter o 26 na escada de números*, a ideia era que os estudantes completassem a casa em branco, e chegassem na igualdade $17 + x = 26$, ou em uma igualdade equivalente. Na questão c) *O que o x representa nessa escada de números? Determine o valor de x. Explique como você pensou*, o objetivo era que os estudantes associassem que x representa um valor desconhecido na igualdade encontrada anteriormente, mas que eles precisavam descobrir o valor de x que torna a igualdade verdadeira.

Também foi solicitado que eles escrevessem como encontraram esse valor para discutir, na fase da discussão da tarefa, as estratégias utilizadas por eles. As justificativas dos estudantes são importantes para o professor realizar as intervenções e mediar as situações de aprendizagem durante as aulas, além de que, no ato de justificar, explicar, os estudantes também estão refletindo sobre as ideias matemáticas utilizadas por eles, sendo possível, ainda, encontrar e corrigir os próprios erros, se for o caso. Os erros nas tarefas também podem ser discutidos na fase de discussão da tarefa.

Na letra d) *Qual ou quais outros valores o x pode assumir nessa escada de números? Justifique sua resposta*, a intenção era que os estudantes identificassem que o x só poderia assumir um valor, e dessa forma seria possível discutir que uma equação de primeiro grau possui uma única solução. Ainda, que x em uma equação assume um valor diferente do x em uma expressão algébrica, e que o x encontrado não é o *resultado da operação*, ou seja, não é o número que está depois do sinal de igual. O intuito era que começassem a atribuir o significado do sinal de igual em uma equação como uma igualdade entre duas expressões.

Após a criação das tarefas *Escada de números* e *Escada de números II,* a professora/pesquisadora realizou mais um teste piloto com as tarefas na versão final, em outra turma de nono ano na qual lecionava. Durante o desenvolvimento desse teste, foi identificada a necessidade de rever algumas ações, previstas na etapa de antecipação, conforme sugerido por Cyrino e Teixeira (2016) e Canavarro (2011), elaborando um quadro de antecipação das ações do professor e dos estudantes, diante das dificuldades e questionamentos apresentados por eles e das (re)ações da professora/pesquisadora durante o teste. Essa necessidade reforça a importância do planejamento da aula, principalmente a etapa de antecipação, a fim de identificar estratégias a serem adotadas durante as aulas. Assim, não foram realizadas modificações nas versões das tarefas, mas a concentração foi em planejar possíveis (re)ações da professora/pesquisadora e dos estudantes, tendo como base a fundamentação teórica da pesquisa desenvolvida até o momento, os testes pilotos, as contribuições do grupo de pesquisa e as versões finais das tarefas.

O quadro de antecipações (Quadro 1, abaixo) da tarefa *Escada de Números* sintetiza possíveis ações dos estudantes e da professora/pesquisadora durante a realização da tarefa, a fim de nortear o trabalho em sala de aula. Esse quadro inclui questionamentos e orientações que podem ser feitos diante de determinada ação dos estudantes.

Quadro 1 – Antecipações das ações - tarefa 1 *Escada de Números*

(continua)

Quadro de antecipações da Escada de Números	
a) Escreva uma expressão que representa o 10 obtido na escada de números	
Ações do aluno	Ações do professor
Não sabe o que é expressão. Escreve 3+7 sem o sinal de igual.	Questionar o que são expressões algébricas e numéricas já estudadas. Questionar como foi obtido o 10 na escada de números e como eles podem representar essa situação por meio de uma expressão matemática. Questionar se falta algo que relacione essa expressão com o 10. Questionar o que isso representa, "onde" está o 10. Questionar como chegaram nessa expressão.
Escreve 3+7=10.	Pedir para que expliquem por que escreveram essa expressão.
b) Escreva uma expressão que representa como obter o 26 na escada de números.	

Ações do aluno	Ações do professor
Escreve $10 + 16$ sem o sinal de igual.	Questionar como foi obtido o 16. Questionar se o 16 pode ser substituído, e pelo que. Questionar como relacionariam essa expressão com o 26, se teriam mais alguma informação que poderiam escrever (“onde” está o 26).
Não sabe começar.	Questionar quais casas na escada de números somadas resultam no valor que está no topo da escada. Questionar como preencheriam a casa em branco na escada de números e a casa de cima.
Escreve $10 + 7 + x = 26$.	Questionar se poderiam simplificar, juntar termos semelhantes no primeiro membro da igualdade para que obtenham $17 + x = 26$.
Escreve que 13+13=26.	Questionar como é obtido o 26 nessa escada de números.
Responde que o 26 é obtido somando todos os valores da escada.	Questionar se, ao somar os valores que estão na escada, resulta em 26. Questionar como o 10 foi obtido. Questionar quais casas devem ser somadas na escada para resultar em 26 e o valor dessas casas.
Responde que $17 + x = 26$.	Questionar por que fizeram dessa forma, como pensaram. Pedir que expliquem como chegaram nessa resposta.
c) O que o x representa nessa escada de números? Determine o valor de x. Explique como você pensou.	
Ações do aluno	Ações do professor
Escreve que x representa um número.	Questionar se, no início da tarefa, o valor de x era conhecido. Questionar qual número.
Escreve que x é igual a 9.	Questionar como encontraram o valor 9 para x, pedir para que expliquem. Questionar, caso a expressão fosse outra, se o valor de x mudaria.
Escreve $16 - 7 = 9$. Escrevem que $10 + 7 + 9 = 26$ então $x = 9$.	Questionar o que o 9 representa e se poderiam escrever de outra forma essa expressão.
Escreve que encontraram o 9 por tentativas, somando até encontrar o valor que resulte em 16 (7+9) ou 26 (10+7+9).	Questionar como encontraram o 9 e se poderia ter alguma outra maneira de chegar nesse resultado. Questionar, caso fosse outro valor maior no lugar do 10 e do 26, se teria outra maneira de encontrar sem que precisassem ficar testando.
Escreve que x é um número que somado com 17 resulta em 26, portanto $x = 9$.	Pedir para que expliquem como pensaram. Questionar quais operações matemáticas utilizaram para determinar esse valor.
d) Qual ou quais outros valores o x pode assumir nessa escada de números? Justifique sua resposta.	
Ações do aluno	Ações do professor
Responde que nenhum.	Questionar por que não podem ser outros valores.
Responde quaisquer outros valores diferentes de 9.	Questionar quais outros valores x pode assumir e por que. Questionar, se x poderia assumir o valor 10 ou 11, por exemplo, se isso resultaria no mesmo valor no topo da escada de números.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Assim, a tarefa *Escada de números* daria início às discussões sobre a ideia de equações como uma igualdade entre duas expressões e a ideia de incógnita.

Após a elaboração do quadro de antecipações, foi dada sequência à elaboração do plano de aula. Para o planejamento, foram adotadas as aulas com o desenvolvimento em fases, conforme definidas por Canavarro, Oliveira e Menezes (2012), que são: *i) Introdução da tarefa, ii) Realização da tarefa, iii) Discussão da tarefa* e *iv) Sistematização das aprendizagens.*

Para a fase de *Discussão da tarefa,* foram estabelecidos alguns critérios para selecionar os grupos de estudantes que apresentariam suas resoluções no momento de discussão coletiva. Foi feita a opção por selecionar as resoluções dos grupos que apresentassem diferentes estratégias de resolução, incluindo as incorretas, da tarefa *Escada de Números*, para enriquecer o momento de discussão coletiva e favorecer o processo de *reflexão* dos conceitos matemáticos trabalhados, assim como o compartilhamento de ideias.

Na questão a, acreditou-se que não haveria dificuldades para os estudantes chegarem na expressão correta, de acordo com as intervenções planejadas no quadro de antecipações. Por isso seriam discutidas somente as respostas dos grupos, sem necessidade de uma explanação maior por parte deles. Para a questão b, seriam selecionadas as resoluções nas quais os estudantes escrevessem uma expressão para representar como foi obtido o número 26 na escada de números, incluindo os que: (i) utilizassem o sinal de igual; (ii) não utilizassem o sinal de igual; (iii) utilizassem o sinal de igual de maneira incorreta; (iv) escrevessem uma igualdade, mas sem a incógnita x; e (v) escrevessem equações equivalentes a $17 + x = 26$. Esses tipos de resolução poderiam sustentar as discussões sobre o significado do sinal de "=" em uma equação e equações escritas de forma diferente, mas que são equivalentes e podem ser simplificadas. Já as questões incorretas serviriam para discutir qual foi o equívoco e como poderiam corrigi-las.

Para a questão c, seriam selecionadas as resoluções nas quais os estudantes apresentassem: (i) diferentes estratégias para resolução das equações, chegando ao resultado correto; (i) resoluções incorretas; e (ii) diferentes significados e valores atribuídos à incógnita x. Para os grupos que chegassem em valores diferentes de 9, a professora/pesquisadora poderia pedir para substituir o valor encontrado e observar se, com isso, encontrariam o valor correto no topo da escada. A partir da resolução dos grupos que apresentassem uma solução correta, poderiam ser exploradas as diferentes maneiras de resolver uma equação do primeiro grau, concluindo que chegariam ao mesmo valor para a incógnita x, o que serviria de base para discussão da última questão da tarefa.

Na questão d, foi determinado que seria perguntado a alguns grupos o que responderam nesse item, incluindo aqueles que respondessem que: (i) x não pode assumir nenhum outro valor diferente de 9; (ii) x pode assumir qualquer valor nessa escada de números; e (iii) x como algum valor diferente de 9. Essas respostas serviriam de base para as discussões, a fim de que os estudantes compreendessem que, em uma equação do primeiro grau, a incógnita representa um valor desconhecido, representado por uma letra, que esse valor é a solução da equação, pois torna a igualdade verdadeira, e que esse tipo de equação possui somente uma solução.

Escada de Números II

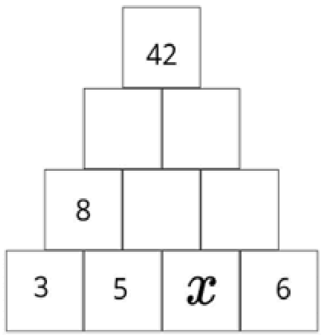
A tarefa *Escada de números II* foi elaborada para dar continuidade ao conteúdo e às discussões sobre equações do primeiro grau. Também foi optado por incluir questões que trabalhassem com soluções de equações com números negativos para abranger a solução de uma equação do primeiro grau, considerando os conhecimentos prévios dos estudantes.

Os objetivos da tarefa *Escada de Números II* eram: (i) reconhecer que uma equação representa uma igualdade entre duas expressões, em que alguns valores são desconhecidos; e (ii) identificar a incógnita como a única solução de uma equação do primeiro grau. A versão final dessa tarefa está apresentada na Figura 5, a seguir.

Figura 5 - Tarefa 2 *Escadas de Números II*, versão final

TAREFA 2- ESCADA DE NÚMEROS II

Na figura, o número 8 foi obtido somando-se os diretamente os dois números das casas abaixo dele. Fazendo-se o mesmo para preencher as casas que estão em branco, obtém-se o 42 no topo da escada.



Complete as casas que estão em branco na figura acima e em seguida responda as questões a seguir:

1) Escreva uma expressão matemática que representa o 8 obtido nessa escada.
2) Como é obtido o 42 nessa escada de números? Escreva uma expressão matemática que representa esse valor.
3) Qual é o valor de x para que se obtenha 42 no topo da escada? Explique como você encontrou esse valor.
4) E se no lugar do 42 fosse 120.
a) Escreva uma expressão matemática que representa esse valor.
b) O valor de x seria o mesmo? Qual seria o valor de x para que essa expressão que você escreveu no item anterior seja verdadeira?
5) Qual seria o valor de x se no topo da escada fosse -36?

Fonte: Elaborada pelas autoras.

A questão 1) *Escreva uma expressão matemática que representa o 8 obtido nessa escada,* foi elaborada para que os estudantes fizessem o uso do sinal de igual para escrever uma expressão matemática e para garantir que eles entendessem como os números são obtidos na escada de números.

A questão 2) *Como é obtido o 42 nessa escada de números? Escreva uma expressão matemática que representa esse valor*, foi planejada para que os estudantes buscassem discutir como escrever uma equação do primeiro grau. Os estudantes poderiam deixar um membro da equação de forma simplificada, utilizando os conhecimentos prévios ou não, pois as diferentes equações poderiam ser simplificadas e discutidas na fase de discussão da tarefa.

O objetivo da questão 3) *Qual é o valor de x para que se obtenha 42 no topo da escada? Explique como você encontrou esse valor*, era que os estudantes encontrassem a solução da equação partindo da ideia de igualdade entre os membros da equação escrita por eles.

Os grupos ficariam livres para formular estratégias e testar, explicando depois como encontraram a solução, momento que seria também discutido na próxima fase do planejamento. A professora/pesquisadora, por meios dos questionamentos e orientações, auxiliaria os estudantes para resolver a equação, mas sem mencionar um *modo* de resolver.

A questão 4) *E se no lugar do 42 fosse 120*, tinha como propósito que os estudantes entendessem que, se mudar um dos membros da equação ou algum elemento, o valor da solução muda. Para tal, foi avaliado que era necessário encaminhar a resolução da questão dividida em dois momentos: *a) Escreva uma expressão matemática que representa esse valor* e b) *O valor de x seria o mesmo? Qual seria o valor de x para que essa expressão que você escreveu no item anterior seja verdadeira?* Para tanto, eles precisariam novamente escrever uma equação e mudar o segundo membro, a partir da equação formulada em *a*, e resolver e compreender que o valor de x mudaria, pois mudou a equação.

Por fim, na questão 5) *Qual seria o valor de x se no topo da escada fosse -36*, os estudantes deveriam trabalhar com soluções de equações com números negativos, considerando que eles já haviam estudado esses números durante o ano letivo.

Após a elaboração da tarefa *Escada de Números II*, também foi desenvolvido um quadro de antecipação das ações dos estudantes e (re)ações da professora/pesquisadora (quadro 2), que nortearia o trabalho da professora/pesquisadora durante a *Realização da Tarefa* pelos estudantes. Para a elaboração de um quadro desse tipo, é importante que o professor resolva a tarefa pensando em possíveis respostas que os estudantes podem chegar, e quais questionamentos e orientações o professor fará a partir dessas respostas para relacionar com a aprendizagem matemática que pretende discutir e sistematizar.

Quadro 2 - Antecipações das ações da tarefa *Escada de Números II*

(continua)

Quadro de antecipações da *Escada de Números II*
1) Escreva uma expressão matemática que representa o 8 obtido nessa escada.

<table>
<tr><th>Ações do aluno</th><th>Ações do professor</th></tr>
<tr><td>Escrevem que $3 + 5 = 8$.</td><td>Questionar como chegaram nessa expressão.</td></tr>
<tr><td>Não colocam o sinal de igual.</td><td>Questionar se falta algo que relacione o 3+5 com 8.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2) Como é obtido o 42 nessa escada de números? Escreva uma expressão matemática que representa esse valor.</td></tr>
<tr><th>Ações do aluno</th><th>Ações do professor</th></tr>
<tr><td>Não sabe o que fazer.</td><td>Questionar como o 42 é obtido nessa escada de números, quais casas precisam ser preenchidas para chegar no número 42.
Questionar como podem ser preenchidas essas casas.</td></tr>
<tr><td>Escreve $21 + 21$.</td><td>Questionar como chegaram nessa expressão.</td></tr>
<tr><td>Escreve $13x + 13x = 42$.</td><td>Questionar como chegaram nessa expressão e se podem somar 13 com x, por exemplo.
Questionar se no topo da escada é $42x$ ou 42.</td></tr>
<tr><td>Escreve $8 + 5x + 6x = 42$.</td><td>Questionar como chegaram em $5x$ e $6x$.
Questionar se $5x$ é o mesmo que $5 + x$.</td></tr>
<tr><td>Escreve $24 + 3x = 42$.</td><td>Questionar como obtiveram essa expressão.</td></tr>
<tr><td>Escreve $13 + x + 11 + 2x = 42$.</td><td>Questionar se podem simplificar o primeiro membro da igualdade.</td></tr>
<tr><td>Escrevem $19 + 23 = 42$.</td><td>Questionar como obtiveram o 19 e o 23, se podem ser substituídos por outras expressões e quais.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3) Qual é o valor de x para que se obtenha 42 no topo da escada? Explique como você encontrou esse valor.</td></tr>
<tr><th>Ações do aluno</th><th>Ações do professor</th></tr>
<tr><td>Escreve $x = 6$.</td><td>Questionar como chegaram nessa resposta.
Se fizeram por tentativas, questionar se fosse outro valor no topo da escada e se poderiam pensar em outra maneira de encontrar esse valor a partir da expressão da questão anterior.</td></tr>
<tr><td>Não sabem como determinar o valor de x.</td><td>Questionar o que o valor de x representa na escada de números.</td></tr>
<tr><td>Escreve que $x = 42$ ou outro valor que não seja o 6.</td><td>Questionar se substituir o x por 42 na escada de valores, esse valor vai dar certo no topo da escada, seguindo a regra na qual a escada é formada.</td></tr>
<tr><td>Escreve que $3x = 18$ e não sabe continuar.</td><td>Questionar o significa essa igualdade escrita por ele.
Questionar se poderiam pensar alguma maneira de encontrar o valor de um x se $3x$ valem 18;
Questionar se $x + x + x$ é o mesmo que $3x$ para que pensem em alguma estratégia.</td></tr>
<tr><td>Escreve que $3x + 24 = 42$ e não saber continuar.</td><td>Questionar o que o sinal de igual representa na equação.
Questionar como interpretaram a expressão $3x + 24 = 42$.
Questionar se poderiam escrever $x + x + x + 24 = 42$, e a partir disso tentar encontrar um valor para x que torne a igualdade verdadeira.</td></tr>
<tr><td colspan="2">4) E se no lugar do 42 fosse 120.</td></tr>
<tr><td colspan="2">a) Escreva uma expressão matemática que representa esse valor.</td></tr>
<tr><th>Ações do aluno</th><th>Ações do professor</th></tr>
<tr><td>Escreve $100 + 20 = 120$ ou outra soma que resulte 120, mas que não corresponda aos valores utilizados na escada de números.</td><td>Questionar como ficaria a expressão que representa o 120 no topo da escada.
Pedir para que escrevam 120 no topo da escada e expliquem como seria obtido o 120 nessa escada, quais casas devem ser somadas.
Questionar o que mudaria em relação à expressão escrita na questão 2.</td></tr>
<tr><td>Escreve $24 + 3x = 120$.</td><td>Questionar como chegaram nessa expressão.</td></tr>
<tr><td colspan="2">b) O valor de x seria o mesmo? Qual seria o valor de x para que essa expressão que você escreveu no item anterior seja verdadeira?</td></tr>
<tr><th>Ações do aluno</th><th>Ações do professor</th></tr>
<tr><td>Escreve que sim.</td><td>Questionar qual é o valor e porque é o mesmo.
Questionar, se substituindo o x pelo valor encontrado na questão 3 na escada de números, obteriam o 120 no topo da escada.</td></tr>
<tr><td>Escreve que não é o mesmo.</td><td>Questionar qual é o valor e porque não é o mesmo.</td></tr>
</table>

Escreve que $x = 32$.	Pedir para que expliquem como encontraram o valor que o x deve assumir se o 120 estiver no topo da escada. Questionar como chegaram nesse valor.
Escreve que $x = 84$ ou outro valor diferente de 32.	Pedir para que substituam o x por 84 na escada e verifiquem se, no topo da escada, vai resultar em 120. Sugerir que desenhem uma nova escada mudando somente o topo do valor e tentem preencher.
5) Qual seria o valor de x se no topo da escada fosse -36?	
Ações do aluno	Ações do professor
Escreve que $x = \ -20$.	Questionar como encontraram esse valor.
Escreve um valor para x diferente de -20.	Pedir para que substituam o x pelo valor encontrado na escada e verifiquem se, no topo da escada, vai resultar em -36. Sugerir que desenhem uma nova escada, mudando somente o topo por -36 e tentem preencher o restante das *casas*.
Escreve, por exemplo, que $-56 + 20 = -36$, e a partir dessa expressão, tenta obter um valor para x.	Questionar, se substituindo esses valores nas casas em branco abaixo do topo, o restante da escada vai fechar; Sugerir que desenhem uma nova escada mudando somente o topo por -36 e tentem preencher o restante das *casas* conforme pensaram, e se consegue obter o valor para x.
Não saber começar.	Questionar qual expressão representa como o -36 no topo da escada. Questionar como são encontrados os valores das outras *casas* em branco e solicitar que escrevam as expressões. Questionar o que x representa na nova expressão obtida, igualando a -36 e como poderiam encontrar esse valor.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Após o quadro de antecipações, seguiu-se para o planejamento das fases das aulas assentes no EEM, e da mesma forma que na primeira tarefa, foram estabelecidos alguns critérios para selecionar as resoluções dos grupos que fariam a apresentação das suas ideias para a turma durante a fase de *Discussão da tarefa*. Foi optado por selecionar as resoluções dos grupos que apresentassem diferentes estratégias de resolução, incluindo as incorretas, da tarefa *Escada de Números II*, para contribuir com o momento de discussão coletiva.

Na questão 1 foram selecionados os grupos que chegaram na expressão $7 + 3 = 10$ ou $3 + 7 = 10$, ou algum outro tipo de resolução correta ou incorreta, para que os grupos pudessem comparar e discutir as resoluções.

Para a questão 2 foram selecionados os grupos que apresentassem nas resoluções: (i) equações equivalentes a $24 + 3x = 42$; (ii) uma igualdade que representa o 42 nessa escada de números, mas não uma equação; (iii) uma igualdade ou uma expressão numérica, mas que não estava de acordo com essa escada de números; (iv) somente uma expressão algébrica, por exemplo, $24 + 3x$, sem utilizar o sinal de "=" e o 42; e (v) utilizaram o sinal de igual de forma incorreta.

Na questão 3 foram selecionados os grupos que: (i) apresentaram diferentes maneiras de resolução, encontrando, de alguma maneira, $x = 6$; e (ii) não chegaram na solução correta. Esses critérios foram estabelecidos para que, na fase de *Discussão da tarefa*, pudesse ser discutida a estratégia utilizada por cada grupo, e se não encontraram a solução correta, por que isso aconteceu e como poderiam corrigir.

De modo semelhante à questão 2, na questão 4, item a, foram escolhidos grupos que apresentaram: (i) equações equivalentes a $24 + 3x = 120$; (ii) uma igualdade que representa o -36 nessa escada de números, mas não uma equação; (iii) uma igualdade ou uma expressão numérica, mas que não estava de acordo com essa escada de números; (iv) somente uma expressão algébrica, por exemplo, $24 + 3x$, sem utilizar o sinal de "=" e o 120; e (v) utilizaram o sinal de igual de forma incorreta em suas resoluções. Já na questão b foram selecionadas diferentes estratégias de resolução para a equação $24 + 3x = 120$ ou alguma equação equivalente, estando corretas ou não, e grupos que fizeram por tentativas. Esses critérios foram estabelecidos para que, no momento da discussão, os estudantes pudessem compartilhar ideias, aproximar as resoluções, compreender que a equação possui uma única solução, e que esse valor muda se a equação mudar, pois mesmo que a letra que representa o valor desconhecido seja a mesma, a equação não é a mesma, por isso a solução é outra. Também foi discutido o que aconteceria se o valor desconhecido fosse representado por outra letra.

Para a última questão, 5, foram selecionadas as resoluções dos grupos que apresentaram: (i) equações equivalentes a $24 + 3x =- 36$; (ii) diferentes estratégias de resolução para a equação $24 + 3x =- 36$ ou alguma equivalente, chegando em uma solução correta ou não; (iii) chegaram na solução $x =- 20$ por tentativas; e (iv) trocaram o sinal do -36 ou da solução da equação. Esses critérios foram adotados para que pudessem ser discutidos novamente os tipos de estratégias de resolução correta, caso houvesse, se a equação estava correta e possíveis confusões feitas em relação ao sinal dos números por envolver operações com números negativos.

Também ficou estabelecido que seria importante tentar selecionar ao menos uma vez cada grupo para apresentar suas resoluções, para que todos se envolvessem nas discussões e não se sentissem excluídos. Além disso, poderiam ser selecionadas resoluções não previstas nesses critérios, de acordo com a produção da turma.

Considerações Finais

Inicialmente, houve dificuldades para encontrar ou adaptar materiais para a elaboração de tarefas que estivessem alinhadas à perspectiva do EEM e permitissem trabalhar com os estudantes a ideia de equações como igualdades entre duas expressões, envolvendo uma incógnita. Essas dificuldades surgiram por diversos motivos, sendo um deles a necessidade de que as tarefas possibilitassem que os estudantes construíssem e explorassem a ideia de uma equação como uma igualdade entre duas expressões, em que um ou mais valores são desconhecidos. Em outras palavras, não era objetivo apresentar primeiro a definição de equação, exemplos e formas de resolução. O objetivo era que eles chegassem a essa ideia de equação abordando principalmente o significado do sinal de "=" como igualdade entre duas expressões, e a ideia de incógnita.

Então, foram realizadas novas buscas por tarefas envolvendo equações do primeiro grau. Primeiro foram pesquisados materiais utilizados em trabalhos já publicados e livros didáticos, mas foram encontrados somente alguns tipos de tarefas que não atendiam aos nossos objetivos de aula nem à perspectiva do EEM. Os tipos de tarefas encontrados inicialmente faziam o uso da balança de dois pratos, o que se reconhece como uma boa estratégia para explicar a questão de igualdade. Porém, ela não atinge as equações com um todo, visto que não é possível explicar e atribuir significado às soluções das equações com resultado negativo, sendo essa atribuição de significados ligada aos princípios do pensamento algébrico. Em alguns livros, as tarefas propostas vinham após a explanação da definição das equações e de estratégias de resolução, limitando o nível cognitivo utilizado para resolução da tarefa, tomando como base que os estudantes haviam se apropriado dessas definições e explicações e seguindo um ensino mecanizado, sem atribuição de significados.

Continuando as buscas, foi encontrada uma questão da OBMEP que nos chamou a atenção, e a partir dela iniciou o processo de (re)elaborar as tarefas, teste piloto, discutir no grupo de pesquisas, realizar outro teste das versões finais, elaborar o quadro de antecipações e o plano de aula, buscando seguir as características e propósitos do EEM.

Na elaboração deste trabalho, é fundamental destacar a importância da cooperação, tanto na elaboração das tarefas quanto no planejamento, que envolve não só os autores principais desta pesquisa, mas o GEPTEMatE. O EEM é uma perspectiva de ensino que, apesar de colocar o estudante como foco central das aulas, exige do professor um trabalho criterioso e desafiador, pois a aprendizagem que se pretende que os estudantes atinjam está atrelada ao papel ativo do estudante e às (re)ações do professor antes e durante as aulas.

A construção das tarefas acontece após definidos os objetivos de ensino. Para que esses objetivos sejam alcançados por meio da realização das tarefas e demais fases das aulas, é essencial a realização de algumas ações que antecedem as aulas, como a resolução das tarefas por parte do professor, antes de propor aos estudantes. e os testes das tarefas favorecem o planejamento das aulas.

Durante o planejamento, a elaboração de um quadro de antecipação é o que subsidiará as (re)ações do professor em relação às (re)ações dos estudantes durante a realização das tarefas, pois mesmo que ela seja bem elaborada, a maneira como o professor faz as intervenções com os estudantes é crucial para atingir os objetivos de ensino. Ainda é preciso considerar que podem surgir (re)ações dos estudantes não previstas no planejamento, assim como outros imprevistos.

Sobre elaboração das tarefas e dos planos de aulas pautados no EEM, foi constatado que demanda tempo considerável, e que se compararmos com o tempo que os professores das escolas possuem em seu cotidiano de trabalho, destinado à preparação de aulas, infelizmente esse tipo de preparo torna-se muito mais difícil.

Durante as discussões coletivas das tarefas, o professor precisa estabelecer conexões entre o que os estudantes já sabem e novos conceitos a serem explorados e sistematizados, por isso a importância do planejamento completo.

No entanto, acredita-se que é preciso começar, planejar e desenvolver aulas pautadas no EEM. Embora seu começo possa ser um trabalho árduo, ele pode ser simplificado, de acordo com as experiências do professor. Assim, as dificuldades dos professores não estão somente atreladas ao tempo necessário para planejamento de aulas assentes no EEM, mas também às poucas pesquisas envolvendo essa perspectiva de ensino, principalmente com os Anos Finais do Ensino Fundamental, considerando a grande diversidade de conteúdos matemáticos nessa etapa da Educação Básica. Portanto, há necessidade de mais pesquisas sobre o EEM, abordando planejamentos, relatos de experiências, banco de tarefas e a divulgação desses materiais para que cheguem tanto na formação inicial quanto continuada de professores.

Sobre o planejamento de aulas que favoreçam o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Finais do Ensino Fundamental, também se percebe que é um campo ainda pouco explorado. Conforme esta pesquisa, o desenvolvimento do pensamento algébrico, seja ele no que é possível desenvolver a partir dos estudos de equações do primeiro grau ou de outros objetos matemáticos, vai além de somente uma tarefa.

Para o desenvolvimento do pensamento algébrico, é preciso proporcionar aos estudantes experiências que contribuam com esse desenvolvimento ao longo dos anos de escolaridade (Kaput, 2008). As aprendizagens de equações do primeiro grau contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico, assim como o desenvolvimento do pensamento algébrico contribui para lidar com as equações do primeiro grau, por isso se faz necessário um trabalho contínuo ao longo das aulas e até mesmo dos anos escolares. Portanto, esse planejamento de aulas assentes no EEM visou a ofertar experiências que favorecessem a aprendizagem dos estudantes.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM.

Referências

ALMEIDA, J. R. de. **Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico**: um modelo para os problemas de partilha de quantidade. Tese de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática - UFRPE. Recife, 2016.

ARAÚJO, A. J. de. **O ensino de álgebra no Brasil e na França**: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

BLANTON, M. L.; KAPUT, J. J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education,** v. 36, n. 5, p. 412-443, 2005.

CANAVARRO, A. P. Ensino Exploratório da Matemática: Práticas e desafios. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 115, p. 11-17, 2011.

CANAVARRO, A. P.; OLIVEIRA, H.; MENEZES, L. Práticas de Ensino Exploratório da Matemática: o caso de Célia. *In*: SANTOS, L. (Ed.). **Investigação em Educação Matemática**: Práticas de ensino da Matemática. Portalegre: SPIEM, p. 255–266, 2012.

COELHO, F. U; AGUIAR, M. A história da álgebra e o pensamento algébrico: correlações com o ensino. **Estudos Avançados**, v. 32, n. 94, p. 171-187, 2018.

CYRINO, M. C. C. T.; OLIVEIRA, H. Ensino Exploratório e os Casos Multimídia na Formação de Professores que Ensinam Matemática. In: CYRINO, M. C. C. T. (Ed.) **Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática**: elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2016. p. 19-32.

CYRINO, M. C. C. T; TEIXEIRA, B. R. O Ensino Exploratório e a Elaboração de um framework para os Casos Multimídia. In: CYRINO, M. C. C. T. (Ed.). **Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática**: elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, 2016. p. 81-99.

FERNANDES, F. C. **Equações de 1º grau**: Estratégias e erros na resolução e simplificação de equações de 1º grau. Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática - Universidade de Lisboa, Portugal, 2011.

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA - IMPA. **Banco de questões da OBMEP**. Rio de Janeiro: IMPA, [s.d.]. Disponível em: https://www.obmep.org.br/bq.htm. Acesso em: 22 jan. 2025.

KAPUT, J. J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), **Algebra in the Early Grades** (pp. 5–17). New York, 2008.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education. University of Nothingam, Nothingam, 1992.

LOZADA, C. O.; D'AMBROSIO, U. Considerações sobre o conceito de equação presente nos cadernos do professor e as zonas de perfil conceitual de equação. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, [S. l.], v. 7, n. 14, p. 7–38, 2020. DOI: 10.33871/22385800.2018.7.14.7-38. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/rpem/article/view/6118. Acesso em: 5 abr. 2025.

PONTE, J. P. (Org.). **Práticas profissionais dos professores de Matemática**. Lisboa: IE, 2014, p. 237-257.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. *In*: GTI (Ed.), **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM. p. 11-34, 2005.

RADFORD, L. Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: **Anais do Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.** Lyon – França, 2009.