emd Ensino da Matemática em Debate

DOI:https://doi.org/10.23925/2358-4122.74495

Tópicos da História e da Filosofia da Matemática: discussões e reflexões

Topics in the History and Philosophy of Mathematics: discussions and reflections

Adriana Santos Morgado[1]

Barbra Candice Southern[2]

Bernardo Fernandes Cruz[3]

Debora Ferreira Ricardo[4]

Verônica Freires da Silva[5]

Sonia Barbosa Camargo Igliori[6]

RESUMO

Este artigo apresenta e analisa as discussões desenvolvidas ao longo da disciplina Tópicos da História e da Filosofia da Matemática, cursada no segundo semestre de 2025 no doutorado em Educação Matemática da PUC-SP. O texto tem como objetivo refletir sobre a constituição histórica, filosófica e epistemológica do conhecimento matemático e suas implicações para a Educação Matemática, articulando diferentes referenciais teóricos e experiências formativas. As análises fundamentam-se, principalmente, nas obras Conceitos Fundamentais da Matemática, de Bento de Jesus Caraça, e Introdução à Filosofia da Matemática, de Bertrand Russell, além de textos de Ubiratan D'Ambrosio e contribuições contemporâneas discutidas em aula. A partir da perspectiva histórica, o artigo discute a construção dos campos numéricos — naturais, racionais e irracionais — como respostas a problemas concretos de contagem e medida, evidenciando o caráter dinâmico e não linear do desenvolvimento matemático. A noção de generalização, apresentada por Caraça, é analisada como motor da evolução científica, destacando o papel da negação da negação na superação de limites conceituais. Questões como o infinito, a incomensurabilidade de grandezas e a continuidade da reta são abordadas como exemplos de rupturas que impulsionaram avanços teóricos significativos. No campo da Filosofia da Matemática, o texto enfatiza as contribuições de Russell e da axiomatização proposta por Peano, discutindo o conceito de número como classe de classes e a importância das relações biunívocas

[1]. Assistente Técnica Educacional em Formação Docente na SME de São Paulo e doutoranda em Educação Matemática na PUC/SP. E-mail: addryanna@gmail.com

[2]. Professora de Matemática na UERJ e doutoranda em Educação Matemática na PUC/SP. E-mail: barbrasouthern@gmail.com

[3]. Professor de Matemática na UERJ e doutorando em Educação Matemática na PUC/SP. E-mail: bernardocruz1@gmail.com

[4]. Professora de Matemática no Colégio Franciscano Nossa Senhora Aparecida e doutoranda em Educação Matemática na PUC/SP. E-mail: debora.ricardo30@gmail.com

[5]. Coordenadora de Programas Educacionais, Tutora na Formação Docente EaD na SME de Guarulhos e doutoranda em Educação Matemática na PUC/SP. E-mail: veronica.cemead@gmail.com

[6] Professora do curso de doutorado que motivou o artigo. Doutora em Matemática pela PUC-SP, com dois estágios pós-doutorados realizados na França. O 1º sobre Didática de Análise Matemática, foi realizado durante 1 ano, junho de 1995 a agosto de 1996, na Universidade Paris VII com assessoramento de Michèle Artigue e o 2º durante 7 meses, janeiro de 2017 a agosto de 2018, com pesquisas referenciadas na Teorias da Abordagem Documental, na Escola Normal Superior de Lyon acompanhada por Luc Trouche.

para a definição matemática. Essas reflexões são articuladas com a crítica de D'Ambrosio ao ensino tradicional da Matemática, defendendo a integração entre História, Filosofia e prática pedagógica como forma de problematizar o ensino por esses pontos de vista e promover o pensamento crítico. Além disso, o artigo apresenta a análise de uma experiência didática baseada no problema de Galileu, evidenciando o potencial da história da matemática e da experimentação para favorecer aprendizagens significativas na Educação Básica. Conclui-se que a História e a Filosofia da Matemática constituem meios fundamentais na formação de professores, ao possibilitar uma compreensão da Matemática como produção cultural, histórica e social, ampliando o sentido do ensinar e aprender matemática.

Palavras-chave: *História da Matemática; Filosofia da Matemática; Educação Matemática; Pensamento Matemático; Formação de Professores.*

ABSTRACT

This article presents and analyzes the discussions developed throughout the course Topics in the History and Philosophy of Mathematics, taken in the second semester of 2025 within the Doctoral Program in Mathematics Education at PUC-SP. The text aims to reflect on the historical, philosophical, and epistemological constitution of mathematical knowledge and its implications for Mathematics Education, articulating different theoretical frameworks and formative experiences. The analyses are primarily grounded in the works Fundamental Concepts of Mathematics by Bento de Jesus Caraça and Introduction to the Philosophy of Mathematics by Bertrand Russell, as well as in texts by Ubiratan D'Ambrosio and contemporary contributions discussed during the course. From a historical perspective, the article examines the construction of numerical fields—natural, rational, and irrational numbers—as responses to concrete problems of counting and measurement, highlighting the dynamic and non-linear character of mathematical development. The notion of generalization, as presented by Caraça, is analyzed as a driving force of scientific evolution, emphasizing the role of the negation of negation in overcoming conceptual limitations. Issues such as infinity, incommensurability, and the continuity of the number line are addressed as examples of ruptures that fostered significant theoretical advances. Within the field of the Philosophy of Mathematics, the text emphasizes the contributions of Russell and the axiomatization proposed by Peano, discussing the concept of number as a class of classes and the importance of one-to-one correspondences for mathematical definition. These reflections are articulated with D'Ambrosio's critique of traditional mathematics teaching, advocating the integration of History, Philosophy, and pedagogical practice as a means to humanize teaching and promote critical thinking. In addition, the article analyzes a didactic experience based on Galileo's problem, highlighting the potential of the history of mathematics and experimentation to foster meaningful learning in Basic Education. It is concluded that the History and Philosophy of Mathematics constitute fundamental tools in teacher education, as they enable an understanding of mathematics as a cultural, historical, and social production, broadening the meaning of teaching and learning mathematics.

Keywords*: History of Mathematics; Philosophy of Mathematics; Epistemology; Mathematical Knowledge; Teacher Education.*

Introdução

Este texto tem como objetivo descrever e analisar as discussões realizadas no segundo semestre de 2025 durante a disciplina Tópicos da História e da Filosofia da Matemática, ministrada pela Profa. Dra. Sonia Barbosa Camargo Igliori no curso de doutorado em Educação Matemática, oferecido pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Essa disciplina visa discutir questões sobre a natureza e formação do pensamento matemático, segundo correntes da Filosofia e tópicos da historiografia e epistemologia da História da Matemática que refletem na Educação Matemática.

Para tratar dessas discussões filosóficas, os principais referenciais teóricos adotados foram as obras *Conceitos Fundamentais da Matemática* de Bento Caraça *e Introdução à Filosofia da Matemática* de Bertrand Russell. Além disso, também foram discutidos o artigo *Priorizar História e Filosofia da Matemática na Educação de Ubiratan D'Ambrósio* e o vídeo *O que é a Filosofia da Matemática?* (2022), com Oswaldo Chateaubriand.

Caraça (1951) e Russell (1974) apresentam análises do desenvolvimento histórico e conceitual da Matemática, partindo das necessidades concretas do homem e culminando na estrutura lógica que sustenta essa Ciência. Nesse sentido discutiu-se o aparecimento dos números naturais, racionais e irracionais, destacando-se como cada conjunto surge da insuficiência do anterior.

> A Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto totalmente diferente - descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições. (Caraça, 1951, xxiii).

A Filosofia da Matemática

O que é Matemática? Como foram criados os teoremas e axiomas? O que é um número? Quem os criou? Ou, para que eles foram criados? O que a História nos conta sobre tais fatos? Em que partes a Filosofia contribuiu com os avanços da Matemática?

Para Chateaubriand (2022) a Matemática sempre foi uma preocupação central que despertou o interesse de grandes filósofos como Descartes, Leibniz e Kant, por exemplo, e que pode ser entendida como um estudo de "coisas" que até hoje não são muito justificadas e que têm sido debatidas ao longo dos séculos, conforme demonstra a História.

A fundamentação teórica da Matemática se deu a partir do século XIX, com Dedekind e Freg, com questões importantes como o conjunto dos números irracionais, reais e a questão da continuidade. A Filosofia foi essencial nessa fundamentação, logo, podemos dizer que os filósofos da Matemática pensaram epistemologicamente na natureza dos problemas de Matemática.

E é nesse sentido que D'Ambrosio (2011), em seu artigo *Priorizar História e Filosofia da Matemática na Educação,* traz uma reflexão sobre como o ensino da Matemática tem sido conduzido nas escolas e sobre a importância de reconectar esse conhecimento às suas origens históricas, filosóficas e culturais. O autor defende uma matemática contextualizada, vista como parte da cultura humana, e propõe repensar o papel do professor e o sentido de aprender matemática.

Ao sugerir que se ensine Matemática, e não apenas a Matemática, D'Ambrosio (2011) destaca a diferença entre compreender como o conhecimento é construído e não apenas reproduzir conteúdos prontos. Essa distinção traz implicações pedagógicas importantes: o ensino deve ir além da transmissão de fórmulas e técnicas, promovendo experiências que ajudem o estudante a entender como e por que os conceitos surgiram. Assim, a História e a Filosofia da Matemática tornam-se caminhos para desenvolver o pensamento crítico e criativo.

Para o autor, compreender a Matemática exige reconhecer a continuidade entre passado, presente e futuro. O conhecimento matemático resulta de processos históricos ligados às necessidades humanas em diferentes contextos. Dessa forma, o ensino da matemática não é neutro, mas envolve dimensões sociais, culturais e políticas. Essa visão rompe com a ideia de uma matemática universal e abstrata, mostrando-a como um saber construído historicamente e influenciado por ideologias.

D’Ambrosio (2011) também aponta que, ao longo do tempo, a História da Matemática foi usada para afirmar identidades e ideologias. Ao discutir diferentes formas de interpretar a história, como as abordagens internalistas, externalistas e marxistas, ele mostra que o modo como contamos essa história afeta diretamente o modo como ensinamos. Assim, o professor é visto como um mediador cultural, capaz de dar novos significados ao conhecimento matemático.

Inspirado em Hans Freudenthal, D’Ambrosio (2011) defende que a História e a Filosofia da Matemática façam parte da formação dos professores, destacando os processos de criação, as motivações e os fatores sociais que impulsionam o desenvolvimento dos conceitos. Perguntas como “Por que isso não foi descoberto antes?” ou “Por que essa descoberta foi importante?” ajudam a compreender a Matemática como uma atividade humana, marcada por erros, revisões e criatividade. Essa visão humanizadora mostra que fazer matemática é também fazer cultura.

Ao incluir a Filosofia da Matemática, o autor ressalta a importância de refletir sobre o próprio ato de criar Matemática. Para ele, a criação matemática nasce da imaginação e da capacidade de sonhar, aspectos que envolvem emoção e estética. Essa ideia aproxima-se de Paulo Freire, ao propor uma Matemática que desperte curiosidade, sensibilidade e consciência crítica. Ensinar matemática, portanto, é também promover autonomia intelectual e emancipação social.

Os números naturais: O problema da Contagem

Caraça (1951) inicia pela ação mais elementar e, ao mesmo tempo, mais universal: contar. O autor mostra que a contagem nasce de uma necessidade vital e social. Essa observação rompe com a ideia de que os números são entidades abstratas existentes desde sempre. Eles emergem da prática cotidiana e se transformam ao longo da história, acompanhando o desenvolvimento das relações sociais. Na aula, Igliori destacou como esse início, escrito por Caraça (1951), dialoga com a concepção de Ubiratan D’Ambrosio sobre a etnomatemática, que reconhece o conhecimento matemático como uma produção cultural, fruto da interação entre o homem e o seu ambiente.

Assim, as discussões sobre números começam com uma questão aparentemente simples: Como resolveram os homens o problema da necessidade da contagem?

Para Caraça (1951), pela criação dos números naturais

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

que mais adiante teve a inclusão do zero para representar o nada

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

O zero, por exemplo, é apresentado como uma invenção audaciosa do pensamento, "uma das maiores aventuras da razão". Essa expressão, retomada em aula, revela o caráter criador da mente humana diante de suas próprias abstrações.

Não se sabe ao certo quando esses números foram criados, mas é possível afirmar que os homens primitivos não conheciam esses números como conhecemos hoje. Isso ocorre pelo fato de que a evolução dos números se deu a partir das necessidades de seu uso, isto é, à medida que os povos progrediram, foi emergindo a demanda por contagens mais refinadas.

Assim, contar é estabelecer uma correspondência entre dois conjuntos, um de objetos que se deseja contar e outro de números que constituem uma sucessão natural envolvendo a ideia de antecedente e consequente. Essa maneira de pensar o antecedente e o consequente é o que chamamos de lei de correspondência. Quando a correspondência estabelecida entre conjuntos, como os acima referidos, for um a um ou biunívoca, isto é, uma correspondência que associa a cada elemento do primeiro conjunto um e somente um elemento do segundo e vice-versa. O número associado nessa correspondência é o número de elementos quando o conjunto é finito. Exemplo; se consideramos os conjuntos A={*} $e\ B\ =\ $ {**}. Existe uma correspondência um a um entre o conjunto A e o conjunto de números {1}. Dizemos então, que o conjunto A possui um elemento e pelas mesmas razões que o número de elementos do conjunto B é 2.

A Lei de correspondência é fundamental para a compreensão dessa discussão. Assim, o número natural é abstração de uma relação de equivalência entre coleção de objetos finitos. E a partir dessa noção de correspondência Caraça (1951) reconstrói o caminho da contagem de conjuntos finitos com um número tão grande de elementos como queiramos. Ou seja, podemos pensar em contar sem parar, pois haverá em correspondência um conjunto de Naturais para se atrelar um número de elementos de um determinado conjunto. Essa ideia de sem parar leva à noção de infinito em potencial. E essa noção despertou outro questionamento, seria possível, então, fazer uma anatomia do infinito? O infinito aparece não como algo metafísico, mas como consequência lógica do princípio de extensão, no caso do potencial: se posso sempre acrescentar uma unidade, então não há fim.

Assim, o infinito foi, ao mesmo tempo, um limite e uma liberdade do pensamento. Igliori recupera a ideia de que a consideração de conjuntos infinitos descontruiu a relação existente entre o todo e suas partes: que o todo é sempre maior do que as partes. E trouxe outro ramo para a Matemática, a Transfinita.

A exemplo da contagem entre os conjuntos finitos os matemáticos definiram entre os conjuntos infinitos a noção de enumerável ou contável, aquele conjunto que é equivalente (existe uma correspondência biunívoca entre ele e o conjunto dos Naturais). Assim são contáveis o próprio Natural (existe a identidade, correspondência biunívoca). Pode-se provar, facilmente, que os números pares, os ímpares, qualquer subconjunto infinito e próprio dos Naturais são enumeráveis. É até bem compreensível, apesar de Galileu ter ficado inconsolável com essa situação. Como assim um subconjunto infinito e próprio de outro conjunto pode ser equivalente a ele? Fora da compreensão humana.

Mas fácil de tender pela Matemática. Basta, no caso do subconjunto P dos pares, pensar assim. O conjunto P é infinito, mas está contido propriamente em N.

A função $f: N \Rightarrow P$, tal que $f(n)= 2n$ é injetora e sobrejetora. Logo $N \approx P$

Um pouco mais complicado, mas encontra-se em livros de Análise é demonstrar que o conjunto Q dos racionais é enumerável. Mas que isso o conjunto dos números algébricos que são os racionais e mais infinitos irracionais como por exemplo como $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{7}$ etc, é enumerável. Mais que isso toso os irracionais construtíveis são enumeráveis.

Essa situação levou Cantor a considerar outros números chamados transfinitos e buscar algo assemelhado à numeração de conjuntos finitos. Um conjunto enumerável seria o "menor" dos conjuntos infinitos. A definição de número de elementos recebeu um equivalente denominado cardinal de um conjunto que indicamos por card, $|\ \ |$. O conjunto dos naturais e todos os enumeráveis receberam um cardinal denominado *aleph-zero*[7]. O conjunto dos Irracionais e dos Reais ganharam um cardinal chamado *c* de *contínuo*. Estabeleceu-se um Hipótese do Contínuo de que entre aleph e c não existe um outro cardinal.

Voltando à construção dos números, pode-se entender que o conjunto dos números naturais é a primeira generalização do pensamento quantitativo, porém, ele não foi suficiente para exprimir todas as relações que estabelecidas no cotidiano.

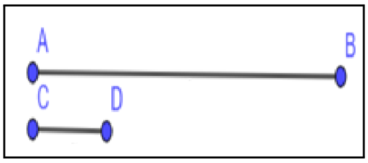
Os números racionais: O problema da Medida

No segundo capítulo, o autor apresenta a construção do campo racional (conjunto dos números racionais). Para isso usa a operação da medição. Mas o que significa medir? Com isso, a matemática vai se constituindo a partir de desafios cotidianos.

Caraça (1951), parte do raciocínio em que medir consiste em comparar duas grandezas de mesma espécie, dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, entre outras. Para medir é necessário, então, estabelecer duas medidas diferentes e compará-las. Por exemplo, na Figura 1, temos os segmentos $\underline{AB}$ e $\underline{CD}$ que vamos comparar.

Figura 1 – Segmentos $\underline{AB}$ e $\underline{CD}$

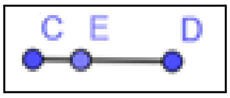
[7] O conceito *aleph-zero* ($\aleph_0$) foi introduzido pelo matemático Georg Cantor, que criou a teoria dos números transfinitos para comparar o tamanho de conjuntos infinitos e representa a cardinalidade (o "tamanho") do conjunto dos números naturais. Ele é o menor número cardinal infinito.



Fonte: Autores 2025.

A partir disso, algumas perguntas podem ser feitas: *quantos* $\underline{CD}$ *cabem em* $\underline{AB}$*?* Para determinar quantos segmentos $\underline{CD}$ cabem em $\underline{AB}$, designamos $\underline{CD}$ como a unidade *u,* e o segmento $\underline{CE}$ como u'. Desta maneira: $\underline{CD} = u$ e $\underline{CE} = u'$. Temos portanto que: $\underline{AB}$ = 4u = 12u' e $\underline{AB} = 4 = \frac{12}{3}$ como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Segmento $\underline{CD}$ contendo o ponto E.



Fonte: Autores 2025.

De modo geral, a medida de uma grandeza expressa em uma unidade ou um número inteiro *m*, pode ser subdividida em *n* partes iguais, representada pela expressão:

$$m = \frac{m.n}{n}$$

É a partir deste conhecimento que o processo de medição envolve três passos essenciais: escolher a unidade de medida, comparar essa unidade com a grandeza e expressar o resultado da comparação por meio de um número.

Importante ressaltar que, conforme Caraça (1951), quando a divisão entre grandezas não apresenta resto, o resultado é um número natural, e identifica-se que "o primeiro é múltiplo do segundo".

Do ponto de vista teórico, considerando as reflexões internalistas e externalistas, surge o seguinte questionamento: será que esse tipo de situação acontece "sempre"?

Será que sempre existirá uma medida em que, ao dividir uma grandeza pela outra, o resultado não apresentará resto? Caraça (1951), nos mostra o "caso embaraçoso", afirmando que nem sempre será possível realizar esse tipo de medida com resultado zero. É nesse contexto que se evidencia a impossibilidade dentro do campo numérico conhecido até um determinado momento, ao responder a esse questionamento apenas com a utilização dos números inteiros.

A construção do novo campo numérico dos racionais se deu então pela limitação do campo numérico dos inteiros positivos ou naturais. Para prosseguir, foi considerado dois números inteiros, m e n, com n diferente de zero. Quando m é divisível por n, obtém-se um terceiro número denominado quociente; caso contrário, nega-se a existência desse número.

Avançar nesse raciocínio se deu pela formulação de generalizações a partir da negação dessa negação, ou seja, a superação do impasse gerado pela divisão com resto. O objetivo desse processo foi justamente construir o conceito do número fracionário, um passo fundamental na ampliação do campo numérico, conforme descrito por Caraça (1951, p. 38)

Segundo Caraça (1951), o caminho da generalização passa por três etapas: o reconhecimento da dificuldade, a determinação do ponto nevrálgico onde essa dificuldade reside — a negação — e, finalmente, a negação dessa negação para alcançar um novo entendimento.

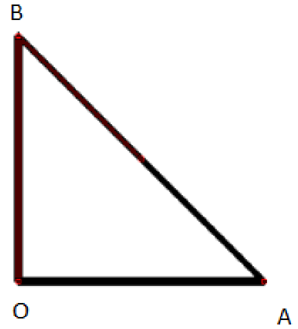
Em suma, este é o caminho das ciências: para alcançar uma evolução rumo a um estado superior, é fundamental utilizar a negação da negação. A construção do campo dos números racionais representa, assim, um movimento de superação crucial. Trata-se de um momento de transição importante que evidencia o caráter dinâmico da matemática, na qual o pensamento se expande sem perder o que já existia. Dessa forma, o novo campo numérico incorpora o anterior, ao mesmo tempo, em que o transcende.

Os números racionais: A crítica ao problema da Medida

No terceiro capítulo Caraça (1951), propõe uma reflexão crítica sobre o instrumento de medição e sobre os limites do próprio campo racional. Ele introduz o famoso “caso embaraçoso”: o problema da incomensurabilidade entre as medidas dos catetos e da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles BOA, com catetos como unidade de medida.

Temos, assim, um “caso embaraçoso” apresentado por Caraça (1951, p. 49). O autor propõe uma reflexão sobre o limite do campo dos números racionais a partir de uma situação aparentemente simples. Determinar a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles BOA, tomando como unidade o cateto AO, conforme a Figura 3.

Figura 3 – Triângulo Retângulo BOA



Fonte: Autores 2025.

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$AB^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 . OA^2$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$$

$$m^2 = 2n^2$$

Temos um número par. $\frac{m}{n}$ é irredutível e m^2 é um número par. O quadrado de um número par tem que ser par. O quadrado de todo número ímpar é ímpar. Logo, m é par e n é ímpar. Não dá para ser n par e ímpar ao mesmo tempo, e isto é uma monstruosidade matemática. Caraça (1951) apresenta quatro possíveis soluções para esta encruzilhada, sendo elas:

1) Abandonar a possibilidade de exprimir numericamente, sempre, a medida de um segmento.
2) Abandonar o teorema de Pitágoras.

3) Conservar a definição do conjunto dos números racionais e o teorema de Pitágoras, mas abandonar a exigência da sua compatibilidade lógica.
4) Conservar tudo, mas admitir que um mesmo número possa ser simultaneamente par e impar. (Caraça, 1951, p. 51).

O terceiro caminho é aquele que deve ser seguido. Para explicar o novo conjunto numérico, Caraça (1951) recorre ao Axioma, ou postulado, da continuidade da reta de Dedekind-Cantor: "Todo corte da reta é produzido por um ponto da reta, isto é independentemente do corte (A,B) da reta, sempre existe um ponto dessa reta que separa as duas classes A e B do corte." Dedekind pensou em um conceito genial. Ele criou o conceito de corte. Considerando um ponto P da reta. O conjunto de todos os elementos que estão à esquerda desse ponto chama-se de conjunto A (classe) e aqueles que estão à direita de conjunto B. A cada ponto P eu tenho duas classes. Um corte constitui duas classes.

De acordo com Caraça (1951, p. 59), nenhum ponto da reta escapa à divisão, sendo que todo ponto pertencente à classe A está à esquerda da classe B. Quando essa condição é satisfeita, a classe resultante constitui o ponto P. A construção do corte possibilita que qualquer ponto da reta defina um corte.

Sendo A o conjunto de todos os números racionais cujo quadrado é menor que dois, conclui-se que n não é racional. Surge, então, um vazio — um intervalo não preenchido dentro do conjunto dos racionais. O conjunto dos números racionais, portanto, não é contínuo. Ao abordar essa descontinuidade, resolve-se a ausência de biunivocidade entre a reta e os pontos que a compõem. Assim, todo corte da reta dos racionais que não possui elemento de separação corresponde a um número irracional.

Um pouco mais de História

O quarto capítulo funciona como um respiro e um retorno às origens. Caraça (1951) revisita a história das ideias matemáticas, mostrando como cada conceito está vinculado às condições sociais e filosóficas de sua época. Ele recupera as preocupações dos pensadores jônicos, de Heráclito e dos pitagóricos, mostrando que a busca pela inteligibilidade do universo sempre esteve associada à tentativa de organizar o caos do real por meio das leis matemáticas. Em aula, Igliori relacionou essa discussão com o texto de Bertrand Russell (1974), que distingue a Matemática como ciência dedutiva da Filosofia da Matemática como reflexão sobre seus fundamentos. Essa aproximação ajuda a compreender o que Caraça (1951) propõe "*uma filosofia da matemática viva, enraizada na experiência humana*".

A "harmonia dos contrários", evocada por Heráclito e retomada por Caraça (1951), aparece como metáfora para o próprio movimento do pensamento científico. O conhecimento não progride de forma linear, mas por contradições, rupturas e superações. O contínuo e o discreto, o finito e o infinito, o racional e o irracional são pares que se interpenetram e se complementam na construção do saber. Igliori, nas discussões sobre esse capítulo, ressaltou como o olhar histórico-filosófico permite compreender o sentido do desenvolvimento matemático não apenas como acúmulo de técnicas, mas como transformação cultural e cognitiva.

A fundamentação teórica da Matemática por Bertrand Russell

Assim como outros filósofos e matemáticos, Bertrand Russell (1974) contribuiu significativamente para a consolidação da Filosofia da Matemática ao buscar fundamentos lógicos rigorosos para os conceitos numéricos, como verificamos no trabalho escrito por Caraça (1951). Em diálogo com a obra de Peano, Russell (1974) reconhece na formalização dos axiomas da Aritmética um marco para a compreensão estrutural da Matemática como sistema dedutivo.

Em sua análise, desenvolvida sobretudo nos *Principia Mathematica*, Russell (1974) demonstra que toda a Aritmética pode ser derivada de princípios lógicos básicos, deduzidas das propriedades dos números, reforçando a tese logicista de que a Matemática é, em essência, uma extensão da lógica.

Assim, compreender os conceitos primitivos e as proposições formuladas por Peano é também compreender o ponto de partida da investigação filosófica de Russell (1974) sobre a natureza do número e da demonstração matemática.

Os três conceitos primitivos da aritmética de Peano são: zero, número e sucessor. E, por "sucessor", ele entende o número seguinte na ordem natural. Isso equivale a dizer que o sucessor de 0 é 1, o sucessor de 1 é 2, e assim sucessivamente. Por "número", entende-se, nesse caso, a classe dos números naturais (Russell, 1974, p. 12).

Continuando com suas afirmações, Peano não pressupõe que conheçamos todos os números dessa classe, mas apenas que compreendamos o significado do que é ser um número. As cinco proposições primitivas adotadas por Peano são:

> 1) 0 é um número;
> 2) O sucessor de qualquer número é um número;
> 3) Não há dois números com o mesmo sucessor;
> 4) 0 não é sucessor de número algum;
> 5) Qualquer propriedade que pertença a 0, e ao sucessor de todo número que possua essa propriedade, pertence a todos os números. (Russell, 1974, p. 13).

Essa última proposição constitui o princípio da indução matemática (indução finita), que podemos entender como a definição do conjunto dos números naturais.

No que se refere à questão "o que é número?", por muitos séculos essa pergunta foi base de grandes discussões, respondida por Frege, em 1884, em seu livro *Grundlagen der Arithmetik*. Ao definir número, foi crucial distinguir entre número e pluralidade: pluralidade se refere a coleções, enquanto número é a característica comum dessas coleções agrupadas. O exemplo dado foi o número 3, que não é igual a um trio específico de pessoas, mas sim o que caracteriza todas as coleções de três elementos. Essa distinção, embora pareça simples, foi frequentemente negligenciada pelos filósofos.

Russell (1974) destaca que "um número é algo que caracteriza certas coleções, isto é, aquelas que têm aquele número" (p. 18).

Ao invés de falar em "coleção", o autor utiliza "classe" ou "conjunto", também chamado de "agregado" ou "multiplicidade". Uma classe pode ser definida de duas formas: por extensão, quando se enumeram seus elementos (ex.: Brown e Robinson), e por intenção, quando se especifica uma propriedade comum (ex.: habitantes de Londres). A definição intensional foi considerada mais fundamental, pois toda definição por extensional[8] pode ser reduzida a uma intensional, enquanto o contrário nem sempre é possível. Segundo Russell (1974) complementa ainda:

> (...) número é um modo de reunir certas coleções, isto é, as que têm um dado número de termos (...) Cada coleção é uma classe cujo membros são

[8] Extensão: uma edição, classe ou conjunto, que pode ser definido por dois tipos distintos. Intensão: quando se apresenta a classe por meio de uma propriedade definida.

> coleções, isso é classes; assim, cada uma é uma classe de classes (...) e a coleção inteira é uma classe infinita de membros (Russell, 1974, p. 21).

E a partir dessa premissa reflete: "como decidir se duas coleções são pertencentes à mesma coleção?" A resposta que foi admitida seria comparar a quantidade de seus membros, agrupando-as e verificando suas similaridades. No entanto, Russell (1974) ressalta a importância de, nesse ponto da discussão, já saber o que são "números" e como "contar elementos", o que é uma operação logicamente complexa e só funciona bem para coleções finitas, algo que deve ser considerado no decorrer desse estudo.

No entanto, como a definição de número não deve assumir que todos os números são finitos, e contar depende dos números, logo, não podemos usar a contagem para definir números sem cair em contradição. Em vez disso, Russell (1974), afirma que é mais simples determinar se duas coleções têm a mesma quantidade de elementos verificando se há uma relação "um-para-um" entre elas, como no exemplo da quantidade de maridos e esposas, que são iguais porque cada marido corresponde a uma esposa (relação biunívoca de Caraça).

Russell (1974) apresenta a relação de similaridade da seguinte maneira: "uma classe é dita 'similar' a outra quando há uma relação de um-para-um, da qual uma classe é o domínio, enquanto a outra é o domínio inverso" (Russell, 1974, p.23). Nesse sentido, o senso comum é que duas classes finitas têm o mesmo número de termos se são similares, mas não em caso contrário.

O ato de contar consiste, então, em estabelecer uma correlação de um-para-um entre o conjunto de objetos contados e os números naturais (excluindo 0) usados no processo. Consequentemente estabeleceram-se as seguintes definições: "o número de uma classe é a classe de todas as classes similares a ela" e "um número é qualquer coisa que seja o número de alguma classe" (Russell, 1974, p. 24 e 25).

Russell (1974) apresenta essa definição de número para determinar as coleções finitas, e posteriormente, passará a provar se essa definição também serve para as coleções infinitas. Pensar sobre cada um desses termos e conceitos é necessário para estabelecer a relação em outras situações.

O Problema de Galileu

Por fim, também trazemos outro momento importante de aprendizagem proposto por Igliori durante as aulas. A leitura do artigo *"Introdução a uma vivência científica na Educação Básica a partir do problema de Galileu"* de CERQUETTI-ABERKANE (1999) nos instigou a experimentar e argumentar sobre as diferentes possibilidades da resolução do problema.

Nesse artigo, CERQUETTI-ABERKANE (1999) apresenta uma vivência na aula de Matemática, para alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental, em Paris. O objetivo foi verificar as habilidades matemáticas na resolução de problemas a partir do problema histórico de Galileu, que questiona a comparação de volumes entre dois cilindros.

Para isso, a professora da turma propõe uma sequência de atividades, para envolver os alunos numa abordagem científica e reflexiva. Essas atividades incluem a comparação prática dos volumes de dois cilindros formados por dois retângulos de mesmas dimensões. Esse foi, inicialmente, um questionamento dado por camponeses e que Galileu decidiu verificar por meio de cálculos do raio desses dois cilindros a partir do perímetro do círculo e uma estimativa do valor de π com ferramentas simples, como fios e materiais manuais, medindo a área das bases e os volumes.

No artigo discute-se então a experimentação dos alunos ao desenvolver o senso crítico, estimulando hipóteses, confrontando resultados e formulando explicações matemáticas fundamentadas. Os resultados apresentados nos mostraram que os alunos se engajam ativamente, demonstram interesse e curiosidade, e desenvolvem uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos ao relacioná-los com experimentos e a História da Matemática.

Além disso, a pesquisa evidenciou que integrar a história e a prática experimental realizada por crianças e adolescentes pode facilitar a aprendizagem e tornar os conceitos matemáticos mais acessíveis e significativos para os alunos.

Considerações Finais

As investigações desenvolvidas ao longo da disciplina Tópicos da História e da Filosofia da Matemática permitiu refletir sobre a constituição histórica, filosófica e epistemológica do conhecimento matemático e suas consequências na Matemática que conhecemos hoje. Fundamentadas nas obras de Caraça, Russell, D'Ambrosio e outras contribuições contemporâneas, essas reflexões evidenciaram a construção dos campos numéricos naturais, racionais e irracionais, como respostas a necessidades concretas de contagem e medida, ressaltante da não linearidade do desenvolvimento histórico e social da Matemática.

A análise da noção de generalização como motor da evolução científica e o estudo de temas como infinito, incomensurabilidade e continuidade da reta demonstram como rupturas conceituais impulsionam avanços teóricos. Na Filosofia da Matemática, a axiomatização de Peano e a concepção de número como classe de aulas, articuladas com a crítica ao ensino tradicional de D'Ambrosio, reforçam a importância da integração entre História, Filosofia e prática para humanizar o ensino e estimular o pensamento crítico.

A experiência didática baseada no problema de Galileu evidenciou o potencial da História da Matemática e da experimentação para promover aprendizagens significativas na Educação Básica. Dessa forma, conclui-se que a História e a Filosofia da Matemática são instrumentos essenciais na formação de professores, pois possibilitam compreender a Matemática como uma produção cultural, histórica e social, ampliando o sentido e a profundidade do ensinar e aprender matemática.

Destaca-se, ainda, que a integração da História e da Filosofia da Matemática como disciplina do doutorado em Educação Matemática contribuiu para a formação de pesquisadores, ao valorizar os processos históricos e sociais envolvidos e estimular a curiosidade e o aprofundamento sobre a construção dos conceitos matemáticos. Espera-se, com este artigo, enaltecer a importância de adotar o estudo da História e da Filosofia da Matemática na formação de professores, incentivando práticas pedagógicas que promovam uma visão crítica e contextualizada ao ensino e na aprendizagem da Matemática.

Recebido em: editora
Aprovado em: editora

Referências

CARAÇA, Brito de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa. Sá da Costa, 1951.

CERQUETTI-ABERKANE, Françoise. ***Introduction à une Démarche Scientidique em Primaire à partir du Problème de Galilée.*** IUFM de Créteil, centre de Bonneuil. Reperes - IREM. Nº35. 1999.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Priorizar história e filosofia da matemática na educação. *In:* **Revista Tópicos Educacionais**, v. 18, n. 1-2, p. 159-175, 2012.

RUSSELL, Bertrand. **Introdução à Filosofia da Matemática**. Zahar Editores. Rio de Janeiro, 1974.