

DOI: <https://doi.org/10.23925/2358-4122.74537>

Uma análise praxeológica das tarefas sobre lançamento oblíquo nos livros didáticos de física e matemática: possibilidades de interdisciplinaridade

A praxeological analysis of tasks on oblique launch in physics and mathematics textbooks: possibilities for interdisciplinarity

Fabiana Venhoven Martins¹

Barbara Lutaif Bianchini²

RESUMO

Este artigo apresenta a análise praxeológica das tarefas sobre lançamento oblíquo presentes nos livros didáticos de matemática e física mais adotados pelas escolas da rede pública e institutos federais pelo PNLD de 2022, vigente até 2025. O livro didático foi escolhido como objeto de estudo por ser retratado por diversos autores como um dos principais recursos da prática docente. O objetivo desta pesquisa é analisar se alguns pressupostos da Teoria Antropológica do Didático - as técnicas, tecnologias e teorias esperadas para realização de tarefas de mesmo tipo - possuem convergências ou divergências quando tratadas no livro de matemática e no livro de física. Entendemos que as convergências favorecem o reconhecimento do mesmo objeto do conhecimento em diferentes contextos e a articulação de conhecimentos de uma área para a outra. As divergências fornecem indicativos para melhorias na produção de materiais didáticos e na formação de professores, visando um ensino apoiado na interdisciplinaridade. Nossa análise conclui que, mesmo em tarefas de mesmo tipo envolvendo o lançamento oblíquo, os livros analisados empregaram técnicas, tecnologias e teorias distintas, nas quais não era possível articular conhecimentos de uma área para a outra. Essa divergência ocorre em consequência das diferentes informações fornecidas para a realização das tarefas – enquanto o livro de física fornece grandezas vetoriais, o livro de matemática fornece a expressão algébrica da função. Ao final de nossa análise, apresentamos uma proposição de interdisciplinaridade para uma das tarefas, com o objetivo de relacionar as grandezas vetoriais envolvidas em uma determinada tarefa às suas possíveis funções. Cabe ressaltar que os livros analisados estão em conformidade com as competências e habilidades definidas pela Base Nacional Comum Curricular.

Palavras-chave: Lançamento oblíquo; Livro didático; Interdisciplinaridade; Análise praxeológica.

ABSTRACT

This article presents the praxeological analysis of the tasks on oblique launch present in mathematics and physics textbooks most adopted by public schools and federal institutes by PNLD 2022, in force by 2025. The textbook was chosen as an object of study because it was portrayed by several authors as one of the main resources of teaching practice. The purpose of this research is to analyze whether some assumptions of the didactic anthropological theory - the expected

¹ Doutoranda do curso de Educação Matemática na Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP. E-mail: fabianavanhoven@gmail.com

² Doutora em Educação pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, e professora de pós-graduação em Educação Matemática pela mesma universidade. E-mail: barbaralb@gmail.com

techniques, technologies and theories to perform the same tasks - have convergences or divergences when dealt with in the mathematics book and in the physics book. We understand that convergences favor the recognition of the same object of knowledge in different contexts and the articulation of knowledge from one area to another. Divergences provide indications for improvements in the production of teaching materials and teacher education, aiming at a teaching supported by interdisciplinarity. Our analysis concludes that, even in the same -kind tasks involving the oblique launch, the analyzed books employed different technologies, technologies, and theories, in which it was not possible to articulate knowledge from one area to another. This divergence occurs as a result of the different information provided for the accomplishment of tasks - while the physics book provides vector quantities, the mathematical book provides the algebraic expression of the function. At the end of our analysis, we present a proposition of interdisciplinarity for one of the tasks, with the objective of relating the vector quantities involved in a given task to their possible functions. It is noteworthy that the books analyzed are in accordance with the skills defined by the Common National Curriculum Base.

Keywords: *Oblique launch; Textbook; Interdisciplinarity; Praxeological analysis.*

Introdução

O presente artigo é um recorte de uma tese em andamento desenvolvida pela primeira autora e orientada pela segunda, que tem por objetivo investigar as diferentes abordagens matemáticas presentes nos livros didáticos de física e de matemática brasileiros para o ensino da cinemática e funções.

Nossa principal motivação é investigar objetos do conhecimento apresentados em ambos os livros – neste artigo, especificamente, o lançamento oblíquo – e analisar sob à luz da Teoria Antropológica do Didático se possuem convergências ou divergências nas suas técnicas, tecnologias e teorias, e se favorecem o estabelecimento de relações entre os conhecimentos presentes nos livros e o reconhecimento pelos estudantes do mesmo objeto do conhecimento em diferentes contextos.

Esta pesquisa se focaliza nos livros didáticos, que é apenas um dos muitos recursos possíveis de serem analisados em relação ao ensino. Outros percursos de pesquisa poderiam analisar a prática docente ou a formação docente, por exemplo. Nossa escolha se baseou na análise dos livros didáticos brasileiros pois estes são, muitas vezes, o principal instrumento utilizado pelos professores no ensino, conforme Silva (2012), Dante (1996) e Lajolo (1996).

Diversos autores que têm o livro didático como central em suas pesquisas, e abordam temas como sua produção e distribuição, sua avaliação por professores ou instituições, ou análise de temas específicos do currículo, concordam que o livro didático conduz a ação docente, determinando o currículo, a sequência, o ritmo e a profundidade dos assuntos, como apresentado adiante.

Silva (2012) menciona a primazia do livro didático entre os recursos didáticos utilizados na grande parte das salas de aula, e sugere que isso ocorre devido a dificuldades como a precarização do trabalho docente e formação insuficiente. Dante (1996, p. 83-84) corrobora com as dificuldades apontadas por Silva, afirmando que “o professor tem muitos alunos, afazeres e atividades extracurriculares que o impedem de planejar e escrever textos, problemas interessantes e questões desafiadoras, sem a ajuda do livro didático”. E também “para professores com formação insuficiente em matemática, um livro didático correto e com enfoque adequado pode ajudar a suprir essa deficiência”.

Lajolo (1996) reforça o papel assumido pelo livro didático, e no poder dele ser decisivo para a qualidade do aprendizado:

Sua importância aumenta ainda mais em países como o Brasil, onde uma precaríssima situação educacional faz com que ele acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina (Lajolo, 1996, p. 4).

O estudo de Silva (2012) aponta que, especialmente a partir de 2005, os pareceristas do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) têm dado especial atenção ao manual do professor, reconhecendo a importância desse material na formação docente. Isso sugere que a dependência dos professores em relação ao livro didático é reconhecida em níveis institucionais, refletindo sua relevância no contexto educacional.

A importância do livro didático na prática docente não é uma realidade exclusivamente brasileira. Os autores suecos Johansson e Österholm (2023) retratam em sua pesquisa, focada na análise dos livros didáticos, que ele é um recurso primário para o planejamento de aulas pelos professores e para a prática de tarefas pelos alunos, tanto em matemática quanto em física.

Isto posto, entendemos que a análise do livro didático deve contemplar grande parte do material utilizado pelos professores no ensino e uma parte relevante de sua prática.

Os resultados apresentados neste artigo podem ser utilizados para a formação de professores, tanto inicial quanto continuada, e produção de materiais didáticos, apoiando professores e autores no desenvolvimento de um trabalho interdisciplinar dos objetos de conhecimento ‘lançamento oblíquo’ e ‘função quadrática’. A abordagem interdisciplinar de tais objetos do conhecimento tem por objetivo incentivar ou facilitar a articulação de conhecimentos, na qual o aluno pode aplicar conhecimentos e estratégias da matemática

em contextos da física, e vice-versa, e que deveria ser favorecida pelos livros didáticos adotados.

Estudos realizados por Pietrocola (2002), Planinic *et al.* (2012) e Johansson e Österholm (2023) trazem a percepção, como um senso comum e apontado por muitos professores, de que as dificuldades dos alunos no aprendizado da física se devem, em grande parte, à sua insuficiente base matemática.

Tais autores reiteram que os conhecimentos matemáticos são também indispensáveis para a física, mas que precisamos de uma análise mais profunda sobre as relações que a física mantém com a matemática (Pietrocola, 2002), e que, talvez, precisamos reconhecer que a matemática na física pode ser diferente da matemática na matemática (Redish; Kuo, 2015 *apud* Johansson; Österholm, 2023).

O estudo de Planinic *et al.* (2012) desmistifica a hipótese de que a matemática é a principal causa das dificuldades dos alunos no aprendizado de física. Ao analisar questões que envolviam os mesmos conhecimentos matemáticos – a inclinação de retas representadas em planos cartesianos –, os alunos obtiveram desempenho melhor nas questões apresentadas no contexto matemático, em comparação às questões apresentadas no contexto da física. Seus resultados refutam a ideia de que a matemática é o principal obstáculo no aprendizado da física, e apresentam outras análises pertinentes a esse problema. E conclui afirmando que reconhecer a matemática em um contexto diferente requer uma boa compreensão do contexto em questão, o que muitas vezes é falha.

Pietrocola (2002) ainda afirma que o currículo do Ensino Médio é organizado de forma articulada entre as disciplinas, sendo que os conhecimentos necessários como pré-requisito para uma disciplina, como a física, possam ser trabalhados por outra, a matemática. Essa articulação pode ser encontrada no ensino da cinemática, que se apoia em conhecimentos sobre funções. Pietrocola (2002) afirma que “não é incomum que professores se esmerem na interpretação física de problemas, chegando a esboçar soluções num formalismo matemático e digam: ‘daqui pra frente é só matemática e a solução completa disto vocês já aprenderam na outra disciplina’”. Tal afirmação corrobora as nossas próprias observações e evidencia uma compartmentalização dos conhecimentos: até aqui, é física; daqui para frente, é matemática.

Pietrocola (2002) declara que a matemática é a linguagem da física; é a maneira como estruturamos nossas ideias sobre o mundo físico. Por que então nos parece que essa linguagem não é única e clara para os estudantes ao estudarem questões, por exemplo,

sobre o lançamento oblíquo de um projétil nos livros de matemática e de física? Por que parecem ser escritas em “diferentes línguas”?

No estudo de Planinic *et al.* (2012), os autores observam que os alunos, ao estudar a inclinação da reta representada em um plano cartesiano, tanto em matemática quanto em física, podem não perceber necessariamente que estão estudando um mesmo conceito, e isso ocorre devido às diferenças de contexto. Citando ainda um estudo de Woolnough de 2000, revela que os alunos possuem resistência em aplicar seus conhecimentos matemáticos à física, e que estes operam em três contextos distintos: o mundo real, o mundo da física e o mundo da matemática, cada qual com diferentes características e sistemas de crenças.

As implicações didático-pedagógicas trazidas por Pietrocola tratam sobre a forma de apresentar a matemática nos cursos de física.

Se a matemática é a linguagem que permite ao cientista estruturar seu pensamento para apreender o mundo, o ensino da ciência deve propiciar meios para que os estudantes adquiram esta habilidade. Não parece que um mero domínio operacional dos conteúdos matemáticos seja capaz de permitir a incorporação de tal habilidade (Pietrocola, 2002, p. 105)

Pietrocola (2002) ainda afirma que esta habilidade não é inata aos alunos, mesmo os que já possuem um domínio operacional da matemática.

Entendemos que o desenvolvimento dessas habilidades pode ser potencializado na medida em que professores e seus materiais didáticos apresentem convergências, semelhanças e abordagens bidirecionais sobre objetos do conhecimento trabalhados pela física e pela matemática, como é o caso do lançamento oblíquo.

Procedimentos metodológicos para a seleção dos livros analisados

A escolha dos livros didáticos de matemática e física a serem analisados foi baseada nos livros mais adotados pelas escolas da rede pública e instituições federais, que em 2023 atendia à 87,2% dos alunos matriculados no ensino médio em todo o país, de acordo com dados do Censo Escolar divulgados pelo INEP – Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (2024).

De acordo com os dados estatísticos do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação³, os livros didáticos aprovados pelo PNLD e adquiridos em maior quantidade em 2022 para os componentes matemática e física, que abordam os temas funções e cinemática são:

- Prisma Matemática⁴: conjuntos e funções, ensino médio, de José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto Câmara de Sousa. Editora FTD. 2020.
- Multiversos⁵: ciências da natureza: movimentos e equilíbrios na natureza, ensino médio, de Leandro Pereira de Godoy, Rosana Maria Dell' Agnolo, Wolney Cândido de Melo. Editora FTD. 2020.

A coleção Prisma Matemática representa 45,6% dos livros de matemática adotados pelas escolas públicas de Ensino Médio participantes do PNLD em 2022, totalizando 6.638.668 livros. Esta coleção é composta por 6 volumes: conjuntos e funções, funções e progressões, geometria e trigonometria, sistemas, matemática financeira e grandezas, geometria, e estatística, combinatória e probabilidade.

A coleção Multiversos representa 36,5% dos livros de física adotados pelas escolas públicas de Ensino Médio participantes do PNLD em 2022, totalizando 5.282.557 livros. Também é composta por 6 volumes: matéria, energia e a vida, movimentos e equilíbrios na natureza, eletricidade na sociedade e na vida, origens, ciência, sociedade e ambiente, e ciência, tecnologia e cidadania. De acordo com a editora, não há uma ordem definida para a utilização dos volumes de ambas as coleções.

A escolha dos livros didáticos se baseia nos dados divulgados de 2022 pois eles retratam a escolha das escolas públicas pelos livros aprovados no PNLD do Ensino Médio de 2021. Nos anos subsequentes, as novas aquisições de livros têm por finalidade apenas a reposição do estoque de livros das escolas. Os livros adotados pelas escolas não sofrerão modificações até a aprovação de novos livros pelo PNLD para o Ensino Médio, previsto para adoção nos anos de 2026 a 2029 e, portanto, os livros selecionados acima ainda refletem os mais adotados no ano de 2025.

³ Informações disponíveis em <https://www.gov.br/fnde/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos>. Último acesso em 08/09/2024.

⁴ Livro para análise do professor disponível em <https://pnld.ftd.com.br/ensino-medio/matematica-e-suas-tecnologias/prisma-matematica/>. Último acesso em 20/09/2024.

⁵ Livro para análise do professor disponível em <https://pnld.ftd.com.br/ensino-medio/ciencias-da-natureza-e-suas-tecnologias/multiversos-ciencias-da-natureza/>. Último acesso em 20/09/2024.

Com os livros didáticos selecionados, apresentaremos a seguir o referencial teórico que subsidiou a análise de suas tarefas sobre lançamento oblíquo.

A Teoria Antropológica do Didático como referencial teórico

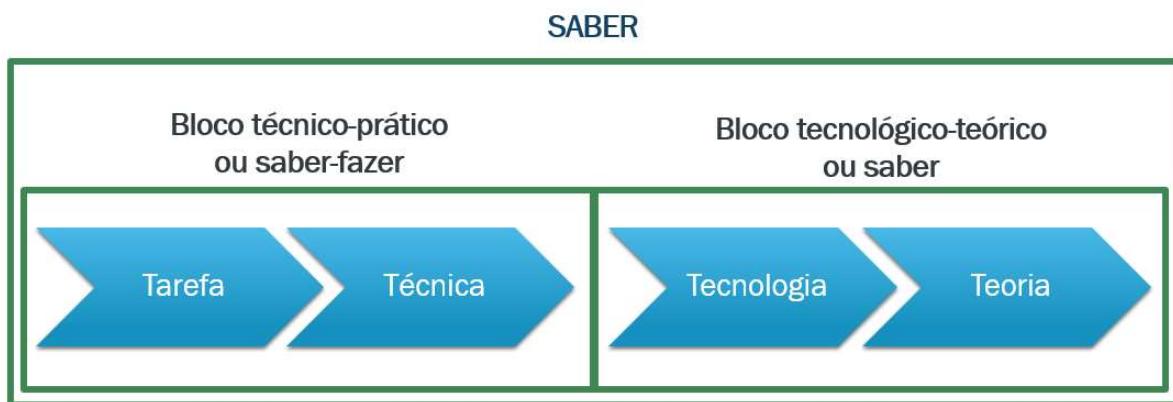
A Teoria Antropológica do Didático (TAD) foi desenvolvida por Yves Chevallard e tem origem na Teoria da Transposição Didática, que atualmente é uma subteoria da TAD.

A TAD estuda as condições, possibilidades e funcionamento de Sistemas Didáticos – que são as relações entre sujeito, instituição e saber. O termo antropológico se justifica pelo fato de o conhecimento ser estudado no âmbito do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais.

De acordo com Chevallard (2002, 2019), toda atividade humana, matemática ou não, consiste em cumprir uma tarefa, de certo tipo, por meio de uma técnica, explicada por uma tecnologia, que é justificada por uma teoria. Ou seja, toda atividade humana consiste na implementação de uma organização praxeológica, termo que será detalhado mais adiante.

De acordo com a teoria, o saber é composto por um bloco técnico-prático e um bloco tecnológico-teórico, conforme ilustrado na figura 1.

Figura 1 – O saber como organização de conhecimentos



Fonte: elaborado pela autora.

As tarefas são identificadas por um verbo de ação, que definem o gênero da tarefa, acrescida de um conteúdo em estudo, que define seu tipo. Exemplo: resolver uma equação polinomial de 2º grau, decompor um número em fatores primos.

A técnica é a “maneira de fazer” uma tarefa. Para uma determinada tarefa, geralmente existe uma técnica ou um número limitado de técnicas reconhecidas na instituição que a problematizou, embora possam existir técnicas alternativas em outras instituições. Para se produzir técnicas, é necessário que se tenham tarefas problemáticas, que estimulem o desenvolvimento de pelo menos uma técnica. Para uma técnica existir em uma instituição ela deve ser compreensível, legível e justificada (Almouloud, 2015).

Bloco técnico-prático ou um “saber-fazer”, ilustrado na figura 1, são as diferentes técnicas produzidas e organizadas que funcionam regularmente em uma instituição. O domínio do bloco técnico-prático é chamado de habilidade.

A tecnologia da técnica é o discurso lógico que dá suporte à técnica. Ela descreve e explica a técnica como uma maneira de cumprir corretamente uma tarefa. A teoria é o discurso amplo que justifica a tecnologia, e ambas formam o bloco tecnológico-teórico⁶ que compõem o saber.

A praxeologia ou organização praxeológica pontual é o conjunto de técnicas tecnologias e teorias organizadas para um determinado tipo de tarefa.

A um saber matemático podem ser associados dois tipos de praxeologias: as praxeologias matemáticas e as praxeologias didáticas. As praxeologias matemáticas referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida em uma sala de aula. Os tipos de tarefa são voltados à matemática. As praxeologias didáticas referem-se à maneira como se faz essa construção. Os tipos de tarefa são voltados para o estudo.

Toda prática institucional pode ser analisada sob diferentes pontos de vista e de diferentes perspectivas.

A análise ecológica de um saber identifica o *habitat* – o tipo de instituição na qual se encontra o saber relacionado ao objeto de estudo; e o nicho – a função desse objeto no sistema de objetos com os quais interage. Analisa diferentes questões: o objeto de saber faz parte das recomendações curriculares para a Educação Básica? Está presente nos

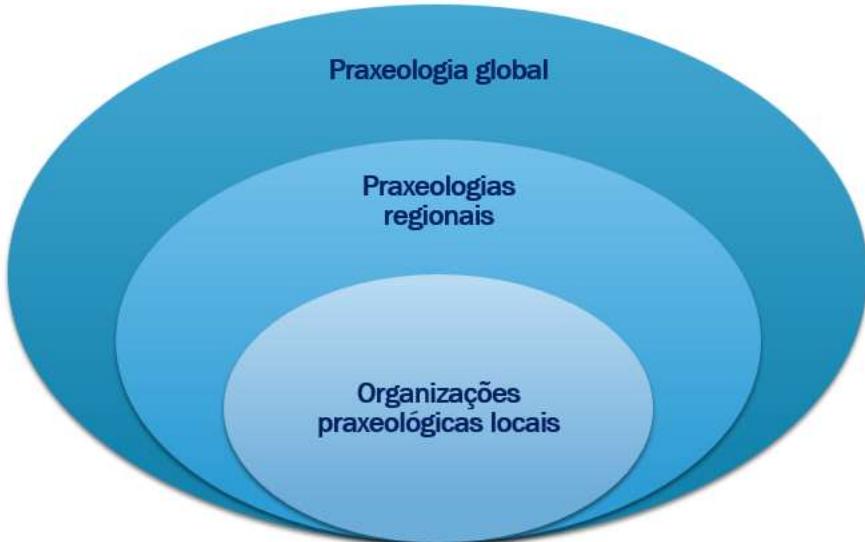
⁶ O bloco tecnológico-teórico também pode ser denominado como saber. Entretanto, para evitar ambiguidades em relação ao termo “saber”, o utilizaremos apenas quando nos referirmos ao saber como a união dos blocos técnico-prático e tecnológico-teórico.

livros didáticos? Como é apresentado e com qual finalidade? Ele é efetivamente trabalhado nas escolas?

A análise praxeológica é o método de análise de práticas institucionais. A organização praxeológica é a organização do saber, com seus respectivos blocos técnico-prático e tecnológico-teórico. E nesse sentido, a TAD proporciona suporte para a análise de livros didáticos, das tarefas, técnicas e tecnologias envolvidas nas organizações matemáticas e didáticas propostas pelos seus autores.

A organização praxeológica local consiste nas várias técnicas justificadas pelo mesmo saber. A organização praxeológica regional consiste em uma teoria, que justifica várias tecnologias, e consequentemente, vários blocos de tarefas. E por fim, a organização praxeológica global consiste em todas as teorias utilizadas em uma instituição – o complexo praxeológico, que reúne várias praxeologias regionais, conforme ilustrado na figura 2.

Figura 2 – Organizações praxeológicas



Fonte: elaborado pela autora.

Neste artigo são utilizados os pressupostos da TAD para a análise das tarefas presentes nos livros didáticos, enfocando suas organizações praxeológicas, e as praxeologias matemáticas e didáticas apresentadas por seus autores.

Análise praxeológica das tarefas sobre lançamento oblíquo e proposições para interdisciplinaridade

Lançamento oblíquo é todo lançamento de um projétil, em um local sujeito à ação da gravidade, segundo um ângulo α de lançamento (Godoy; Agnolo; Melo, 2020).

De acordo com Barreto Filho e Silva (2015), o lançamento de projéteis está associado ao movimento não vertical dos corpos nas proximidades da superfície, e o lançamento é oblíquo quando a direção do vetor velocidade inicial apresenta um ângulo entre 0 e 90 graus.

O lançamento oblíquo é um termo usualmente encontrado no campo da física que estuda os movimentos. Como esses movimentos apresentam trajetória parabólica, analisamos exemplos e exercícios presentes no livro de matemática que se enquadrasssem conceitualmente como lançamentos oblíquos no capítulo sobre função quadrática.

No quadro 1 contabilizamos as tarefas sobre lançamento oblíquo encontradas nos livros didáticos de física e matemática, apresentadas como exemplos resolvidos ou como exercícios para resolução pelos alunos.

Quadro 1 – Tarefas sobre lançamento oblíquo

Livro	Exemplos resolvidos	Exercícios	Localização do assunto
Física	1	1	Tema sobre Composição de Movimentos
Matemática	3	5	Capítulo sobre Função Quadrática

Fonte: Elaborado pela autora.

O livro didático de matemática faz uma aproximação conceitual entre as funções quadráticas e o lançamento oblíquo. Na introdução do capítulo, os autores afirmam: “Situações envolvendo trajetórias parabólicas, como lançamento de projéteis, podem ser modeladas por meio de funções quadráticas, assim como certos tipos de movimentos estudados pela física” (Bonjorno; Giovanni Júnior; Sousa, 2020, p. 112).

Ao final do capítulo, os autores apresentam em ‘História da Matemática’ uma página inteira sobre Galileu Galilei, mencionando sua experiência de um corpo em queda livre, citando brevemente a aceleração da gravidade, e a questão da amplitude do movimento de um pêndulo. Ao final do relato histórico não é apresentado nenhum

exemplo das situações mencionadas, nem qualquer conexão com os saberes apresentados no capítulo sobre Função Quadrática.

Em Multiversos, o livro de física analisado, o termo ‘função quadrática’ não é mencionado.

Nas tarefas analisadas, identificamos os tipos de tarefas apresentadas em cada um dos livros didáticos e, também, em qual contexto estavam inseridas, apresentadas no quadro 2 a seguir.

Quadro 2 – Tipos de tarefas e contextos das tarefas sobre lançamento oblíquo

Livro didático de física	Livro didático de matemática
Tipo de tarefas	
Alcance horizontal do projétil	Alcance horizontal do projétil
Altura máxima atingida pelo projétil	Altura máxima atingida pelo projétil
Tempo total de voo	Pontos da função
	Crescimento ou decrescimento da função em um intervalo de domínio
	Coordenadas do vértice da parábola
	Expressão algébrica da função que modela a trajetória
Contextos em que as tarefas são apresentadas	
Lançamento de projéteis	Lançamento de projéteis
Lançamento de bolinhas	Lançamento de bolas (ginástica rítmica, vôlei e futebol)
	Salto de animais (canguru e rã)
	Trajetória parcial de um avião
	Trajetória de um balão de ar quente

Fonte: Elaborado pela autora.

Os contextos em que o lançamento oblíquo é apresentado são mais diversos no livro de matemática, assim como os tipos de tarefa. Entretanto, ressaltamos que a pouca quantidade de exemplos e exercícios trazidos pelo livro de física prejudica a apresentação da situação ao aluno de forma mais diversa e aprofundada.

Analisaremos a seguir as técnicas empregadas nas tarefas de mesmo tipo apresentadas em ambos os livros didáticos: alcance horizontal e altura máxima do projétil. Assim, foram analisados 1 exemplo e 1 exercício no livro de física – a totalidade das tarefas apresentadas, e 2 exemplos e 4 exercícios no livro de matemática, que apresentam pelo menos uma das duas tarefas mencionadas.

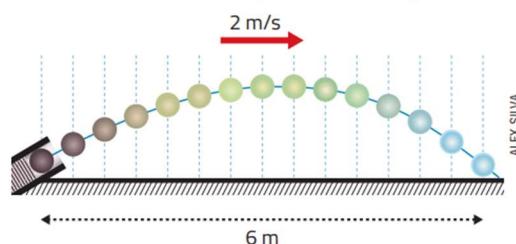
É fundamental observar que, apesar de termos os mesmos tipos de tarefas, as informações fornecidas sobre os problemas são distintas, conforme exemplificamos nas figuras 3 e 4.

- No contexto da física apresentam as informações dos vetores velocidade, decomposta em componentes horizontal e vertical, aceleração da gravidade e o deslocamento horizontal.
- No contexto da matemática apresentam a expressão algébrica da função quadrática, com a significação de suas variáveis dependente e independente, e eventualmente, o domínio da função e sua representação no plano cartesiano.

Figura 3 – Lançamento oblíquo no livro didático de física

4. Um lançador de bolinhas lança uma bola de tênis obliquamente em um local sujeito à aceleração da gravidade 10 m/s^2 e atinge o solo situado no mesmo nível do lançamento, a uma distância de 6 m. No ponto mais alto da trajetória, a velocidade da bola é 2 m/s, na horizontal, como mostra a figura. São desprezados os efeitos da resistência do ar.

- Qual é o tempo total de voo?
- Qual é a altura máxima atingida?



Fonte: Godoy; Agnolo; Melo (2020, p. 23).

Figura 4 – Lançamento oblíquo no livro didático de matemática

5. A altura do salto de um certo canguru, em relação ao solo, foi modelada por uma função quadrática expressa por $h(d) = -\frac{4}{5}d^2 + \frac{12}{5}d$, em que h é a altura do salto do canguru, em metro, e d é a distância horizontal percorrida no salto, também em metro.



- Os membros posteriores e a cauda do canguru possibilitam o impulso e a realização dos saltos.

 - Considerando essa função, determine a distância horizontal percorrida pelo canguru ao concluir o salto.
 - De acordo com essa função, qual é a altura máxima do salto desse canguru?

Fonte: Bonjorno; Giovanni Júnior; Sousa (2020, p. 126).

No quadro 3 detalhamos as técnicas utilizadas em cada livro didático para a resolução das tarefas sobre lançamento oblíquo, do tipo ‘determinar o alcance horizontal’ e a ‘altura máxima do projétil’.

Quadro 3 – Técnicas das tarefas sobre lançamento oblíquo

Livro didático de física	Livro didático de matemática
Técnicas	
A aceleração da gravidade como redução ou aumento da velocidade vertical proporcionalmente em relação ao tempo, sendo a altura máxima o ponto em que a velocidade vertical é nula, e simetria da trajetória.	Cálculo dos zeros da função, ou seja, os valores das variáveis independentes quando a variável dependente é nula.
A velocidade horizontal é definida como a razão entre alcance horizontal e tempo total. Determinação do alcance horizontal ou tempo total de voo pela proporcionalidade .	Cálculo da coordenada de y (variável dependente) do vértice da parábola.
A altura máxima do projétil é determinada a partir de uma representação funcional da velocidade em função do tempo, com domínio entre o início da trajetória até o alcance da altura máxima, ou seja, com velocidade vertical nula. A altura máxima alcançada é a medida da área do triângulo retângulo sob a função.	Leitura da representação da função no plano cartesiano, interpretação das variáveis apresentadas nos eixos e seus pontos.

Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, podemos observar que mesmo tarefas de mesmo tipo necessitam de técnicas diferentes, tornando evidente que cada área do conhecimento emprega uma técnica própria.

O discurso tecnológico-teórico adotado para as técnicas empregadas são apresentados a seguir:

- Física: Princípio da independência dos movimentos. Proporções: a velocidade é uma grandeza obtida a partir de uma razão entre distância e tempo. Função afim: a velocidade do projétil varia em função do tempo. Cálculo: função derivada e integral da função.
 - O emprego de noções de Cálculo para a obtenção da altura máxima alcançada pelo projétil não é demonstrado nem justificado no livro do aluno e nem no manual do professor.
- Matemática: Representação e leitura de funções no plano cartesiano. Função Quadrática, esboço de suas representações gráficas, valor mínimo e valor máximo. Polinômios do 2º grau: resolução de equações polinomiais do 2º grau, fórmula de Bhaskara.

- O autor sugere um vídeo que apresenta as origens da fórmula de Bhaskara e sua demonstração. Uma demonstração algébrica da fórmula para cálculo das coordenadas do vértice da parábola é apresentada.

Podemos concluir a partir das análises, que as questões presentes no livro de matemática analisado podem ser conceitualmente classificadas como lançamentos oblíquos, já que as situações apresentadas estão sujeitas à ação da gravidade. Entretanto, dentre os questionamentos a serem respondidos, as grandezas vetoriais velocidade e gravidade não são componentes necessários para as conclusões esperadas. Assim, as técnicas, tecnologias e teorias são distintas nessas tarefas, quando envolvem ou não as grandezas velocidade e gravidade.

Analizando as tarefas a partir das orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018), comparamos as habilidades específicas trazidas por cada área do conhecimento:

- Em Ciências da Natureza, a habilidade EM13CNT204: Elaborar explicações, previsões e cálculos a respeito dos movimentos de objetos na Terra, no Sistema Solar e no Universo com base na análise das interações gravitacionais, com ou sem o uso de dispositivos e aplicativos digitais (como *softwares* de simulação e de realidade virtual, entre outros), dá enfoque nas interações gravitacionais. Não há menção sobre o estudo das funções que modelam os fenômenos naturais.

Em matemática, duas habilidades específicas estão relacionadas com as tarefas analisadas:

- EM13MAT101: Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
- EM13MAT503: Investigar pontos de máximo ou mínimo de funções quadráticas em contextos da matemática financeira ou da cinemática, entre outros.

Nessas habilidades a serem desenvolvidas, há expressa a relação com a cinemática, mas estudada a partir da função quadrática. Não há na BNCC a orientação de se trabalhar as questões gravitacionais ou outras grandezas vetoriais na área de matemática.

Podemos concluir, a partir da análise das tarefas sobre lançamento oblíquo, que as tarefas apresentadas nos livros didáticos estão aderentes às orientações da BNCC.

Apesar de se tratar do mesmo objeto de saber – lançamento oblíquo, tarefas de mesmo tipo empregam técnicas, tecnologias e teorias distintas quando apresentadas no livro de matemática e de física. Cada qual fornece diferentes informações em sua problematização, de forma que as diferentes técnicas sejam empregadas. Podemos constatar que o bloco tecnológico-teórico de cada área molda as técnicas disponíveis para as tarefas, e as próprias tarefas.

O livro didático de matemática tenta estabelecer relações entre a cinemática e as funções, de forma conceitual apenas.

Entretanto, entendemos que os exemplos e exercícios trazidos pelos livros não favorecem o estabelecimento de relações entre função quadrática e lançamento oblíquo, mesmo para tarefas de mesmo tipo.

Acreditamos que o estabelecimento de relações entre tais conhecimentos se faz necessário, e deve ser construído nos dois sentidos: da matemática para a física e da física para a matemática, necessitando apresentar uma conexão em ambos os livros.

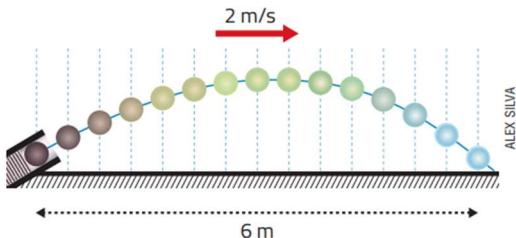
O livro de física poderia incluir exemplos e exercícios partindo do contexto da física – apresentando as grandezas vetoriais em sua enunciação, e finalizando na modelagem da função quadrática. Assim como o livro de matemática poderia apresentar exemplos e exercícios partindo do contexto da matemática – apresentando a expressão algébrica da função quadrática em sua enunciação, e finalizando na determinação das grandezas vetoriais (velocidades horizontal e vertical).

Apresentamos a seguir a resolução de uma das tarefas sobre lançamento oblíquo presente no livro de física, apresentada na figura 3 anteriormente, com a proposição, ao final, de conexão com a função quadrática.

Figura 3 – Lançamento obliquamente no livro didático de física

4. Um lançador de bolinhas lança uma bola de tênis obliquamente em um local sujeito à aceleração da gravidade 10 m/s^2 e atinge o solo situado no mesmo nível do lançamento, a uma distância de 6 m. No ponto mais alto da trajetória, a velocidade da bola é 2 m/s, na horizontal, como mostra a figura. São desprezados os efeitos da resistência do ar.

- a) Qual é o tempo total de voo?
 b) Qual é a altura máxima atingida?



Fonte: Godoy; Agnolo; Melo (2020, p. 23).

Resolução:

a) Velocidade horizontal = $\frac{\text{deslocamento horizontal}}{\text{tempo}}$

$$2 \text{ m/s} = \frac{6 \text{ metros}}{t \text{ segundos}}$$

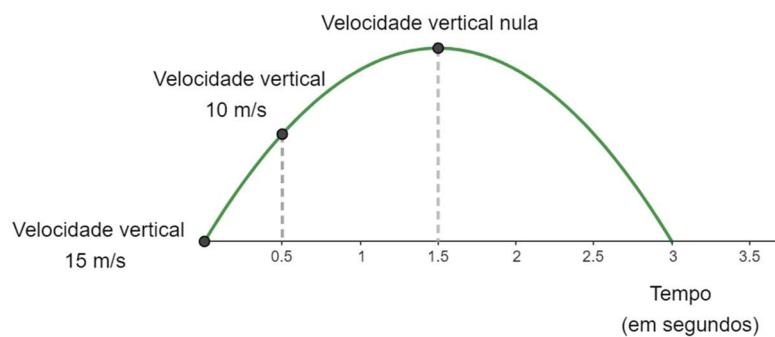
$$t = 3 \text{ segundos}$$

Técnica: A velocidade horizontal é definida como a **razão** entre alcance horizontal e tempo total. Determinação do alcance horizontal ou tempo total de voo pela **proporcionalidade**.

b) Tecnologia: a altura máxima se dá quando a velocidade vertical é nula.

A cada segundo, a velocidade vertical diminui 10 m/s até a altura máxima. Pela proporcionalidade em relação ao tempo, a velocidade vertical inicial é 15 m/s.

Figura 5 – Determinação da velocidade vertical inicial por proporcionalidade

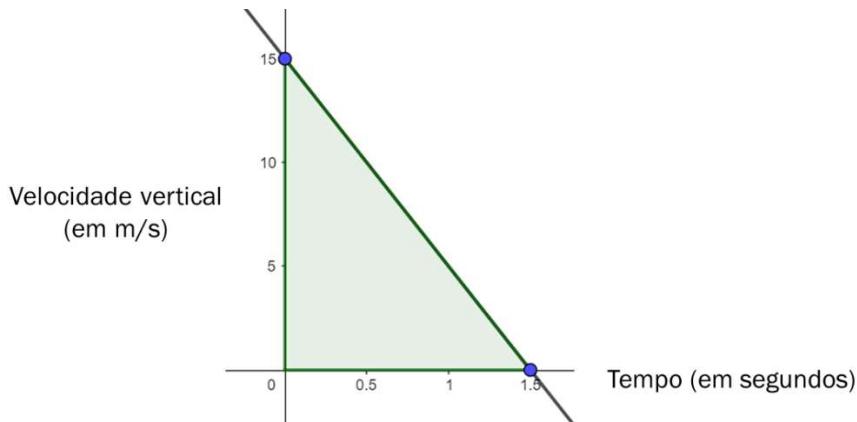


Fonte: Elaborado pela autora.

Técnica: A aceleração da gravidade como redução ou aumento da velocidade vertical proporcionalmente em relação ao tempo, sendo a altura máxima o ponto em que a velocidade vertical é nula, e simetria da trajetória.

Tecnologia: a altura máxima se dá pela medida da área do triângulo retângulo sob a função da velocidade vertical em função do tempo, com domínio dado pelo tempo inicial e o tempo em que se deu a altura máxima.

Figura 6 – Velocidade vertical em função do tempo em um intervalo de domínio



Fonte: Elaborado pela autora.

$$A = \frac{1,5 \cdot 15}{2} = 11,25$$

A altura máxima atingida foi de 11,25 metros.

Proposição:

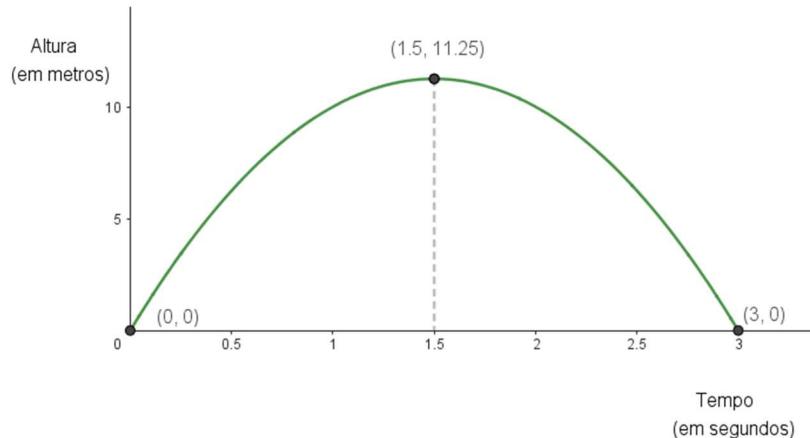
A partir da resolução das tarefas, podemos modelar duas funções quadráticas: i) altura do projétil em função do tempo, e, ii) altura do projétil em função do deslocamento horizontal.

Para a determinação de i) altura do projétil em função do tempo, utilizamos os três pares ordenados calculados anteriormente e apresentados na figura 7, substituindo suas coordenadas de x e y na definição da função quadrática f , dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ ⁷, e

⁷ Com a , b e c coeficiente reais, sendo a diferente de zero.

resolvendo o sistema de equações, obtemos a função h , dada por $h(t) = -5t^2 + 15t$, em que h é a altura, em metros, e t é o tempo, em segundos.

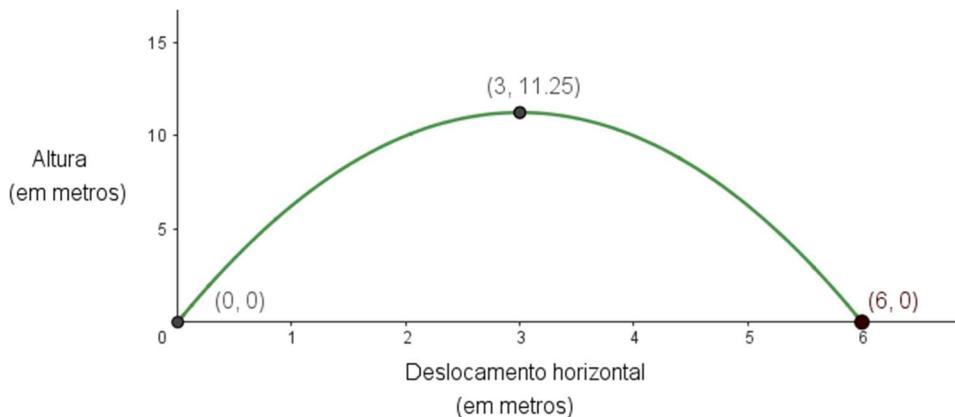
Figura 7 – Altura da bolinha em função do tempo



Fonte: Elaborado pela autora.

Para a determinação de ii) altura do projétil em função do deslocamento horizontal, utilizamos os três pares ordenados calculados anteriormente e apresentados na figura 8, e de maneira semelhante, obtemos a função h , dada por $h(d) = -1,25d^2 + 7,5d$, em que h é a altura, em metros, e d é o deslocamento horizontal, em metros.

Figura 8 – Altura da bolinha em função do deslocamento horizontal



Fonte: Elaborado pela autora.

Considerações Finais

O livro didático é o principal recurso para o planejamento das aulas da maior parte dos professores. Ele é utilizado como o documento base para o currículo a ser ensinado, delimitando o alcance e profundidade dos conteúdos, metodologia e ritmo a serem empregados no ensino, e até mesmo, como material de formação do professor (Silva, 2012; Dante, 1996; Lajolo, 1996; Johansson, Österholm, 2023).

Considerando toda a sua importância trazida pelos autores aqui citados, entendemos que o livro didático tem o potencial de nos sinalizar alguns aspectos do ensino.

Nossa análise procurou evidenciar as diferentes abordagens matemáticas presentes nos livros didáticos de matemática e de física para o mesmo objeto do conhecimento: o lançamento oblíquo.

Inicialmente, buscamos por autores em nossa pesquisa que retratassem as relações entre a matemática e a física em seus trabalhos. A partir de Pietrocola (2002), Planinic *et al.* (2012) e Johansson e Österholm (2023), concluímos que o senso comum afirma que a origem das dificuldades dos alunos no aprendizado de física se deve aos insuficientes conhecimentos matemáticos destes. Entretanto, os autores refutam o senso comum em suas pesquisas, afirmado que i) os conhecimentos matemáticos são necessários para a solução de situações no contexto da física, mas eles não garantem um bom desempenho na física; ii) a matemática na física pode ser diferente da matemática na matemática; iii) é necessário uma abordagem didático-pedagógica para desenvolver as habilidades para o uso da matemática na física; e iv) o conhecimento é compartimentado e os alunos não são, em geral, capazes de transferir o conhecimento da matemática para a física, e vice-versa – eles não conseguem reconhecer quando se trata do mesmo objeto do conhecimento apresentado em contextos distintos.

A partir destas constatações, investigamos se questões relacionadas ao lançamento oblíquo eram apresentadas nos livros didáticos de matemática e de física, de forma que fosse possível aos alunos reconhecer o mesmo objeto do conhecimento e utilizar conhecimentos da matemática na física e da física na matemática.

A análise dos livros didáticos se concentrou em questões, resolvidas pelo autor ou propostas para os alunos, que retratassem de situações de lançamento oblíquo, e apresentassem o mesmo tipo de tarefa, baseada nos pressupostos da análise praxeológica da TAD. Assim, analisamos 1 exemplo e 1 exercício no livro de física e 2 exemplos e 4

exercícios no livro de matemática que envolvessem as tarefas i) determinar o alcance horizontal do projétil, e/ou ii) determinar a altura máxima do projétil.

As conclusões obtidas a partir desta análise retratam que, apesar de se tratar do mesmo objeto do conhecimento, cada área do conhecimento apresenta suas próprias técnicas, tecnologias e teorias. Em nenhuma das situações apresentadas foi possível utilizar uma técnica apresentada no livro de matemática para uma questão apresentada no livro de física, ou o contrário. Isso ocorre porque, apesar do objeto do conhecimento ser abordado em contextos muito semelhantes nas questões, os dados enunciados eram completamente diferentes. Nas questões apresentadas no livro de física, os dados fornecidos para a resolução das questões incluíam aceleração da gravidade e grandezas vetoriais como a velocidade, decomposta em componentes horizontal e vertical, enquanto no livro de matemática era, em geral, fornecida a função quadrática em sua representação algébrica.

Essa situação faz com que o aluno considere as situações parecidas, pelos contextos, mas essencialmente diferentes do ponto de vista do conhecimento, não permitindo a articulação de conhecimentos e nem o reconhecimento do objeto do conhecimento subjacente às questões.

Por esse motivo, finalizamos nossa análise com uma proposição de abordagem interdisciplinar das questões, na qual a situação pode começar no contexto da física e finalizar na modelagem da função quadrática correspondente, assim como um problema pode se apresentar pela função quadrática e culminar na determinação da velocidade, ou dos vetores de velocidade horizontal e vertical.

Entendemos que assim favoreceremos a compreensão do objeto do conhecimento de uma maneira mais ampla, sendo ele reconhecido em diversas situações e contextos, e incentivando um olhar mais interdisciplinar para as atividades.

Recebido em: editora
Aprovado em: editora

Referências

- ALMOLOUD, Saddo Ag. **Teoria Antropológica do Didático: metodología de análise de materiais didáticos.** Unión Revista Iberoamericana de Educación Matemática. Número 42. Novembro de 2015. p. 09-34.
- BARRETO Filho, Benigno; SILVA, Claudio Xavier da. **360º: física aula por aula: partes 1, 2 e 3, volume único.** 3^a edição. São Paulo: FTD, 2015.
- BONJORNO, José Roberto; GIOVANNI Jr, José Ruy; SOUSA, Paulo Roberto Câmara de. **Prisma matemática: conjuntos e funções. Ensino médio. Área do conhecimento: matemática e suas tecnologias.** 1^a edição. São Paulo: Editora FTD, 2020.
- BRASIL. MEC. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília. 2018.
- CHEVALLARD, Yves. **Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions.** Actes de la 11 École d' Été de Didactique des Mathématiques. France: La Penseé Sauvage. 2002.
- CHEVALLARD, Yves. **Introducing the anthropological theory of the didactic: an attempt at a principled approach.** Hiroshima Journal of Mathematics Education. 12: 71-114, 2019.
- DANTE, Luiz Roberto. **LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA: uso ou abuso?** Em Aberto, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996.
- GODOY, Leandro Pereira de; AGNOLO, Rosana Maria Dell'; MELO, Wolney Cândido de. **Multiversos: ciências da natureza: movimentos e equilíbrios na natureza. Ensino médio.** 1^a edição. São Paulo: Editora FTD, 2020.
- INEP. **MEC e Inep divulgam resultados do Censo Escolar 2023.** 2024. Disponível em: <https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/censo-escolar/mec-e-inep-divulgam-resultados-do-censo-escolar-2023>. Acesso em: 08 out. 2024.
- JOHANSSON, Helena; ÖSTERHOLM, Magnus. **Algebra discourses in mathematics and physics textbooks: comparing the use of algebraic symbols.** International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2023.
- LAJOLO, Marisa. **LIVRO DIDÁTICO: um (quase) manual de usuário.** Em Aberto, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996.
- PIETROCOLA, Maurício. **A matemática como estruturante do conhecimento físico.** Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v. 19, n. 1, p. 93-114, 2002. Acesso em: 12 mar. 2025.
- PLANINIC, Maja *et al.* **Comparison of student understanding of line graph slope in physics and mathematics.** International Journal of Science and Mathematics Education. 2012.
- SILVA, Marco Antônio. **A fetichização do livro didático no Brasil.** Educação & Realidade, Porto Alegre, v. 37, n. 3, p. 803-821, set./dez. 2012.



Artigo está licenciado sob forma de uma licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional.