Dificuldades de graduandos em Matemática na compreensão de conceitos que envolvem o estudo da estrutura algébrica grupo[1]

Difficulties of mathematics graduate students in comprehending concepts related to the study of the algebraic structure group

HENRIQUE RIZEK ELIAS[2]
ANGELA MARTA PEREIRA DAS DORES SAVIOLI[3]

Resumo

O presente artigo tem como objetivoidentificar e interpretar dificuldades de estudantes na compreensão de conceitos que envolvem o estudo da estrutura algébrica grupo. Para tanto, realizamos entrevistas semiestruturadas com oito graduandos em Matemática, as quais nos permitiram, por meio de respostas incorretas, identificar vinte dificuldades no estudo de grupos. A partir dessas dificuldades, caracterizamos as concepções (ação, processo, objeto), segundo a teoria APOS de Dubinsky, de cada estudante. Dentre as dificuldades, evidenciamos dificuldades com conceitos prévios ao estudo de grupos, como os conceitos de conjunto e de função, além de dificuldades em compreender grupo como um objeto matemático. Com relação às concepções, obervamos que a maioria dos estudantes possui uma concepção ação do conceito.
Palavras-chave*: dificuldades; teoria APOS; estrutura algébrica grupo.*

Abstract

The objective of this study was to identify and interpret the difficulties that students have to understand concepts related to the study of the algebraic structure group. To do so, semi structured interviews were conducted with eight students majoring in mathematics, whose incorrect answers led to the identification of twenty difficulties in the study group. From these, we characterized the conceptions (action, process, object), according to Dubinsky's APOS theory, of each student. Among the listed difficulties, we could evidence difficulties with conceptsprior to the study of groups, such as the concepts of sets and functions, and also difficulties to comprehend group as a mathematical object. With regard to the conceptions, we observed that most of the students have an action conception of the concept.
Keywords: *difficulties; APOS theory; algebraic structure group.*

[1] Este artigo é resultado da pesquisa de mestrado de um dos autores, que contou com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), e do projeto Pensamento Matemático Avançado apoiado pela Fundação Araucária (convênio 288/2012).

[2] Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina – henriquerizek@hotmail.com

[3] Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina/PR – angelamarta@uel.br

Introdução

A disciplina de Álgebra (ou Estruturas Algébricas) está presente em muitos cursos de graduação em Matemática no Brasil. Porém, poucas pesquisas no país têm tratado de aprendizagem das estruturas algébricas. Se observarmos em eventos recentes, tais como XIII e XIV EBRAPEM (Encontro Nacional dos Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática) e X ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática) ou se pesquisarmos no banco de teses da CAPES as teses e dissertações defendidas entre os anos 2000 e 2010 em programas de pós-graduação deinstituições como UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas), UNESP (Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho"), USP (Universidade de São Paulo), PUC/SP (Pontifícia Universidade Católica de São Paulo), UEL (Universidade Estadual de Londrina), UFPR (Universidade Federal do Paraná), entre outras, perceberemos que poucos trabalhos têm tratado de aprendizagem de estruturas algébricas.

Se olharmos especificamente para a estrutura algébrica grupo, encontramos os trabalhos de Brandemberg (2010) e Bussman e Savioli (2011).

Contudo, em outros países as pesquisas sobre aprendizagem de conceitos da Álgebra estão mais avançadas. O grupo de pesquisa *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC), encabeçado por Ed Dubinsky, se dedica a estudar a natureza e o desenvolvimento do conhecimento matemático de universitários. O grupo realizou pesquisas como Dubinsky *et al* (1994) e Brown *et al* (1997), que tratam da maneira como estudantes podem vir a compreender conceitos da teoria de grupos.

No Canadá, temos como referência a tese de doutorado de Lajoie (2000), cujo título traduzido é *Dificuldades ligadas às primeiras aprendizagens em Teoria de Grupos*, que teve como objetivo descrever e interpretar dificuldades apresentadas por estudantes universitários no estudo das noções de grupo, isomorfismo de grupos, subgrupo e grupo cíclico, bem como identificar as origens dessas dificuldades.

Estas pesquisas evidenciam que a Álgebra e, em particular, a teoria de grupos, é um dos temas mais problemáticos da graduação, podendo ocasionar dificuldades tanto em termos de lidar com os conteúdos quanto no desenvolvimento de atitudes em relação à Matemática (DUBINSKY *et al*,1994, p.2).

Os motivos para tais dificuldades no estudo de grupo podem ser diversos, como o simbolismo, o sofisticado grau de abstração que o conceito de grupo envolve

(MILIES,1992, p.1) ou, conforme afirmam Dubinsky *et al* (1994, p.26), por ser a Álgebra uma das primeiras disciplinas enfrentadas pelos estudantes que não é dominada pela memorização de fórmulas e pela imitação de soluções de um conjunto de problemas.

É neste cenário que o presente artigo – que é resultado das pesquisas que realizamos durante o mestrado de um de seus autores – se encontra. Nosso objetivo aqui é identificar e interpretar dificuldades na aprendizagem de conceitos que envolvem o estudo da estrutura algébrica grupo. Com isso, queremos suscitar reflexõessobre e se os objetivos traçados para a disciplina de Álgebra na formação do estudante estão sendo alcançados, bem como servir como um diagnóstico parcial do curso, suscitando possíveis alterações em seu currículo.

Para tanto, utilizaremos como referencial teórico as ideias de Dubinsky*et al* (1994), Dubinsky (2002), Brown *et al* (1997), com a teoria APOS (*Action – Process – Objects – Schemas*), e Lajoie (2000), com dificuldades de estudantes em Teoria de Grupos.

1. Teoria APOS (*Action, Process, Object, Schema*) e o conceito de grupo

A teoria APOS é uma teoria cognitivista que visa compreender como ocorre a construção de conceitos matemáticos por uma pessoa que está começando a entendê-los. Tem como hipótese, de acordo com Dubinsky e McDonald (2001, p.2), que o conhecimento matemático consiste em uma tendência do indivíduo em lidar com percepções matemáticas em situações-problema pela construção mental *ação*, *processo* e *objeto,* organizando-os em um *esquema* para dar sentido a esta situação e resolver problemas.

Essa teoria surgiu da tentativa de entender o mecanismo da *abstração reflexionante*[4], introduzida por Piaget para descrever a construção do pensamento lógico em crianças, e estendida para conceitos matemáticos mais avançados (DUBINSKY; MCDONALD, 2001, p.2).

[4] Piaget distingue três grandes tipos de abstração: a abstração empírica, a abstração pseudoempírica e a abstração reflexionante. A abstração empírica lida com propriedades obtidas pela observação do objeto, propriedades estas inerentes a esse; a abstração pseudoempírica também necessita do objeto para observação, mas as propriedades obtidas estão ligadas às ações do sujeito sobre os próprios objetos; a abstração reflexionante independe da observação do objeto e lida com as inter-relações entre ações, as chamadas *coordenações gerais* das ações.

A essência da teoria APOS, afirmam Dubinsky*et al* (1994, p.4), é que um indivíduo desequilibrado por uma percebida situação-problema em um contexto social particular tentará se reequilibrar assimilando a situação para esquemas existentes disponíveis, ou, se necessário, utilizar a *abstração reflexionante* para reconstruir aqueles esquemas a um nível superior de sofisticação. A (re)construção do conhecimento matemático, do ponto de vista da teoria APOS, passa pelas etapas *ação*, *processo*, *objeto* que se organizam em estruturas chamadas *esquemas*.

A *ação* é qualquer transformação física ou mental de objetos, de forma algorítmica, que ocorre em reação a estímulos externos ao indivíduo. É a etapa em que o sujeito manipula objetos matemáticos partindo apenas de fatos que estão na memória, sem que haja um controle consciente dessa transformação.

No caso da compreensão do conceito de grupo, um exemplo desta primeira fase é quando um estudante tenta provar as propriedades para verificar se um conjunto com uma dada operação é um grupo, sem entendê-lo como um objeto matemático. Neste caso, um estudante pode, inicialmente, compreender grupo como um objeto matemático que lhe é familiar: um conjunto, por exemplo. Assim, as propriedades mostradas seriam propriedades do conjunto e a operação seria algo a parte. Ou, possivelmente, o contrário, o estudante compreende grupo como sendo uma operação e, consequentemente, as propriedades são relativas à operação, sendo o conjunto algo complementar.

Ao estudante que se limitar a operar com *ações*, sem outras etapas do processo de construção do conhecimento, tratando os conceitos de forma algorítmica, apenas reproduzindo os passos para verificar se um conjunto munido de uma operação é um grupo, por exemplo, consideraremos que está na *concepção ação*. Porém, esse estudante pode permanecer com este entendimento elementar de grupo (assimilando a situação para um esquema de conjunto já existente, ignorando a operação presente, por exemplo) e, eventualmente, prosseguir nas etapas de construção do objeto, *encapsulando*[5] esse processo em um objeto que, para ele, representa o grupo em questão, conforme Dubinsky *et al* (1994, p.8). Ocorrendo isso, podemos afirmar que o estudante criou uma concepção equivocada de grupo.

[5] O termo e*ncapsular*, de acordo com Dubinsky (2002), significa o ato consciente de transformar *processos* (dinâmicos) em *objetos* (estáticos), por meio de alguma *ação* ou operação.

A *ação* constitui "a essência da construção de uma noção matemática, pois o indivíduo ao executar a mesma ação por várias vezes e refletir sobre ela poderá interiorizá-la em um processo" (PRADO, 2010, p.34). Um *processo* é, portanto, a *interiorização* resultante de uma *ação*. É uma construção interna do indivíduo, consciente da transformação realizada sobre o objeto matemático, possibilitando-o descrever ou refletir sobre todos os passos dessa transformação sem a necessidade de explicitá-los.

Podemos considerar um exemplo para essa etapa da construção do conceito de grupo, a qual chamaremos de *concepção processo*, o caso em que o estudante começa a entender grupo como um conjunto com operações. Como afirmam Dubinsky *et al* (1994, p.9), uma vez que o estudante percebe sua concepção equivocada de grupo como um conjunto, ele pode começar a incluir a operação em suas determinações de grupo. Neste caso, o estudante pode considerar o conjunto como o aspecto predominante do grupo e a operação como secundária. E mais, as operações nas quais os estudantes consideram e lidam melhor são aquelas mais comuns para eles, tais como adição e multiplicação em conjuntos numéricos.

Construído um *processo*, o indivíduo pode trabalhar com processos já existentes para construir novos processos, seja por *reversibilidade* ou *coordenação* com outros processos. O ato de transformar *processos* de uma forma consciente é, segundo Dubinsky (2002, p.101), uma construção necessária para a compreensão da Matemática, mas que estudantes podem sentir dificuldades. Segundo Dubinsky *et al* (1994, p.5), quando se torna possível para um indivíduo transformar um *processo* por alguma ação, então dizemos que o *processo* foi *encapsulado*, tornando-se um *objeto*.

Da mesma forma, um indivíduo deve ser capaz de *desencapsular* um *objeto* para obter os *processos* dos quais se originou, a fim de pensar sobre o *processo* que o gerou ou, até mesmo, reconstruir um *objeto* que estava construído de uma forma equivocada. Por exemplo, o conceito de grupo exige dos estudantes a *coordenação* entre três *esquemas* já existentes: conjunto, função e axioma. Assim, um estudante que não tem bem construídos esses três esquemas pode, por exemplo, *encapsular* o objeto matemático grupo tendo claro apenas algumas operações sobre um conjunto, excluindo outras operações que poderiam ser aplicadas àquele conjunto. Sendo necessária uma *desencapsulação* do objeto grupo para retomar algumas operações que foram deixadas para trás.

De acordo com Dubinsky *et al* (1994, p.13), encapsular um *processo* dinâmico em um *objeto* pode ser complexo para um estudante, podendo inclusive ocorrer tardiamente ou até mesmo não ocorrer. No caso do conceito de grupo, um estudante possui uma *concepção objeto* quando o compreende como um conjunto com uma operação binária que goza das propriedades, ou seja, que compreende grupo como um objeto matemático estático, que possui características próprias, além de conhecer diversos exemplos de grupos.

A etapa final da construção de um grupo específico, consideram Dubinsky *et al* (1994, p.14), começa com a percepção de que outras formas aparentemente diferentes de construir um grupo acabam por não ser diferentes. Assim, pode ocorrer um desenvolvimento conceitual de isomorfismo de grupos, em que um estudante pode criar o processo de construir vários grupos específicos estabelecendo isomorfismos entre eles. Porém, nesse caso, consideramos, em concordância com Leron, Hazzan e Zazkis (1995, p.158), necessária a *coordenação* entre, pelo menos, três outros conceitos: grupo, função e quantificadores.

Um *esquema* para determinado conceito matemático é uma reunião de *ações*, *processos* e *objetos* e outros *esquemas* que se organizam de uma forma coerente na mente de um indivíduo. De acordo com Dubinsky e McDonald (2001, p.3), esses esquemas são ligados por alguns princípios gerais para formar um quadro na mente do indivíduo, que será colocado em prática em uma situação-problema que envolva esse conceito. Este quadro deve ser coerente no sentido de que fornecerá, explícita ou implicitamente, os meios de determinar quais fenômenos estão ou não no âmbito do esquema em questão.

Assim como um *processo* pode ser encapsulado e formar um *objeto*, um indivíduo pode refletir sobre um esquema e, a partir disso, formar um novo *objeto*. O que nos leva a considerar, então, “pelo menos duas formas de construir objectos: a partir dos processos e a partir dos esquemas” (DOMINGOS, 2006, p.25).

Um exemplo é o conceito de grupo que, segundo Brown *et al* (1997, p.192), pode ser entendido como um esquema que contém três *esquemas*: conjunto, operação binária e axiomas. Os *esquemas* de conjunto e operação binária devem ser tematizados[6] para formar *objetos* que são coordenados por meio do *esquema* de axiomas.

[6] Tematizar é “reconstruir em um nível superior aquilo que já realizamos em outro nível. Tematizar é construir um novo conhecimento [...]” (MACEDO, 1993).

De acordo com Brown *et al* (1997, p.192), o *esquema* de axiomas inclui a noção geral que uma operação binária sobre um conjunto pode ou não satisfazer uma propriedade, que é essencialmente o processo de verificação da propriedade. Inclui, também, quatro objetos específicos pela *encapsulação* de quatro *processos* correspondentes a quatro grupos de axiomas. Verificar um axioma consiste em coordenar a noção geral de satisfazer uma propriedade com o processo específico para o axioma (*desencapsulação* do objeto) e aplicar isso a um conjunto e uma operação em particular. Fazendo isso, a operação binária e o conjunto são *desencapsulados* em seus *processos* e os três processos (axiomas, operação binária e conjuntos) são coordenados para estabelecer que o axioma é satisfeito. Os quatro casos desta operação são coordenados para o processo total de verificação dos axiomas.

Ainda conforme Brown *et al* (1997, p.192), o esquema de grupo é tematizado para formar um objeto, no qual ações podem ser aplicadas. Exemplos dessas ações incluem determinar que um conjunto e uma operação particular formam um grupo, verificar as propriedades que um grupo pode ter e averiguar se dois grupos dados são isomorfos.

2. Dificuldade

Na busca de identificar a etapa da construção do conceito de grupo em que um estudante se encontra, acreditamos que uma maneira de fazê-lo seria por meio das dificuldades manifestadas por esses. Desta forma, primeiro faremos uma análise visando identificar dificuldades reveladas por estudantes, para, em seguida, identificarmos a etapa da construção do conceito de grupo em que o estudante se encontra, utilizando, para isso, a teoria APOS.

Portanto, uma dificuldade tem, neste trabalho, um papel de transparecer a concepção (*ação*, *processo*, *objeto*) do estudante acerca do conceito tratado. Da mesma forma, a ausência de dificuldades significa, para nós, a manifestação da compreensão dos conceitos.

Das definições encontradas em Bueno (1966) e Weiszflog (1998), podemos entender uma dificuldade como algum impedimento ou hesitação ao lidar com uma dada situação proposta.

No presente artigo, entendemos o termo *dificuldade* da mesma forma que Lajoie (2000) e Campos (2009), considerando que uma dificuldade pode estar ligada ao sujeito levando em conta aspectos subjetivos, mas também relacionada à noção matemática. E que a manifestação dessa dificuldade pode se dar por meio da hesitação, do embaraço ao lidar com os questionamentos que fizemos e, ainda, da ausência de respostas ou do erro ao responder os questionamentos.

3. Procedimentos metodológicos

Para identificar e interpretar dificuldades apresentadas por estudantes quanto ao conceito de grupo, optamos por realizar uma pesquisa de natureza qualitativa, seguindo as características traçadas por Bogdan e Biklen (1994).

Os participantes da pesquisa foram oito estudantes do curso de licenciatura em Matemática de uma universidade estadual paranaense, cujo sistema acadêmico era, na época da realização da pesquisa, o seriado anual, com disciplinas anuais e semestrais.Esses estudantes cursaram ou estavam cursando a disciplina de Estruturas Algébricas no ano de 2010. Para selecioná-los, fomos às aulas das disciplinas de Tópicos em Educação Matemática IIe de Estruturas Algébricas, destinadas à terceira série da licenciatura e à segunda série do bacharelado, respectivamente. Fizemos o convite para toda a sala, sendo selecionados apenas aqueles que se dispuseram a participar, ou seja, esses participantes são voluntários. Da turma de Tópicos em Educação Matemática II (licenciatura) tivemos sete voluntários, enquanto que na disciplina de Estruturas Algébricas (bacharelado) tivemos apenas um voluntário, que também cursava licenciatura.

Combinamos dia, horário e local da preferência de cada participante. Mas, dois deles não compareceram ao encontro, mesmo depois de remarcado. Por isso, fomos em busca de novos estudantes para substituí-los. Convidamos outros dois que participavam de um projeto de pesquisa[7], que se prontificaram a participar, completando assim os oito estudantes que participaram da pesquisa.

Para aqueles que cursavam a disciplina na época da realização da coleta dos dados, tivemos o cuidado de fazê-la somente após o contato deles com o conceito de grupo.

Como instrumento de coleta de dados, decidimos pela entrevista semiestruturada, por sua maleabilidade (LÜDKE; ANDRÉ, 2001) e liberdade de trocar a ordem ou inserir questões no roteiro que elaboramos (anexo I) de acordo com as respostas dadas pelos estudantes, isto é, conforme identificávamos possíveis erros, equívocos, hesitações que

---

[7] Projeto de pesquisa coordenado pela orientadora da dissertação de mestrado que estava sendo realizada na época.

poderiam nos indicar uma dificuldade com relação a determinado conceito, fazíamos novas perguntas ou pedíamos uma explicação mais detalhada. Durante as entrevistas, gravadas com equipamento de áudio, fornecemos aos estudantes folhas em branco para que pudessem registrar no papel o que achassem necessário. Por isso, temos, em nossas análises, trechos das entrevistas transcritas e alguns registros escritos.

O roteiro preparado para a entrevista contém setequestões, sendo algumas com subitens. Todas as questões, com exceção da segunda e do item (ii) da quinta (elaboradas pelos autores), foram retiradas dos questionários elaborados nas pesquisas de Hazzan (1999) e Lajoie (2000), que também focavam a aprendizagem de conceitos da Álgebra Abstrata. Assim, selecionamos destes dois trabalhos questões que poderiam nos ajudar a alcançar os objetivos pretendidos nesta pesquisa.

A análise dos dados foi realizada em dois momentos. O primeiro identificou as dificuldades apresentadas pelos estudantes, listando-as. Para isso, examinamos as comunicações – orais e escritas – dos estudantes, à procura de indicadores que nos permitissem realizar inferências com relação às mensagens fornecidas por eles, ou seja, buscamos respostas erradas, incoerências ou ausência de resposta para caracterizar como uma dificuldade. Percebidas as dificuldades que emergiram dos dados, agrupamos aquelas em comum e nomeamos cada um dos diferentes tipos. Elaboramos trêsclasses de dificuldades de uma forma mais ampla e, dentro destas classes, subclasses contendo dificuldades mais específicas.

O segundo momento objetivou interpretar estas dificuldades percebidas no primeiro momento, mostrando-nos, por meio da teoria APOS, as concepções (*ação*, *processo*, *objeto*) dos estudantes a respeito do conceito de grupo.

4. Análises das entrevistas

Esta seção está dividida em duas: uma contendo as dificuldades identificadas nas entrevistas e registros escritos, seguida de trechos de falas dos estudantes que caracterizam dificuldades; e outra destacando a concepção (*ação*, *processo*, *objeto*) de cada estudante quanto ao conceito de grupo segundo o referencial teórico adotado. Para manter o anonimato dos oito participantes, os chamaremos de E1, E2, E3, ... , E8.

4.1 Dificuldades apresentadas pelos estudantes

Apresentamos a seguir a lista das dificuldades que fizemos a partir das análises das transcrições das entrevistas e de seus registros escritos. Na sequência, acrescentamos a esta lista alguns trechos que nos evidenciaram dificuldades, a fim de “ilustrar e substanciar a apresentação” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.48).

As dificuldades percebidas foram:

Quadro1 - Dificuldades percebidas

1. **Dificuldades relacionadas a Conjuntos**
    - 1.1 Dificuldade em conhecer uma diversidade de exemplos de conjuntos, além dos convencionais conjuntos numéricos;
    - 1.2 Dificuldade em lidar com conjuntos diversos, como, por exemplo, o conjunto das matrizes (propriedades, operações);
    - 1.3 Dificuldade em reconhecer os símbolos que representam determinado conjunto;
2. **Dificuldades relacionadas a Função**
    - 2.1 Dificuldade com a definição de classe de equivalência;
    - 2.2 Dificuldade relacionada às operações em conjuntos. Conhecer e saber trabalhar com diferentes tipos de operações, não apenas adição e multiplicação em conjuntos numéricos;
    - 2.3 Dificuldades com as propriedades das operações (associatividade, existência do elemento neutro e todo elemento admite simétrico):
        - 2.3.1 dificuldade em explicar as propriedades de operações;
        - 2.3.2 dificuldade em provar as propriedades de operações;
        - 2.3.3 não verificar a existência do elemento neutro à direita e à esquerda;
        - 2.3.4 confusão entre as propriedades (elemento neutro com inverso, associativa com comutativa);
        - 2.3.5 dificuldade em provar a unicidade do elemento neutro;
        - 2.3.6 dificuldade em perceber que o elemento simétrico é único para cada elemento do conjunto e que cada elemento tem o seu simétrico;
        - 2.3.7 utilizar o elemento simétrico para provar a existência do elemento neutro e para encontrar o próprio simétrico.

3. Dificuldades relacionadas a Grupo 3.1 dificuldade com a definição de estruturas algébricas; 3.2 dificuldades com a definição de grupo (não relaciona os conceitos envolvidos na definição de grupo): 3.2.1 não saber definir grupo de nenhuma forma; 3.2.2 entender grupo como um conjunto; 3.2.3 entender grupo como uma operação; 3.2.4 entender grupo como as propriedades que devem ser provadas; 3.2.5 entender grupo como um conjunto e uma operação. 3.3 Dificuldades em trabalhar com a tábua de operação: 3.3.1 dificuldade em identificar um grupo pela tábua de operação; 3.3.2 dificuldade em operar com os elementos da tábua.

Listamos, portanto, vinte dificuldades, que dividimos em trêsclasses: dificuldades relacionadas a conjuntos, dificuldades relacionadas a função e dificuldades relacionadas a grupo. No presente artigo, das vinte dificuldades listadas, selecionamos seis casos para substanciar a apresentação, as quais trataremos agora.

No caso das dificuldades relacionadas a conjuntos, trazemos como ilustração a dificuldade 1.1, nomeada *Dificuldade em conhecer uma diversidade de exemplos de conjuntos, além dos convencionais conjuntos numéricos*.

Durante as entrevistas percebemos que alguns estudantes conhecem o nome de determinados conjuntos, como o conjunto $\mathbb{Z}_m$ de classe de restos, porém não sabem quais são os elementos que os compõem. Entendemos que um estudante conhece uma diversidade de exemplos de conjuntos quando ele é capaz de dizer quais são seus elementos, não apenas seu nome.

Mostramos o caso do estudante E3. Quando questionado, aparentou se lembrar do conjunto $\mathbb{Z}_m$, mas não sabia quais elementos o compõem. Vejamos:

Pesquisador – Você lembra o que é este símbolo? O $\mathbb{Z}_4$?

E3 – O $\mathbb{Z}_4$? Ai, você tem que fazer uma tabela, não é?

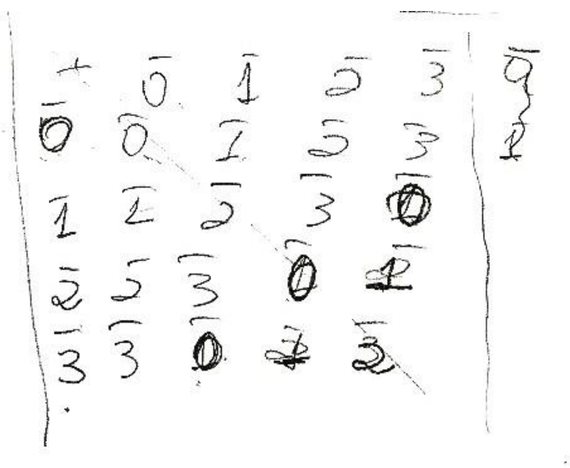
Pesquisador – Isso daqui é um conjunto...

E3 –de divisão, que o resto... Quer ver, não tem que ser aquilo lá, zero barra, um barra, dois barra, três barra até o quatro barra? É isso?

Pesquisador – Até quatro barra?

E3 – Não! Porque... quer ver! O que eu lembro, é uma coisa assim... eu não lembro se tem zero. Quatro! Como é soma, então eu vou somando... não esse quatro aqui não tem (rabiscou o 4 da tabela).

FIGURA 1: Registro escrito do estudante E3



Pesquisador –O que é essa tabelinha que você fez? Para que é?

E3 – Para você provar que ele é grupo, não é? Se a diagonal dele for simétrica, prova que é um grupo abeliano.

Percebemos que E3 não sabe afirmar qual é o conjunto $\mathbb{Z}_m$ de classe de restos, pois buscava pela memória quais eram os elementos de $\mathbb{Z}_4$, ora considerando o quatro barra, ora desconsiderando o zero barra. Entendemos que um estudante conhece o conjunto $\mathbb{Z}_m$ quando sabe que é composto pelos elementos $\{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$.

Além disso, um detalhe intrigante foi a primeira reação do estudante ao considerar a necessidade de se fazer uma tábua, dando a impressão de ter decorado. Assim, parece-nos que o estudante associa que para mostrar que o conjunto $\mathbb{Z}_m$ de classe de restos com uma operação dada é grupo, deve-se montar a tábua de operação.

Pensamos que este seja um exemplo de reprodução do que o professor ensinou, caracterizando a etapa *ação*, conforme a teoria APOS, na qual o estudante faz manipulações sobre objetos matemáticos partindo apenas de fatos que estão na memória. É possível, por este trecho, considerar que o estudante, possivelmente, tenha apenas decorado que, para mostrar que $(\mathbb{Z}_4, +)$ é um grupo, seja necessário montar a tábua de operação e, ainda, verificar se esta tábua é simétrica com relação à diagonal principal para verificar se o grupo é abeliano. Notemos que não perguntamos se o grupo é ou não abeliano, mas o estudante tem memorizado como deve proceder.

Mesmo não sabendo mostrar se vale a propriedade associativa para a adição em $\mathbb{Z}_4$, a conclusão de E3 foi que $(\mathbb{Z}_4, +)$ é um grupo, e justificou, incorretamente, dizendo que se "provar que ele é, através da diagonal, que ele é abeliano, eu já provo que ele é grupo" (E3).

Com relação à segunda classe, dificuldades relacionadas a função, apresentamos um exemplo da dificuldade 2.2, intitulada *Dificuldade relacionada às operações em conjuntos. Conhecer e saber trabalhar com diferentes tipos de operações, não apenas adição e multiplicação em conjuntos numéricos*.

Entendemos que um estudante tem uma *concepção objeto* de operação quando sabe lidar com diferentes tipos de operações em conjuntos diversos, não apenas adição e multiplicação sobre conjuntos numéricos.

Percebemos que alguns estudantes têm dificuldades em lidar com operações genéricas, precisando sempre se reportar a operações como adição entre números. Este fato fica claro na fala do estudante E6 quando questionado sobre a propriedade comutativa e a associativa:

> *Pesquisador – Por exemplo, a comutativa, você lembra o que é?*
>
> *E6 – A comutativa é a mais b é igual a b mais a.*
>
> *Pesquisador – Isso se a operação for adição. E a associativa?*
>
> *E6 – Associativa é a mais, entre parênteses, b mais c é igual a a mais b, entre parênteses, mais c.*
>
> *Pesquisador –Isso. "Mais", porque no caso a operação é adição.*
>
> *E6 – Isso.*

Está claro que o estudante quis dizer que a comutativa é: $a + b = b + a$, $\forall\, a, b \in G$ e que a associativa é: $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall\, a, b, c \in G$. Sua ideia destas duas propriedades está correta, todavia espera-se que os estudantes se desprendam de casos particulares, como é o caso da adição, e pensem em uma operação qualquer.

Podemos considerar também que um estudante, ao atingir certa familiaridade com o conteúdo, passea utilizar o sinal da adição para representar uma operação qualquer. Mas, de acordo com o que analisamos da entrevista do estudante E6, pensamos que esse recorreu ao caso particular da adição não pelo alto grau de familiaridade que possui com o conteúdo, mas por ser um caso mais comum a ele, o que caracteriza uma tentativa de reduzir o nível de abstração, conforme Hazzan (1999), que há em pensar em uma operação qualquer.Vejamos outro caso, o do estudante E7:

> *Pesquisador – O elemento neutro de um grupo é único?*
>
> *E7 – É único com a operação dele. Quando é soma, é o zero. Quando é multiplicação, é o* 1.

Falávamos do elemento neutro de forma genérica, não de uma forma específica como E7 tratou. Parece-nos que para o estudante E7 só existem duas operações possíveis para grupos: multiplicação e adição. Esse caso é evidenciado por Dubinsky *et al* (1994), quando ressaltam que um estudante que não tem bem construídos os três esquemas que envolvem o conceito de grupo (conjunto, aplicação e axioma) pode, por exemplo, *encapsular* o objeto matemático grupo tendo claro apenas algumas operações sobre um conjunto, excluindo outras operações que poderiam ser aplicadas àquele conjunto. Sendo necessária uma *desencapsulação* do objeto grupo para retomar algumas operações que foram deixadas para trás.

Para ilustrar as dificuldades relacionadas a grupo, selecionamos exemplos da dificuldade 3.2, nomeada *Dificuldades com a definição de grupo (não relaciona os conceitos envolvidos na definição de grupo).* Dentro desta classe de dificuldade (dificuldade 3.2), selecionamos exemplos de quatro subclasses:

3.2.2 entender grupo como um conjunto

Segundo Dubinsky*et al* (1994), é possível que alguns estudantes em fases iniciais de aprendizagem do conceito de grupo o interpretem primeiramente como um conjunto. Este é o caso do estudante E7, que define grupo da seguinte forma:

> *Pesquisador – [...] o que é grupo?*

E7 – [...] Bom, grupo é um conjunto fechado que tem elemento neutro para a soma, associatividade, comutatividade e elemento inverso.

Compreendemos desta fala que o estudante considera grupo como um conjunto que contém o elemento neutro para a adição e que seja associativo e comutativo para uma operação qualquer, uma vez que não definiu uma operação para essas propriedades ou que esteja considerando a adição para estas propriedades.

Então, a característica que predomina na definição do estudante E7 é o conjunto. Quanto ao elemento inverso, isto é, que todos seus elementos são simetrizáveis, constatamos no decorrer da conversa que o mesmo não sabe o que significa esta propriedade, conforme dificuldade 2.3.1. Inferimos, então, que o estudante vê grupo como conjunto, independente da operação, manifestando uma *concepção ação* do conceito.

Consideramos também para tirarmos essa conclusão de que o estudante entende grupo como conjunto a fala "conjunto fechado". Poderíamos supor que o estudante quis dizer "conjunto fechado para uma dada operação", mas, ao deixar de mencionar operação, acreditamos que a ignora ou não a considera necessária para a noção de grupo.

Dois outros equívocos, estes mais evidentes, são com relação à noção de que o elemento neutro existe somente para a operação adição e não para uma operação qualquer, e a inclusão da propriedade comutativa nas propriedades que caracterizam um grupo.

3.2.3 entender grupo como uma operação

Encontramos um estudante que tem uma concepção diferente dos demais. Para o estudante E3 um grupo é apenas a operação. Vejamos isso em dois momentos da conversa.

Pesquisador – O que você gostou do curso? Você se lembra de algum assunto específico?

E3 – Então, o que eu gostei mais foi você provar que uma operação é grupo ou não, aquelas tabelas lá, eu gostava bastante de provar.

Na sequência da entrevista, ele demonstra novamente esta concepção equivocada do conceito de grupo:

Pesquisador – Bom, então, o que é grupo? Você lembra? Eu vi que você lembra um pouquinho, mas você sabe definir grupo?

E3 – Grupo é um conjunto que tem que ter a operação que satisfaça a associatividade, comutatividade, é... [tempo], são quatro, né? Não, três. Associatividade, comutatividade e... [tempo] mais uma...pior é que eu estava explicando para a menina ontem. Distributividade?

Pesquisador –Não.

E3 –Não... não é isso? Ah... deixa eu ver. Se a está relacionado com b e b está relacionado com a, é comutatividade, não é? É...

Pesquisador – Você disse que é um conjunto, né? Com uma operação?

E3 – Grupo é uma operação, né?

Temos aqui dois erros quanto ao conceito de grupo. Um com relação às propriedades que um conjunto munido de uma operação deve gozar e outro com relação à noção de grupo. Assim sendo, entendemos a manifestação da *concepção ação*, no sentido da teoria APOS, com relação ao conceito, ao tentar associar grupo a outro objeto matemático que lhe é familiar, a operação.

3.2.4 entender grupo como sendo as propriedades que devem ser provadas

Analisando as falas dos estudantes, encontramos algumas que nos levaram a inferir que alguns estudantes têm a concepção de que um grupo significa gozar das propriedades associativa, existência do elemento neutro e que todo elemento do conjunto é simetrizável. Podemos perceber isto nas falas dos estudantes E2:

Pesquisador – [...] você sabe me falar o que é grupo?

E2 – o que é? Olha, lembro que tinha uma lei de composição. Mas você fala pela definição ou o que significa o...

Pesquisador – Isso, você sabe definir? A gente sabe que é uma estrutura algébrica.

E2 – Tem que ser fechado em relação a uma operação. Aí eu sei que...

Pesquisador – O que significa ser fechado?

E2 – Que se eu pegar dois números dentro daquele conjunto a operação entre eles tem que dar naquele conjunto. Teria que ter a associativa, elemento neutro e teria que ter inversa, para ser grupo.

Pesquisador – O que é inversa?

E2 – Quer dizer que se eu pegar um elemento x e operar com o inverso dele tem que dar o elemento neutro. Eu acho que isso já define um grupo. Esta sequência.

Pesquisador – Você pode repetir para mim?

E2 – Associatividade, elemento neutro e inverso. E a operação definida dentro deste conjunto.

Neste diálogo com o estudante E2, podemos ver que ele se lembra e destaca principalmente as propriedades das quais um conjunto com uma operação devem gozar, o que nos leva a crer que, em seu entendimento, grupo é definido apenas pelas propriedades. Tiramos esta conclusão porque o estudante sequer mencionou que um grupo consiste de um conjunto e uma operação, ele disse apenas que se lembrava de uma lei de composição e que esta está definida dentro "daquele conjunto" – o qual ele não explicitou. Porém, não deixou claro se enxerga uma relação entre conjunto, operação e as propriedades, ou seja, ele não coordena estes três processos.

Destacamos também a propensão do estudante em considerar um conjunto numérico ao invés de um conjunto qualquer. Apesar de não explicitar conjunto em sua definição de grupo, E2 dá indícios de considerar apenas os conjuntos numéricos quando afirma "[...] dois números dentro daquele conjunto [...]" (E2).

Desse modo, identificamos aqui que o estudante não entende grupo como um objeto matemático, mas sim como propriedades a serem mostradas. Entendemos, então, que ainda não interiorizou o conceito de grupo em um *processo*, uma vez que ainda está focado nas propriedades a serem provadas, nos algoritmos que lhes foram ensinados, sem coordenar conjuntos, operação e propriedades. Indicando estar na chamada *concepção ação*, segundo a teoria APOS.

3.2.5 entender grupo como um conjunto e uma operação

De acordo com Dubinsky *et al* (1994), um estudante com uma concepção equivocada de grupo como um conjunto, pode começar a incluir a operação em suas determinações de grupo. Neste caso, o estudante pode considerar o conjunto como o aspecto predominante do grupo e a operação como secundária.

Sobre isso, encontramos um estudante que, possivelmente, esteja nesse processo de inclusão da operação em sua concepção de grupo. Vejamos o diálogo com o sujeito E5 seguido da análise.

Pesquisador – Você sabe me dizer o que é grupo?

E5 – [tempo] Grupo é... uma estrutura algébrica, no caso aí de uma operação, que satisfaz aquelas condições lá.

Essa resposta é, praticamente, uma reprodução do que havíamos dito ao E5 no início da entrevista, quando falávamos sobre estruturas algébricas. Então, considerando esta resposta insuficiente e vaga, continuamos questionando e o estudante responde:

E5 – O elemento neutro tem que estar... tem um conjunto, né, na verdade, e a operação. Definido sobre essas... conjunto e operação. O elemento neutro, dado um elemento do conjunto.

Pesquisador – Não entendi. Não entendi o que você falou.

E5 – Não, eu que não soube explicar mesmo. Dado um elemento, tem que ter o inverso no grupo, no conjunto, na verdade. Inverso à direita e à esquerda. O produto deles tem que estar. [...] Tem que ser fechado com relação à operação, né!

Esse fragmento do diálogo nos permite perceber que o conceito de grupo não está bem definido para o estudante.

Quando E5 diz "O elemento neutro tem que estar..." e, em seguida, se lembra de que um grupo é um conjunto associado a uma operação, concluímos que entende o elemento neutro como uma coisa já definida que deve estar no conjunto, não que um elemento *e* pertencente ao conjunto seja tal que $a * e = e * a = a, \forall\, a \in G$. Isto é, o estudante não percebe o elemento neutro como um elemento pertencente ao conjunto que, para aquela operação específica, possui a propriedade de elemento neutro.

Portanto, entendemos que esse estudante compreende grupo como um conjunto e uma operação, mas que para esse conjunto e essa operação sejam um grupo, o conjunto deve conter o elemento neutro e cada elemento do conjunto deve ter seu simétrico no conjunto, ou seja, o conjunto é o aspecto predominante, enquanto a operação é secundária.

Para finalizar esta seção, apresentamos a tabela síntese das dificuldades com os estudantes que as evidenciaram:

Tabela1 -Síntese das dificuldades dos estudantes

Dificuldades	Subclasse 1	Subclasse 2	Estudantes
1. Ligadas a Conjuntos	1.1		E3
	1.2		E2, E3, E4, E7, E8
	1.3		E6, E7, E8
2. Ligadas a Função	2.1		E4
	2.2		E6, E7
	2.3	2.3.1	E7, E8
		2.3.2	E2, E3, E4, E6
		2.3.3	E2, E3, E4, E7
		2.3.4	E1, E3, E5, E7
		2.3.5	E2, E8
		2.3.6	E4
		2.3.7	E4
3. Ligadas a Grupo	3.1		E1, E2, E3, E4, E5, E6, E7 e E8
	3.2	3.2.1	E8
		3.2.2	E7
		3.2.3	E3
		3.2.4	E2, E4, E6
		3.2.5	E5
	3.3	3.3.1	E2, E3, E8
		3.3.2	E5

4.2 Concepções (*ação*, *processo*, *objeto*) dos estudantes

Apresentamos agora um breve perfil de cada estudante, ressaltando algumas informações que consideramos relevantes para a caracterização de suas concepções (ação, processo, objeto) do conceito de grupo.

Estudante E1

O estudante E1 cursa o bacharelado e, concomitantemente, a licenciatura em Matemática. Na época da entrevista, estava no final de seu segundo ano da graduação e cursava a disciplina Álgebra, o que, possivelmente, colaborou em seu desempenho na entrevista. Segundo ele, suas notas na disciplina estavam boas.

Esse estudante apresentou quatro das dificuldades que listamos. Apesar disso, mostrou, em diversos momentos, compreender o conceito de grupo, pois: apresentou corretamente a definição formal do conceito; conseguiu trabalhar com a tábua de operações; soube provar a unicidade do elemento neutro; soube identificar grupos representados pelas tábuas de ordem seis; demonstrou conhecer algumas maneiras de identificar grupos pela tábua de operação, como não ter elementos repetidos nas linhas e colunas, e reconhecer um grupo comutativo verificando a simetria dos elementos em relação à diagonal principal; entre outras evidências.

Entendemos que o estudante E1 possui uma *concepção objeto*, no sentido da teoria APOS, pois compreende grupo como um conjunto com uma operação binária que goza das propriedades, isto é, compreende grupo como um objeto matemático estático, que possui características próprias, além de conhecer exemplos de grupos. Na entrevista não abarcamos muitos exemplos, mas E1 mostrou conhecer, além dos grupos aditivos de classes de restos e dos grupos lineares de grau n cobrados na questão cinco, outros, como o grupo das permutações.

Na questão cinco, E1 nos mostrou fortes evidências de sua *concepção objeto* de grupo. Quando perguntado sobre $(\mathbb{Z}_4, +)$ ser ou não um grupo, o estudante não hesitou em garantir que é grupo, sem precisar realizar passos mais detalhados para confirmar, indicando familiaridade com o exemplo. Com relação ao outro suposto grupo, o $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ .)$, a resposta não foi imediata, mas ainda sem realizar passos detalhados, conseguiu concluir que um elemento de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ .)$ só seria simetrizável em relação à multiplicação se seu determinante fosse diferente de zero. Concluindo que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ .)$ é um grupo “só se o determinante [da matriz] for diferente de zero” (E1).

Estudante E2

Estudante da licenciatura em Matemática, E2 concluiu o curso Álgebra há pouco menos de um ano antes da entrevista. Foi aprovado logo na primeira vez que fez o curso, porém fez “quase todas as provas que tinha direito” (E2), isto é, precisou realizar o exame. Na época da entrevista, esse estudante estava no final de seu terceiro ano da graduação.

Durante vários momentos da entrevista, E2 apresentou indícios de que ainda lida com o objeto matemático grupo de maneira elementar. Dizemos isso não apenas pelo número de dificuldades que apresentou, foram sete, mas sim pela forma como elas apareceram. O estudante parecia buscar lembranças que estavam desconexas em sua memória para tentar responder às questões. Por exemplo, quando questionado sobre $(\mathbb{Z}_4, +)$ ser grupo ou não, sua primeira resposta foi: “Aí a questão da inversa. A inversa já é mais complicado, tem que ver se é primo ou não. É que se esse número é primo, então já é grupo. Por exemplo, se fosse $\mathbb{Z}_7$, eu acho que já garantia a inversa dele” (E2). O estudante faz confusão com o *grupo multiplicativo das classes de resto módulo* m, em que m é primo. Ao invés de refletir sobre o grupo pedido, E1 resgata alguma lembrança de que m deveria ser primo, o que não é necessário para o *grupo aditivo das classes de restos módulo* m.

Podemos citar outro exemplo. Quando o estudante trabalhava com a tábua de operações, disse: "Acho que a tábua de operações indica se é associativa ou não, nesse caso" (E2). O estudante se recordava que a simetria em relação à diagonal principal indica alguma propriedade, mas não sabia qual. Em um primeiro momento, E2 afirmou que verificar essa simetria seria suficiente para garantir que a tábua definiria uma estrutura de grupo. Em seguida, disse que asseguraria a propriedade associativa, tentando, de alguma forma, encontrar a utilidade de ser simétrico em relação à diagonal principal.

Esses e outros indícios nos permitiram afirmar que E2 possui uma *concepção ação*, de acordo com a APOS, com relação ao conceito de grupo. Isso significa que o estudante ainda não interiorizou o conceito, pois ainda não refletiu sobre o mesmo, isto é, suas *ações* sobre o objeto matemático ainda são de forma mecânica.

Estudante E3

O estudante E3 ingressou em 2007 no curso de licenciatura em Matemática. Ficou retido no segundo ano do curso "[...] por culpa da Álgebra" (E3). Com relação ao que mais gostava em Álgebra, E3 afirmou que era "[...] provar que uma operação é um grupo ou não e aquelas tabelas lá [...]", manifestando uma noção equivocada de grupo, considerando grupo como uma operação. Cursou a disciplina pela segunda vez em 2009, um ano antes da entrevista que realizamos.

E3 manifestou oito das dificuldades que listamos, sendo duas relacionadas a conjuntos, três relacionadas a função e três relacionadas a grupo.

Esse estudante apresentou uma concepção equivocada do conceito de grupo, explicitando uma tentativa de construir o conceito matemático grupo relacionando-o com um conceito familiar – operação. Além disso, mostrou desconhecer o conjunto $\mathbb{Z}_m$ de classes de restose não saber lidar com o conjunto das matrizes de ordem dois, conjuntos que munidos da operação adição, por exemplo, são exemplos de grupos estudados no curso de Álgebra. Apresentou também confusão com as propriedades das operações, como, por exemplo, enunciar a propriedade transitiva quando perguntado sobre a propriedade associativa.

Dessas dificuldades manifestadas, entendemos que esse estudante esteja em uma primeira fase do entendimento de grupo, em que ainda não o entende como um novo objeto matemático, mas sim como uma operação (objeto matemático familiar) que pode ser um grupo ou não. Essa é uma característica da *concepção ação*, a qual o estudante permanece com um entendimento elementar de grupo, sem prosseguir nas etapas da construção conhecimento (no sentido da teoria APOS).

Estudante E4

E4 é estudante de licenciatura em Matemática. Na época da entrevista, E4 cursava a disciplina de Álgebra. Segundo ele, naquele momento, o professor da disciplina já havia encerrado os conteúdos, faltava apenas realizar a prova final.

Dos conteúdos estudados, E4 relata que o que mais gostou foi estudar grupo e subgrupo, pois "[...] tudo segue o mesmo padrão" (E4). Apesar de gostar, o estudante não soube definir grupo, já que, segundo ele, no curso "não estuda muito o que é anel, o que é... A gente estuda mesmo para provar, para usar a fórmula" (E4). Isto é, para esse estudante, o estudo das estruturas algébricas significa seguir um algoritmo para provar um grupo ou anel, porém, sem entender grupo e anel com objetos matemáticos. Isso fica evidente quando o estudante afirma que era "fácil, porque tudo segue o mesmo padrão, para provar um anel, segue um algoritmo para você fazer. Grupo também" (E4).

Outro destaque feito pelo estudante, que vai ao encontro das dificuldades que listamos nessa pesquisa, é a dificuldade com os conhecimentos prévios no estudo de grupo. De acordo com o estudante

[...] difícil era interpretar antes de começar a fazer, sabe? Onde que eu estou? Que conjunto eu estou? Como define aquele conjunto? Como escrevo? Para mim isto é difícil. Antes de começar. Porque depois que eu sei como é o conjunto, depois que define como ele fica, daí eu consigo. (E4)

O que o estudante dá a entender é que conhecendo o conjunto e a operação, provar que é grupo é fácil, pois basta seguir o algoritmo. Isso mostra que o estudante ainda possui uma *concepção ação* do conceito matemático, provando as propriedades para verificar se um conjunto munido de uma operação é um grupo, mas sem entendê-lo como um objeto matemático originário da coordenação dos esquemas: conjunto, função e axioma.

Das dificuldades que listamos, o estudante E4 apresentou oito delas. Algumas mostram que esse estudante reproduz a maneira que o professor ensinou, sem realizar reflexões mais profundas. Por exemplo, o costume de chamar os elementos de conjuntos de α, β, γ. Quando tratamos do conjunto $\mathbb{Z}_4$, ao tentar mostrar as propriedades, o estudante automaticamente fez $\alpha = \bar{a}$, $\beta = \bar{b}$ e $\gamma = \bar{c}$. O mesmo ocorreu quando trabalhamos com o conjunto $\mathcal{M}_{2x2}$. O estudante fez $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} b & d \\ e & f \end{pmatrix}$ e $\gamma = \begin{pmatrix} a & c \\ f & e \end{pmatrix}$. Quando perguntado sobre o motivo de sempre chamar os elementos de um conjunto de α, β, γ, o estudante respondeu: "Ah, não sei. É mais... O professor faz assim. Acho que não precisa fazer isso" (E4).

Outro exemplo foi quando perguntamos sobre o que significa a barra sobre os elementos do conjunto $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. O estudante respondeu "Porque quando a gente está falando de $\mathbb{Z}$ alguma coisa, a gente coloca barra. Ah, eu não sei, mas eu sei que precisa colocar" (E4).

Percebemos que o estudante realiza ações com o conjunto $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ sem se questionar sobre a natureza dos elementos desse conjunto, mostrando não conhecer o conceito de classe de equivalência e de conjunto-quociente.

O estudante mostrou, também, dificuldade em escrever uma matriz genérica$2x2$, utilizando o exemplo específico como a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ para mostrar que a multiplicação entre matrizes não é comutativa, com a justificativa de que "é menos complicado fazer para uma" (E4). Além disso, cometeu um erro grave ao considerar que qualquer matriz $2x2$ terá inversa.

Por essas dificuldades apresentadas pelo estudante relacionadas a conjuntos e a função e, principalmente, a concepção equivocada de grupo, entendemos que o estudante esteja na primeira etapa da construção do conceito de grupo, evidenciando uma *concepção ação*, segundo a APOS.

Estudante E5

Esse estudante cursa licenciatura e bacharelado em Matemática. Ingressou no curso em 2008 e cursou Álgebra em 2009, ano anterior à realização da entrevista.

E5 afirmou que a parte do curso de Álgebra de que mais gostou de estudar foi congruência módulo$m$. Com relação ao que menos gostou, afirmou ser o estudo de grupos e, menos ainda, anéis, pois tem "muita definição na parte de anéis" (E5). Quanto às dificuldades, esse estudante disse que, mais do que a disciplina de Análise, a disciplina de Álgebra é muito abstrata, o que a torna pouco atraente. Além disso, as demonstrações dos teoremas são também muito difíceis para ele. Porém, "demonstrar que é grupo, essas coisas, beleza!" (E5).

Ainda com relação às disciplinas, E5 relata que as disciplinas mais difíceis no curso de Matemática, até o momento do final do seu terceiro ano, são Álgebra e Corpos e Extensões – sendo esta uma disciplina para o bacharelado, que o estudante cursava na época da entrevista.

Com relação ao conceito de grupo, E5 não soube definir corretamente, manifestando a dificuldade *3.2.5 Entender grupo como um conjunto e uma operação.* Apesar disso, o estudante enunciou os axiomas corretamente, mostrou conhecer as definições de elemento neutro e de elemento simetrizável, soube trabalhar com os conjuntos $\mathbb{Z}_4$ e $\mathcal{M}_2$ ($\mathbb{R}$), mostrou que para $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \,.)$ ser um grupo, devemos considerar apenas as matrizes inversíveis, isto é, o conjunto $GL_2(\mathbb{R})$.

Então, considerando que esse estudante apresentou, além de uma concepção equivocada de grupo como um conjunto e uma operação, a dificuldade *2.3.4 confusão entre as propriedades* e a necessidade de se remeter a casos particulares quando deveria considerar um caso genérico – como, por exemplo, quando tentava provar a unicidade do elemento neutro, E5 disse: "Fala aí um grupo pra mim [...]", quando deveria considerar um grupo qualquer –, entendemos que este estudante esteja no *processo* da construção do conceito de grupo e, talvez, na eminência de encapsular esse *processo* em *objeto*, necessitando trabalhar com conjuntos e operações diferentes dos usuais para que, a partir dos *processos* já existentes, possa construir novos *processos* e, assim, encapsular em um *objeto*. Por isso, entendemos que esteja em uma *concepção processo* desse conceito matemático.

Estudante E6

Estudante de licenciatura em Matemática. Iniciou o curso em 2005 e, segundo ele, o motivo de estar há tantos anos fazendo o curso (seis anos até o dia que realizamos a entrevista) foram as várias reprovações. E6 fez a disciplina de Álgebra em 2008, o que certamente influenciou em sua entrevista, pois, conforme afirma, não voltou a estudar os conceitos da Álgebra após o curso, o que pode causar esquecimento das definições.

Porém, nesta análise, estamos interessados não apenas na enunciação da definição dos conceitos, mas também na forma como os estudantes compreendem o conceito abstrato de grupo. Por isso, mesmo que o estudante não se recordasse da definição de grupo, conduzíamos a entrevista promovendo discussões até que as definições se tornassem claras para que, a partir de então, esse estudante manifestasse sua concepção (*ação, processo, objeto*) desse objeto da matemática avançada. Foi assim que procedemos com o estudante E6.

Segundo esse estudante, no curso de Álgebra o estudo de "grupos foi bem legal. Prova de grupos era legal. [...] A parte de organizar o raciocínio, falar: isso é grupo por causa disso, disso e disso" (E6). Mesmo não sabendo a definição de grupo, o estudante E6 tem uma ideia de que grupo é provar as propriedades. Isso fica evidente em sua resposta quando foi perguntado sobre o que é grupo: "Não lembro, eu lembro que tinha que provar 3 coisas"(E6).

Podemos afirmar que esse estudante não entende grupo como um objeto matemático definido, com características próprias e com propriedades construídas a partir dessa definição.

Com relação aos conhecimentos prévios necessários para a construção do conceito grupo, E6 também apresentou dificuldades. Não se lembrava dos símbolos $\mathbb{Z}_4$ e $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, não soube mostrar a associativa tanto em $(\mathbb{Z}_4, +)$ como em $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ .)$, além de quase sempre utilizar a operação adição ao invés de uma operação genérica.

Assim, pelas dificuldades relatadas acima e pela concepção equivocada de grupo, entendemos que o estudante possui uma *concepção ação* do conceito de grupo.

Estudante E7

Estudante do terceiro ano da licenciatura em Matemática, E7 cursou Álgebra no ano anterior à entrevista. Foi aprovado na primeira vez que fez a disciplina, apesar de não ter gostado de Álgebra. Sua justificativa foi clara:

> [...] eu faço Matemática porque quero dar aula em escola, então não me sentia muito motivada a estudar aquilo [Álgebra], porque eu acho que nunca vou usar. [...] Eu não me esforcei para aprender, porque não me sentia muito motivada, porque pra mim não fazia muito sentido. [...] eu estudei para passar de ano, não para aprender, porque não me vejo nesse contexto, sabe? (E7)

O discurso desse estudante merece uma reflexão mais profunda sobre o ensino de Álgebra em cursos de licenciatura, mas que foge ao objetivo deste artigo.

Com relação aos conceitos algébricos, E7 apresentou oito das dificuldades que listamos. Algumas dessas dificuldades estão ligadas à generalização, à simbologia, ao trabalho com conjuntos outros que não apenas os conjuntos numéricos. Por exemplo, o estudante definiu estruturas algébricas como um "conjunto dentro dos numéricos que segue algumas propriedades" (E7). E definiu grupo como um "conjunto fechado que tem elemento neutro para a soma, associatividade, comutatividade e elemento inverso" (E7). As duas definições mostram que o estudante está um pouco preso aos conjuntos numéricos e às operações mais comuns, como adição e multiplicação.

Outro exemplo dessa limitação às operações familiares pode ser visto quando perguntamos se o elemento de um grupo é único. A resposta foi: "É. É único com a operação dele. Quando é soma, é o zero. Quando é multiplicação, é o 1"(E7).

O estudante apresentou também a dificuldade *1.3 Reconhecer os símbolos que representam determinado conjunto,* pois não soube dizer qual era o conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Portanto, a noção equivocada de grupo como um conjunto, a limitação aos conjuntos numéricos e operações mais comuns, a dificuldade em reconhecer e lidar com o conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, a dificuldade em lidar com o conjunto $\mathbb{Z}_4$, nos levam a dizer que o estudante E7 possui uma *concepção ação* do conceito de grupo.

Estudante E8

Estudante de licenciatura em Matemática, E8 cursava a disciplina de Álgebra no ano da entrevista, porém parou o curso, pois "estava com muitas disciplinas, estudando para várias disciplinas e fazendo muitas provas" (E8).

Sobre o conceito de grupo, o estudante não soube dar a definição, não reconheceu o conjunto $\mathbb{Z}_4$ - apesar de relatar que o que gostou e achou fácil no curso de Álgebra foi a parte de congruência módulo m –, não soube dizer o que é cada uma das propriedades que uma operação sobre um conjunto deve gozar para ser um grupo.

As respostas dadas pelo estudante eram curtas, quase sempre negativas, indicando que não sabia responder o que era perguntado, e, ainda, não fez nenhum registro escrito. O estudante não expôs suas dificuldades com relação ao conceito de grupo, talvez por não ter realizado *ações* sobre este objeto que o levassem a interiorizar, mesmo que de forma equivocada, o conceito.

A desistência do curso pode estar ligada à dificuldade que o estudante tinha no estudo das estruturas algébricas, pois, segundo E8, "difícil foi o último conteúdo, corpos. [...] Foi aí que eu parei" (E8). Por isso, entendemos que as respostas dadas pelo estudante E8 foram insuficientes para afirmarmos qual concepção (*ação*, *processo*, *objeto*) este estudante está do conceito de grupo.

Concluindo a etapa das interpretações das dificuldades, identificando as concepções (*ação*, *processo*, *objeto*) dos estudantes, apresentamos a seguir uma tabela com as concepções (*ação*, *processo*, objeto) dos estudantes com relação ao conceito de grupo.

Tabela 2 - Concepções (*ação*, *processo*, *objeto*) dos estudantes sobre o conceito de grupo

Concepção	**E1**	**E2**	**E3**	**E4**	**E5**	**E6**	**E7**	**E8**
Concepção ação		X	X	X		X	X	?
Concepçãoprocesso					X			
Concepção objeto	X							

Dos oito estudantes entrevistados, cinco apresentaram uma *concepção ação* do conceito de grupo, de acordo com as análises que fizemos. Essa quantidade revela que mesmo após o estudo grupo, muitos estudantes permanecem com uma noção equivocada ou, muitas vezes, elementar dessa estrutura algébrica.

A seguir, apresentamos as considerações finais, em que tecemos comentários sobre os resultados obtidos nas análises.

Considerações finais

Buscávamos, nesta pesquisa, identificar e interpretar dificuldades apresentadas por estudantes de Matemática quanto aos conceitos que envolvem o estudo de grupo.

Para tanto, recorremos à teoria APOS, de Dubinsky, ligada ao pensamento matemático avançado, para nos fundamentar nesta pesquisa, pois nos permitiria perceber e interpretar dificuldades dos estudantes ao trabalharem com os conceitos abstratos de grupo.

A fim dealcançar nosso objetivo, convidamos estudantes tanto do bacharelado como da licenciatura em Matemática de uma universidade estadual do Paraná, que já haviam estudado grupos, para participar da pesquisa. Tivemos oito participantes, sendo que seis cursavam somente a licenciatura e dois cursavam licenciatura e bacharelado. Elaboramos um roteiro contendo sete perguntas norteadoras, que serviram de indagações iniciais durante as entrevistas semiestruturadas que realizamos com esses estudantes.

Identificamos vinte dificuldades, apresentadas no quadro 1, que estão divididas em três classes: três relacionadas a conjuntos, nove relacionadas a função eoito relacionadas a grupo. Isso significa que mais da metade dessas dificuldades, doze, estão relacionadas a conceitos anteriores e necessários à construção do objeto grupo, o que causa considerável defasagem na aprendizagem desse conceito.

Conforme ressaltamos durante o trabalho, o conceito de grupo pode ser entendido, segundo Brown *et al* (1997, p.192), como um *esquema* que contém três *esquemas*: conjunto, operação binária e axiomas. Assim, quando um desses esquemas não está bem construído, a aprendizagem do objeto grupo fica comprometida.

Entendemos que essas vinte dificuldades que envolvem a compreensão do conceito de grupo podem ser dividas em três tipos:

- Dificuldades com os conhecimentos prévios, conforme comentamos;
- Dificuldades causadas, possivelmente, por poucas *ações* realizadas sobre os objetos matemáticos, ou, no caso de alguns estudantes, pelo tempo decorrido após o estudo de grupo e a realização das entrevistas, o que pode causar esquecimento. Um exemplo de dificuldade causada pelo esquecimento pode ser a dificuldade 1.3 *Dificuldade em reconhecer os símbolos que representam determinado conjunto*. Durante as entrevistas, como queríamos, também, perceber a concepção (*ação*, *processo*, *objeto*) do estudante sobre o conceito de grupo, caso ele não se lembrasse da definição de grupo, discutíamos e, em alguns casos, fornecíamos a definição e algumas propriedades para estimulá-lo a expor a forma como compreende a estrutura algébrica e outros conceitos envolvidos. Dessa maneira, as entrevistas não se limitavam a perceber se o estudante se lembrava ou não das definições, mas sim como pensa o conceito de grupo, se o entende como um objeto matemático estático. Neste caso, quando a dificuldade está na compreensão do conceito, entendemos a dificuldade como sendo do terceiro tipo:
- Dificuldades ligadas à natureza abstrata do objeto matemático grupo, necessitando uma mudança cognitiva (TALL, 1995). Por exemplo, dificuldades em compreender a estrutura de grupo.

Com relação às concepções (*ação*, *processo*, *objeto*) dos estudantes que enunciamos, percebemos que a maioria dos estudantes tem ainda uma visão elementar da estrutura de grupo.

Como vimos, as construções de novos conceitos matemáticos, segundo Dubinsky (2002), procedem da abstração reflexionante definida por Piaget, em que um objeto matemático é elevado a outro patamar (reflexionamento), no qual sofrerá uma reconstrução e reorganização (reflexão) causadas pela atividade cognitiva do sujeito, criando novos objetos. Porém, percebemos nesta pesquisa que a construção do conceito de grupo exige dos estudantes a elevação a outro patamar de objetos matemáticos que, muitos deles, ainda não dominam, como é o caso de conjuntos e de funções. Além disso, percebemos, por atitudes de alguns estudantes, que a reflexão (atividade cognitiva do sujeito) necessária para criar novos objetos não está, ou pouco está, ocorrendo.Atribuímos tais dificuldades na construção desses objetos abstratos ao grande leque de conhecimento matemático que eles requerem. Com isso, a pouca maturidade matemática de alguns estudantes, isto é, a realização de poucas atividades matemáticas com objetos formalmente definidos, demonstrações, símbolos diversos em diferentes contextos, até o momento do estudo de conceitos da Álgebra, pode ser, muitas vezes, causadora de grandes dificuldades no aprendizado.

Sendo assim, pensamos que estando a Álgebra presente em cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática, devemos refletir sobre seus objetivos em cada uma dessas modalidades, no sentido de verificar se os mesmos estão, de fato, sendo alcançados. Neste sentido, acreditamos que as dificuldades listadas nesta pesquisa, bem como as concepções (*ação*, *processo*, *objeto*) dos estudantes e a maneira elementar na qual tratam objetos matemáticos abstratos, podem servir de alerta para cursos de Álgebra do Ensino Superior, apresentando-se como indicadores do que é necessário enfocar quando trabalharmos com estudantes iniciantes em Álgebra, provocando um repensar sobre a forma como estão sendo abordados seus conceitos, especialmente as estruturas algébricas.

A partir do grande número de dificuldades com conceitos prévios que listamos e das concepções (*ação*, *processo*, *objeto*) que identificamos sugerimos, assim como Dubinsky *et al* (1994, p.20-30), que no ensino de Álgebra se deva tratar com atenção os conhecimentos prévios necessários para o estudo de grupo, seja antes do início, no início ou, até mesmo, durante seu estudo.

Com exceção do estudante E1, todos os demais entrevistados apresentaram sérios problemas com conjuntos e funções, o que ratifica a afirmação de Dubinsky*et al* (1994, p.30) de que muitos estudantes vêm para cursos de Álgebra sem fortes noções de funções e mal preparados para lidar com conjuntos, o que, em nossa visão, pode levá-los à encapsulação do objeto grupo de maneira equivocada, por exemplo, acreditando que existam somente grupos multiplicativos ou aditivos, como ocorreu nesta pesquisa. Independente disso, percebemos que estudantes dão continuidade ao curso sem sanar suas dificuldades, que vão se acumulando na medida em que novos conceitos são apresentados.

Portanto, destacamos a necessidade de se ter atenção com os conceitos prévios no ensino de grupo, principalmente com conjuntos e função.

Percebemos, também, dificuldades na aprendizagem do próprio objeto grupo, não apenas dos conceitos prévios. Neste caso, pensamos que se deva trabalhar a natureza abstrata desses objetos matemáticos, a forma como são constituídos. Neste sentido, uma possível contribuição pode ser dada pela utilização da história no ensino de grupos, conforme propõe Brandemberg (2010).

Esperamos, finalmente, que o presente artigo traga contribuições ao ensino de Álgebra, seja provocando reflexões sobre seu currículo, seja auxiliando os professores ou inspirando pesquisas futuras cujo objetivo principal seja o ensino e a aprendizagem da Álgebra.

Referências

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. (1994).*Investigação Qualitativa em Educação*:uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução sob direção de Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora.

BRANDEMBERG, J. C. (2010).*Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

BROWN, A. *et al* (1997). Learning Binary Operations, Groups, and Subgroups.*Journalofmathematicalbehavior*, v.16, n.3, p.187-239.

BUENO, S. (1966). *Grande Dicionário Etimológico Prosódico da Língua Portuguesa*. São Paulo: Edição Saraiva, v.6.

BUSSMAN, C. J.de C.; SAVIOLI, A. M. P. das D. (2011). Conhecimentos Mobilizados por Estudantes do Curso de Matemática sobre o Conceito de Grupo. *Boletim Gepem*, Rio de Janeiro, n.58, p.33-49.

CAMPOS, E. (2009). *A noção de congruência algébrica no Curso de Matemática*:uma análise das respostas dos estudantes. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

DOMINGOS, A. (2006) Teorias cognitivas e aprendizagem dos conceitos matemáticos avançados. In: SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 17, 2006, Setúbal.*Anais*... Setúbal.

DUBINSKY, E. *et al* (1994). On learning fundamental concepts of groups theory. *Educational Studies in Mathematics*, v.27. Disponívelem<http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html>.Acessoem: 11 ago. 2011.

DUBINSKY, E.; MCDONALD, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergrad Mathematics Education Research. In: HOLTON, D. (Eds.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level*: An ICMI Study. Dordrecht:KluwerAcademicPublishers. p.275-282. Disponível em <http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html>. Acesso em: 11 ago. 2011.

DUBINSKY, E. (2002).Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, David. (Org.),*Advanced mathematical thinking,* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, p.95-123.

HAZZAN, O. (1999).Reducing abstraction level when learning abstract algebra concepts.*Educational Studies in Mathematics*,v.40, n.1, p.71-90.

LAJOIE, C. (2000).*Difficultés liées aus premiers apprentissages em théorie des groupes*.2000. Tese (Doutorado) – Faculté des études supérieures de l’Université Laval, Québec.

LERON, U.; HAZZAN, O.; ZAZKIS, R. (1995).Learning group isomorphism: a crossroads of many concepts.*Educational Studies in Mathematics*, v.29, n.2, p.153-174.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. (2001). *Pesquisa em Educação*: abordagens qualitativas. 6 ed. São Paulo: Pedagógica e Universitária.

MACEDO, L. (1993). O construtivismo e sua função educacional. *Educação e Realidade*, Porto Alegre, v.18, n.1, p.25-31. Disponível em: <http://www6.ufrgs.br/psicoeduc/piaget/o-construtivismo-e-sua-funcao-educacional/>. Acesso em 11 ago. 2011.

MILIES, F. C. P. (1992). Uma breve introdução à história da teoria de grupo. In: ESCOLA DE ÁLGEBRA, 12, 1992, Diamantina. *Atas*... Diamantina: Sociedade Brasileira de Matemática.

PRADO, E. A. (2010). *Alunos que contemplaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial*. 2010. 185f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

TALL, D. (1995).Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking.In: INTERNATIONAL CONFERENCE FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 19, 1995, Recife. *Anais…* Recife, v.1, p.161-175.

WEISZFLOG, W. (1998). (Org.) *Michaelis*: moderno dicionário da língua portuguesa. São Paulo: Melhoramentos.

Anexo

1) O que você gostou durante o curso de Álgebra? Gostou mais ou menos do que outros cursos, por quê? O que você gostou ou não, em particular, no âmbito das estruturas algébricas? Explique. **Fonte**: Lajoie (2000)

2) O que você entende por estruturas algébricas? **Fonte**: os autores.

3) Durante o curso de Álgebra, você se lembra de ter feito (visto) algo particularmente difíceis? Quais? E o contrário, você se lembra de ter feito (visto) algo mais fáceis? Quais? **Fonte**: Lajoie (2000)

4) Como você compararia (de modo geral) a disciplinade Álgebra às outras disciplinas do curso de matemática que você fez até o momento? **Fonte**: Lajoie (2000)

5) (i) O que é grupo? **Fonte**: Hazzan (1999).

(ii) ($\mathbb{Z}_4$, +) e (M_2 ($\mathbb{R}$), $\cdot$) são grupos? **Fonte**: os autores.

6) O conjunto $A = \{a, b, c\}$ forma um grupo em relação à tábua de operação a seguir? Explique.**Fonte**: Hazzan (1999).

$*$	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

7) a) O elemento neutro de um grupo é único?
b) O que significa o elemento neutro de um grupo ser único?
c) Prove que o elemento neutro de um grupo é único. **Fonte**: Hazzan (1999).

Recebido: 25/07/2012
Aceito em: 07/02/2013