

Multisignificados de Equação: Uma Investigação Acerca das Concepções de Professores de Matemática

Multimeanings of equation: an investigation about mathematics teachers' conceptions

YURI OSTI BARBOSA¹
ALESSANDRO JACQUES RIBEIRO²

Resumo

Apresentamos neste artigo os resultados de uma pesquisa de mestrado que buscou investigar os significados do conceito de equação que professores de matemática apresentam em sua imagem de conceito. A presente pesquisa fundamentou-se nos trabalhos de Ribeiro e de Tall e Vinner, e os dados foram coletados por meio de entrevistas semiestruturadas que contemplavam situações matemáticas acerca do conceito de equação. Dentre os principais resultados, destacamos que os professores investigados apresentaram, basicamente, em suas imagens de conceito, os significados Processual-Tecnicista e Intuitivo-Pragmático. Por fim, pretendemos, a partir de nossa pesquisa, propor reflexões que leve à uma discussão mais ampla do conceito de equação para professores de Matemática em formação inicial ou em formação continuada de Professores.

Palavras-chave: Equação. Multisignificados de Equação. Formação de Professores.

Abstract

In this paper we present the main results of a Master thesis that investigated the meanings of the concept of equation that Mathematics Teachers have in your concept image. This research was based on the work of Ribeiro and of Tall and Vinner, and the data were collected through semi-structured interviews, which contemplated mathematical situations concerning the concept of equation. Among the main results we highlight that our teachers presented, basically in their concept images, meanings Procedural-Technicist and Intuitive-Pragmatic. Finally, we plan, starting from our research, to propose reflections that will lead to a broader discussion of the concept of equation for Mathematics Teacher Education.

Key-words: Equation. Multimeaning of Equation. Mathematics Teacher Education.

Introdução

Nossa experiência como professores de Matemática na Educação Básica em escolas públicas e privadas, bem como no Ensino Superior, aponta para o fato de que, em algum momento, o sistema educacional não está funcionando de modo eficiente, pois grande

¹ Mestre em Educação Matemática. Professor da Universidade Paulista (UNIP), Jundiaí, São Paulo, Brasil. profyuribarbosa@gmail.com

² Doutor em Educação Matemática. Professor do Centro de Matemática, Computação e Cognição (CMCC), da Universidade Federal do ABC (UFABC), Santo André, São Paulo, Brasil. alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

parte dos alunos não compreende bem ideias básicas relacionadas à Álgebra, como, por exemplo, o princípio de equivalência entre os membros de uma equação. Tal impressão confirma-se à luz de resultados oficiais de avaliações como: SARESP³, ENEM⁴ e ENADE⁵.

Com base nessas reflexões e mediante inúmeras conversas com professores de Matemática no decorrer de nossa prática docente, conjecturamos uma aprendizagem que considere a epistemologia do conceito de equação, de tal forma que o aluno possa compreender melhor esse importante conceito matemático.

O professor tem sido apontado, por inúmeras pesquisas e inclusive pela mídia, como o fator de maior importância nos processos de ensino e de aprendizagem. Concordamos quanto à extrema relevância do professor nestes processos, o que nos levou a investigar de que maneira esses profissionais reconheciam e tratavam equações. A escolha pelas equações se deve à importância que ela apresenta no currículo escolar do Ensino Fundamental, Médio e Superior.

Nossa experiência docente, bem como as pesquisas que iremos discutir posteriormente, tem-nos mostrado que os alunos apresentam grande dificuldade em reconhecer e resolver equações, apresentando, de forma geral, pouco conhecimento atrelado à definição desse importante conceito matemático. Nossas reflexões e experiências levaram-nos a desenvolver uma pesquisa de caráter diagnóstico com professores de Matemática, objetivando investigar como eles reconhecem e como eles tratam o conceito de equação, quando este está inserido em situações matemáticas que contemplem diferentes significados desse conceito.

Os resultados alcançados em nossa pesquisa de mestrado, que serão discutidos neste artigo, apontam para lacunas na formação do professor e sugerem alternativas de trabalho que possam contribuir para uma melhora nesses resultados. Além disso, temos a perspectiva de poder contribuir com subsídios para que se discuta, na formação inicial e continuada de professores de Matemática, o ensino de Álgebra na Educação Básica.

O que nos dizem as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de equações

³ Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo.

⁴ Exame Nacional do Ensino Médio.

⁵ Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes.

Apresentamos a seguir alguns trabalhos que exploraram a busca de significados relacionados à Álgebra e objetivamos compor um cenário que possibilite ao leitor perceber a preocupação, nas pesquisas recentes em Educação Matemática, de propiciar um incremento das concepções de alunos e professores quanto a ideias relacionadas à Álgebra, principalmente equação.

Lima (1999) apresenta, em sua dissertação de mestrado, uma alternativa para trabalhar a resolução de equações polinomiais do terceiro grau com alunos, utilizando um método geométrico. Um dos métodos empregados pela autora em sua pesquisa foi o método histórico concebido por Omar Khayyam para encontrar as raízes de uma equação cúbica. Efetuando a decomposição da função cúbica a ela relacionada, em uma hipérbole e uma parábola, surge a intersecção dessas duas curvas, que revelam as raízes da equação cúbica. Lima (1999) constatou que, embora os alunos participantes da pesquisa apresentassem, inicialmente, preferência por trabalhar em um quadro algébrico, ao término de sua pesquisa, esses mesmos alunos passaram a considerar a opção de resolução de uma equação cúbica através de um quadro geométrico.

Dreyfus e Hoch (2004) realizaram uma pesquisa com alunos do ensino secundário em Israel, que responderam a diversas questões sobre equações. No trabalho, os pesquisadores buscaram investigar como esses alunos resolviam uma equação e observaram se eles: 1) atentavam para o aspecto estrutural, 2) atentavam para as propriedades algébricas envolvidas – o que os pesquisadores chamaram de estrutura interna de uma equação, 3) buscavam uma resolução por meio dos procedimentos de resolução (mesmo que extremamente longos), 4) utilizavam as técnicas de resolução de equação conhecidas. A referida pesquisa permitiu aos pesquisadores concluir que, embora os alunos investigados possuam relativa familiaridade com as técnicas de resolução algébrica, não têm o hábito de observar as estruturas algébricas da equação e partem, sem muita reflexão, para uma resolução procedimental.

Encontramos em Pommer (2008) a preocupação em desenvolver uma sequência didática baseada em equações diofantinas lineares, na qual o autor investigou quais conhecimentos os alunos do Ensino Médio conseguiam explicitar sobre essas equações. Tal estudo revelou que os alunos utilizam o método de tentativas como uma estratégia para a resolução das atividades e evitam, inicialmente, a aplicação de algoritmos.

Em seu trabalho, Attorps (2006) utiliza “conceito” (às vezes substituído por “noção”), quando a ideia é concebida em sua forma “oficial”, ou seja, apresentada em seu aspecto oficial, aceito pela comunidade científica. Por outro lado, as concepções constituem o

aspecto particular do conhecimento, ou seja, aquele que subjaz ao conceito e está atrelado a ele. Em nosso trabalho, utilizaremos a ideia de concepção da mesma forma que essa pesquisadora utiliza. Attorps (2006) pesquisou, com dez professores do ensino secundário, quais as concepções que eles apresentavam sobre a ideia de equação. Para tal estudo, a autora utilizou o modelo teórico de Tall e Vinner (1981) sobre *imagem de conceito e definição de conceito*. Esses professores possuíam diferentes tempos de experiência docente, e a pesquisadora acreditava que diferentes tempos de experiência docente poderiam colaborar para a construção de diferentes imagens de conceito. Dentre outras conclusões, Attorps (2006) aponta para o fato de que alguns dos professores pesquisados apresentaram elementos diferentes na definição de conceito. Outra conclusão de sua tese foi que os professores ensinavam equações da mesma forma que aprenderam e alguns desses só reconheciam uma equação quando conseguiam “resolvê-la”, ou seja, por meio das técnicas de resolução. Attorps (2006) nos revela que os significados que os professores por ela pesquisados atribuem ao conceito de equação estão bastante vinculados ao emprego de algoritmos de resolução.

Mostramos, até o presente momento, em nossa revisão de literatura, que a ampliação dos significados relativos à Álgebra — e mais especificamente à equação — é uma preocupação legítima da comunidade acadêmica. Essa busca por significados em equações levou diversos pesquisadores a investigar como ampliar os significados atribuídos pelos alunos a esse conteúdo matemático.

Considerando as reflexões propiciadas pela revisão de literatura que acabamos de desenvolver e também o fato de a presente pesquisa ter sido desenvolvida como uma dissertação de mestrado em Educação Matemática, o objetivo geral de nossa pesquisa buscou *investigar as imagens de conceito de professores de matemática, quanto à forma de ver, interpretar e tratar situações-problema que envolvam a ideia de equação*, observando se existe alguma relação entre essas imagens de conceito e os Multisignificados de Equação.

Fundamentos teórico-metodológicos da pesquisa

i) Fundamentos teóricos

Nosso artigo está fundamentado nos resultados da tese de doutoramento de Ribeiro (2007), no que se refere aos diferentes significados do conceito de equação. Os resultados da referida tese possibilitaram a concepção e o desenvolvimento do desenho

metodológico de nossa pesquisa. Por outro lado, utilizamos as noções de *definição de conceito* e *imagem de conceito* (TALL e VINNER, 1981) nas análises dos dados coletados.

O trabalho de Ribeiro (2007) parece nos trazer uma nova abordagem para o ensino de equação, uma vez que coloca o foco nos diferentes significados que o conceito de equação pode assumir nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática. No referido trabalho foram investigados, por meio de um estudo epistemológico e de um estudo didático, como diferentes povos, em diferentes épocas históricas, entendiam e utilizavam o conceito de equação. Com isso, a partir de suas análises, Ribeiro (2007, p. 127-128) concebeu os “Multisignificados de Equação”, a saber: Intuitivo-Pragmático, Dedutivo-Geométrico, Estrutural-Generalista, Estrutural-Conjuntista, Processual-Tecnicista e Axiomático-Postulacional”. A Tabela 1 procura sintetizar as principais ideias referentes a cada um dos significados que compõem os Multisignificados de Equação:

Tabela 1 — Significados de equação e suas características

Significado	Características
Intuitivo-Pragmático	Equação concebida como noção intuitiva, ligada à ideia de igualdade entre duas quantidades. Utilização relacionada à resolução de problemas de ordem prática, originários de situações do dia a dia.
Dedutivo-Geométrico	Equação concebida como noção ligada a figuras geométricas, segmentos e curvas. Utilização relacionada a situações envolvendo cálculos e operações com segmentos, com medida de lados de figuras geométricas e intersecção de curvas.
Estrutural-Generalista	Equação concebida como noção estrutural definida e com propriedades e características próprias, considerada por si própria e operando-se sobre ela. Utilização relacionada com a busca de soluções gerais para uma classe de equações de mesma natureza.
Estrutural-Conjuntista	Equação concebida dentro de uma visão estrutural, porém diretamente ligada à noção de conjunto. É

	vista como uma ferramenta para resolver problemas que envolvam relações entre conjuntos.
Processual-Tecnicista	Equação concebida como a sua própria resolução – os métodos e as técnicas que são utilizadas para resolvê-la. Diferentemente do significado estruturalista, a equação aqui não é vista como um ente matemático.
Axiomático-Postulacional	Equação concebida como noção da Matemática que não precisa ser definida, uma ideia a partir da qual outras ideias, matemáticas e não matemáticas, são construídas. Utilizada no sentido de noção primitiva, como ponto, reta e plano na Geometria Euclidiana.

Fonte: adaptado a partir da tabela apresentada em Ribeiro (2007, p. 127-128).

Cada significado do conceito de equação, apresentado por Ribeiro (2007), foi categorizado com nome composto, apresentando assim, diferentes perspectivas de reconhecer e de tratar uma equação. A presença dessa relação entre o “ver” (reconhecer e interpretar uma equação) e o “fazer” (tratar uma equação), em diferentes povos, ao longo da história da humanidade, bem como em livros didáticos e em pesquisas de Educação Matemática, trouxe alguns dos elementos necessários para a concepção dos Multisignificados de Equação. Ressaltamos que, quando mencionamos “ver”, estamos nos referindo à forma de reconhecer e interpretar uma equação, enquanto “fazer” se refere à forma de tratá-la.

Para nos auxiliar na compreensão das concepções dos professores por nós investigados, utilizamos o trabalho de Tall e Vinner (1981), no qual são apresentados *imagem de conceito* e *definição de conceito*. Segundo esses autores, *definição de conceito* são os conhecimentos que o indivíduo possui, os quais permitem a ele explicar aquela ideia matemática, inclusive podendo esta definição de conceito divergir da definição aceita academicamente. Por outro lado, *imagem de conceito* é a estrutura cognitiva total, construída no decorrer do tempo, por meio de todas as formas de experiências vivenciadas e que apresenta todos os elementos que, de alguma forma, estão ligados à definição de conceito e, justamente por isso, a enriquece, tornando-a mais significativa.

ii) Metodologia adotada

Nossa pesquisa foi desenvolvida na perspectiva de um estudo qualitativo, no qual estávamos interessados em investigar quais significados do conceito de equação estavam

presentes nas concepções de professores de Matemática. Assim, optamos por realizar entrevistas semiestruturadas, as quais foram conduzidas com o auxílio de um instrumento de coleta de dados especialmente elaborado para tal finalidade. Para compor o referido instrumento, elaboramos ou selecionamos situações matemáticas que contemplavam ou propiciavam o surgimento dos diferentes significados de equação (RIBEIRO, 2007). Entendemos que a metodologia por nós adotada foi apropriada, pois permitiu maior flexibilidade no desenvolvimento e na condução das entrevistas.

Os professores que participaram da pesquisa possuíam diferentes tempos de experiência docente, bem como diferentes percursos profissionais e acadêmicos. Neste trabalho, apresentamos a análise de dois desses professores: (i) Professor A: sexo masculino, 52 anos, leciona a disciplina de Matemática há 20 anos e tem atuado tanto no Ensino Médio como no Fundamental II na rede pública estadual de São Paulo, possui duas graduações (Licenciatura Plena em Matemática e Ciências Contábeis), é especialista em Ensino de Matemática; (ii) Professora C: sexo feminino, 41 anos, leciona a disciplina de Matemática há 16 anos — a maior parte do tempo no Ensino Fundamental II —, é efetiva na rede pública estadual de São Paulo, possui duas graduações (Licenciatura Curta em Matemática e Licenciatura Plena em Matemática).

As entrevistas foram presenciais e audiogravadas, por acreditarmos que muitos elementos que compõem as concepções desses professores poderiam não se revelar apenas com o instrumento escrito, sendo preciso, então, uma sondagem verbal por parte do pesquisador, instigando-os a falar sobre suas concepções acerca das situações matemáticas a eles apresentadas.

De acordo com a perspectiva adotada, ao longo das entrevistas semiestruturadas, os itens da primeira atividade poderiam ser apresentados aos professores em outra ordem, diferente da indicada no próprio instrumento, e, segundo a dinâmica da entrevista, poderia, inclusive, ser suprimido um ou outro item. O professor que optasse por assim fazer, poderia parar a execução de algum item e retomá-lo posteriormente, enquanto ele ainda estivesse realizando a atividade 1.

Como discutido anteriormente, nossa pretensão com o instrumento de coleta de dados era levantar subsídios que nos possibilitassem investigar se — e, em caso positivo, quais — os diferentes significados que compõem os Multisignificados de Equação (RIBEIRO, 2007) estavam presentes nas imagens de conceitos dos professores que entrevistamos.

Esse instrumento foi idealizado e concebido para ser utilizado em dois momentos distintos e com duas diferentes atividades: a primeira delas buscou investigar se os

professores reconheciam equações nas situações matemáticas apresentadas e como eles as tratavam; na segunda atividade, buscamos retomar a primeira, aprofundando a investigação sobre a questão do reconhecimento de uma equação em uma das situações matemáticas postas.

Os professores puderam utilizar quanto tempo fosse necessário para desenvolver cada situação de cada uma das atividades. As intervenções por parte do pesquisador ocorreram apenas nos momentos em que o professor manifestou o desejo de desistir da busca por solução, deixando a resposta “em branco” ou incompleta, para passar à situação seguinte; ou, ainda, quando o pesquisador acreditou que outros elementos/informações poderiam emergir de sua imagem de conceito.

(iii) Análises preliminares das atividades utilizadas na coleta de dados

O instrumento de coleta de dados foi concebido especificamente com o intuito de investigar quais significados de equação estão presentes nas imagens de conceito dos professores de Matemática, ao ver, interpretar e tratar situações-problema relacionadas à equação. É composto por duas atividades subdivididas em itens: a primeira, com 12 itens e a segunda, com 2. Cada situação apresentada aos professores, ou foi elaborada especificamente para a presente pesquisa, ou adaptada de outras fontes, como livros e dissertações de mestrado.

Devido às restrições inerentes à natureza de um artigo científico, apresentaremos apenas algumas das situações matemáticas da dissertação a partir da qual nosso artigo foi desenvolvido. Procuramos explicitar os objetivos de cada uma delas, bem como destacar o papel de cada atividade/situação matemática no contexto de nosso instrumento de coleta de dados.

Atividade 1. Observe as situações a seguir e responda o que se propõe em cada uma delas:

Essa atividade tinha por objetivo investigar a forma pelo qual o professor trata uma equação e, em Barbosa (2009), encontra-se dividida em 12 situações, das quais três serão discutidas no presente trabalho. Vale ressaltar que cada situação matemática “remete” a um significado de equação ou à interação de dois significados. Apresentamos a análise preliminar dessas situações, em que consideramos o objetivo de cada uma e o significado ao qual entendemos que a situação matemática é “remetida”.

a) ⁶ **Determine os valores de y para os quais a expressão $(y-1)^2$ é igual a $-4y$.**

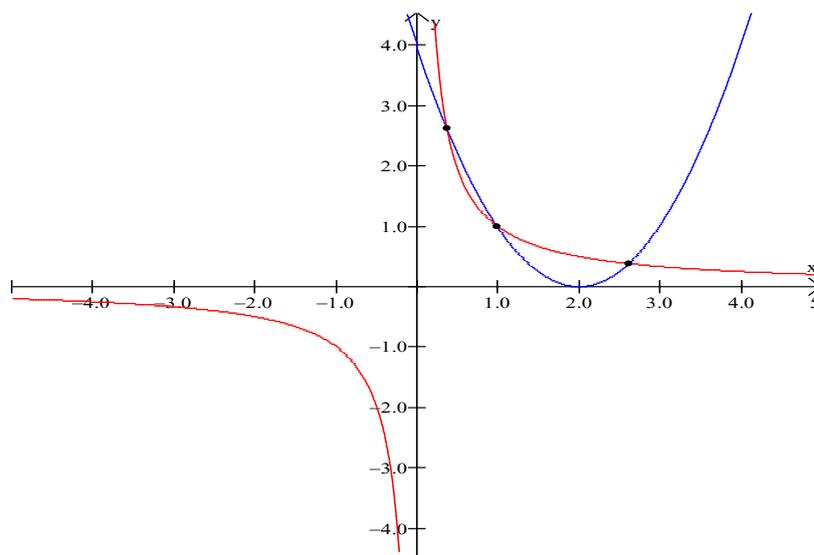
O objetivo desta situação foi apresentar ao professor uma situação matemática que contemplasse uma equação polinomial do segundo grau. Acreditamos que essa situação seja uma representante do significado Processual-Tecnicista. A forma pela qual ela é apresentada no enunciado da situação parece-nos indicar o imediato emprego de técnicas de manipulações algébricas que podem facilitar o trabalho de busca por sua solução. Algumas dessas técnicas ainda podem propiciar uma economia de tempo e esforço.

k) **Resolva a sentença matemática abaixo, encontrando o(s) valor(es) de x^7 .**

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} = 1$$

O objetivo desta situação foi propor ao professor uma situação que remetesse ao significado Estrutural-Generalista, uma vez que está explícita uma expressão matemática cuja resolução exige a observância de propriedades estruturais da Álgebra.

l) **O poeta, filósofo e matemático árabe Omar Khayyam descobriu uma forma de resolver alguns problemas matemáticos que, na época, pareciam impossíveis de serem resolvidos. Abaixo está apresentada a maneira como Khayyam tratava o problema matemático em questão. Afinal, de qual problema estamos falando e que ajudou a Omar Khayyam se tornar uma importante figura na história da Matemática?**⁸



⁶ As letras e números utilizados para identificar cada atividade foram os mesmos utilizados na dissertação que gerou o referido artigo (BARBOSA, 2009).

⁷ Essa atividade foi retirada da pesquisa de Dreyfus e Hoch (2004).

⁸ Essa atividade foi adaptada da Dissertação de Mestrado de Lima (1999).

O objetivo desta situação foi apresentar ao professor uma situação matemática que remetesse ao significado Dedutivo-Geométrico, pois abordava uma situação envolvendo a intersecção de curvas. Pretendíamos, assim, investigar se o professor reconhecia que uma intersecção de curvas é uma das formas de representar uma equação. Optamos por não chamar a atenção, no enunciado desta situação, para os pontos de intersecção entre a parábola e a hipérbole, pois pretendíamos justamente investigar se os professores atentariam para aqueles pontos de forma “natural”. Porém, caso isso não ocorresse, o pesquisador, durante a entrevista, poderia perguntar ao professor o que tais pontos lhe sugeriam. Dessa maneira, pretendíamos oferecer uma situação que contemplasse uma equação representada geometricamente, que pode ser reconhecida e modelada como uma equação cúbica (“ver”), e tratada de forma dedutiva (“fazer”).

Atividade 2a. Existe um objeto matemático que está presente em algumas das situações da Atividade 1. Qual é este objeto matemático e em quais situações ele está presente? Justifique como você chegou a esta conclusão.

Essa atividade pretendia investigar se o conceito de equação se manifestaria na imagem de conceito dos professores entrevistados de forma “natural”. Queríamos observar se eles consideravam equação como um objeto matemático e, em caso afirmativo, em quais das situações apresentadas na atividade 1 isso aconteceria. Enfim, pretendíamos investigar se os professores reconheceriam equação nas situações apresentadas.

Atividade 2b. O objeto matemático ao qual nos referimos na Atividade 2a é EQUAÇÃO. Retomando as situações da Atividade 1, em quais delas você reconhece este objeto matemático? Justifique sua resposta.

Esta atividade procurou verificar se, ao declarar que o objeto matemático em questão era o conceito de equação, os professores reconheceriam em quais situações matemáticas ela estava contemplada e se apresentariam suas justificativas. Ao analisar tais justificativas, acreditávamos encontrar – ainda que de forma implícita – os diferentes significados que podem ser atribuídos à equação – Multisignificados de Equação (RIBEIRO, 2007). Esta atividade, em nosso entendimento, se fez necessária, uma vez que os professores poderiam não reconhecer uma equação como um objeto matemático na atividade 2a. Por outro lado, esta atividade poderia se fazer desnecessária, caso os professores reconhecessem e utilizassem o objeto matemático equação na atividade anterior.

Discutindo os resultados

Optamos, como já afirmamos, por apresentar aqui a análise de apenas dois professores que participaram da pesquisa. No intuito de preservar o anonimato dos docentes entrevistados, utilizamos aleatoriamente letras maiúsculas de nosso alfabeto para identificá-los. Nos protocolos das entrevistas, toda vez que houver referência ao pesquisador, será utilizada a letra “P”. No presente artigo, optamos pelas análises dos professores A e C, e manteremos a mesma nomenclatura utilizada em Barbosa (2009). Utilizaremos, no decorrer de nossas análises, as letras PR, para representar os protocolos obtidos a partir da entrevista com os professores; e TE, para representar as transcrições das entrevistas, obtidas por meio da audiogravação das entrevistas.

Análises da atividade 1

a) Determine os valores de y para os quais a expressão $(y-1)^2$ é igual a $-4y$.

Professor A

Esse professor reescreveu a equação em sua base canônica; procedeu à resolução, utilizando a fórmula de Báskara, que foi empregada corretamente; e revelou estar bem adaptado a essa ferramenta matemática. Com o intuito de investigar como esse professor reconheceria a equação apresentada, o pesquisador perguntou a ele sobre o procedimento utilizado para justificar o fato de $-4y$ “aparecer” do outro lado do sinal de igual como $+4y$:

A: Ahã, usando a propriedade da adição, é essa a propriedade da adição? Tá, porque é erroneamente você falar que se passa de um lado para o outro com a troca de sinal, tá? Normalmente isso aqui se usa, usa a ... usando a propriedade da adição, tá? O que é que eu faço, quando eu quero eliminar um lado, tá? Você faz a soma do outro lado, como assim... usando a propriedade da multiplicação que você usa para fazer no primeiro membro, o que você faz, a multiplicação que você usa para fazer no primeiro membro, você faz no segundo membro também.

TE 1

Observando a transcrição acima, percebemos que o professor parecia não demonstrar muita segurança em suas afirmações, pois teve dificuldade em expressar seus conhecimentos sobre as propriedades algébricas envolvidas. Ele procurou falar sobre as propriedades algébricas de oposto aditivo, inverso multiplicativo e princípio de equivalência. Revelou, em seu depoimento e em sua resolução, que dominava a utilização da fórmula de Báskara, como uma técnica de resolução de equação polinomial do 2º grau. Embora esses elementos se encontrassem “meio desorganizados” em sua imagem de conceito, ele revelou ser conhecedor de algumas propriedades algébricas envolvidas no processo.

Isto nos indicou que os elementos que emergiram da imagem de conceito desse professor parecem nos mostrar que o significado de equação Processual-Tecnicista estava presente em sua imagem de conceito. Contudo, vale observar que a parte da relação que implica em reconhecer uma equação por meio de um processo parece mostrar-se um pouco deficiente. Tal fato se evidencia na transcrição acima, na qual o professor, embora tivesse resolvido com bastante desenvoltura a equação, não conseguiu explicitar e explicar, com clareza, o processo por ele utilizado.

Professor C

O professor C demonstrou segurança ao resolver esse item. Primeiro trabalhou a situação matemática, de forma a escrevê-la na base canônica de uma equação do 2º grau, e posteriormente utilizou a fórmula de Báskara para encontrar as raízes da equação. A fórmula de Báskara foi empregada corretamente, e o professor mostrou estar bem adaptado a essa ferramenta matemática. Quando solicitado, pelo pesquisador, que explicasse o que ele havia feito na resolução desse item, o professor justificou, dizendo que havia utilizado “a distributiva” e “Báskara”, conforme transcrição a seguir:

C. Igualdade, e tive que aplicar a distributiva também, né? Potenciação, com igualdade, eu coloquei produto notável, depois Báskara, equação do segundo grau.

TE 4

O professor nos revelou, em seu depoimento, e em sua resolução, que possuía domínio ao utilizar a fórmula de Báskara como uma técnica de resolução de equação polinomial do 2º grau. Além disso, demonstrou conhecer algumas propriedades algébricas envolvidas no processo.

Os elementos que emergiram da imagem de conceito desse professor parecem nos revelar que o significado de equação Processual-Tecnicista está presente em sua imagem de conceito. Porém, a pouca fluência e o embaraço ao explicitar o processo utilizado deixaram visível alguma dificuldade em reconhecer uma equação na perspectiva desse significado, ou seja, reconhecer a equação a partir do reconhecimento de todo o processo de resolução empregado por ele.

Item k

k) Resolva a sentença matemática abaixo, encontrando o(s) valor(e)s de x.

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} = 1$$

Professor A

O professor A se mostrou bastante confuso e, após breve análise, alegou que o item ficaria muito longo:

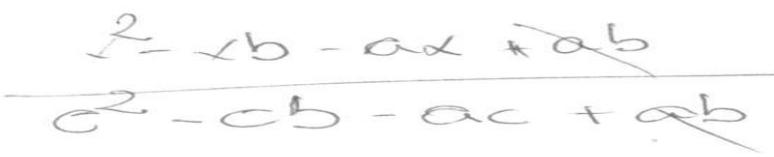
A: *Esse vai ser longo para...*

P: *O que você faria que ficaria tão longo?*

A: *Resolver o produto? Depois, aí... a simplificação, peguei, olhando o numerador com denominador eu não consigo fazer a simplificação, tá, oh, direto eu não consigo fazer, a simplificação. Aqui teria que resolver para fazer a simplificação, para achar o valor de x, tá? Porque se eu tenho condições de ter a igualdade para fazer a simplificação, aí é simplificar depois você faz o produto, sabe? Que aqui é um produto. Então aí eu não... condições de fazer nem nada de simplificação, tenho de resolver esse produto, tá? Resolver esse e resolver esse, aí resolvendo esse eu vou achar os termos semelhantes para poder simplificar, ou não?*

TE 17

O protocolo 20 revela o que o professor estava escrevendo, enquanto travava este diálogo com o pesquisador:



The image shows a handwritten mathematical expression on a white background. It consists of two lines of terms separated by a horizontal line. The top line contains the terms $2 - \sqrt{b} - ax + ab$. The bottom line contains the terms $2 - cb - ac + ab$. The terms ab in both lines are crossed out with a diagonal line, indicating a cancellation attempt.

PR 20

Ao analisar as respostas do professor, podemos perceber que ele tentou observar as estruturas da equação e evitou partir para uma resolução muito longa. Como seus conhecimentos algébricos se mostraram insuficientes para resolver a questão, ele passou a incorrer em erros de simplificação. Apesar de possuir um “olhar” para as estruturas da equação, os conhecimentos que o professor possuía, naquele momento, não permitiram que ele resolvesse tal atividade.

Professor C

O professor C também pareceu bastante confuso quanto a esse item. Após uma breve análise, ele alegou que faria o M.M.C. (Menor Múltiplo Comum), o que tornaria o desenvolvimento do item muito longo. Observemos o diálogo abaixo:

C. MMC, aí corta os denominadores.

C. Não pode ser assim, se não fica muito longo, na verdade não é por aqui, não é por aqui, não é por aqui porque fica muito longo, o que eu posso... já vi um exercício parecido com esse, mas... igualado a um.

TE 20

Fica evidente que ele reconheceu que a “tradicional” abordagem tecnicista não seria a mais adequada para resolver esse item, porém não foi capaz de explicitar uma estratégia que contemplasse um “olhar” para as estruturas dessa equação.

Análises da atividade 2a

Professor A

O professor A destacou como objetos matemáticos fórmulas, conceitos e propriedades. Tal fato nos revela um importante elemento, presente em sua imagem de conceito, que associa objetos matemáticos ao processo de resolução das situações matemáticas, evidenciando a tendência de associar o objeto matemático com o processo de resolução, corroborando, assim, a concepção de Attorps (2006), já discutida no presente artigo.

O professor A declarou ainda que havia deixado de resolver alguns itens da atividade 1 por ter esquecido das fórmulas necessárias. Mostrou-se bastante dependente da utilização de algoritmos para a resolução das atividades e, quando não se recordava de um procedimento adequado, encontrava grande dificuldade de utilizar outros meios para a resolução das situações apresentadas.

A: *Eu acho que... quer ver? No que eu, é lógico que eu não ia lembrar, tá? Se vê, eu esqueci fórmulas, tá? Por isso que tem coisas que eu não consegui resolver, eu... não consegui assimilar, o que realmente, eu estava precisando para desenvolver o exercício, qual foi a dificuldade, se vê, quando envolveu as fórmulas que eu tinha conhecimento foi rápido o exercício, tá? Então aí é que é, hoje é o processo que a gente trabalha, tudo é um mecanismo que você tem que conhecer, ter conhecimento da Matemática, dos o quê? Das regras, das regras, das propriedades, tá? Aí você fala... eu comecei desenvolver, quando você falou uma coisa no exercício que eu estava fazendo da porcentagem, tá? Na hora que cheguei na coisa, eu lembrei do logaritmo, tá? Se você não conhece a propriedade do logaritmo, você também não desenvolve o exercício, por que qual foi o conhecimento que eu usei, usando a propriedade, de quê? Da potenciação de logaritmo.*

TE 21

Professor C

O professor C destacou como objetos matemáticos álgebra, aritmética e geometria. Da mesma forma que o professor A, o professor C não mencionou o objeto matemático

equação em nenhum momento. Enfim, os dois professores entrevistados se mostraram confusos quanto ao termo “objeto matemático”, o que ratificou a necessidade da atividade 2b.

Atividade 2b

Considerando que os professores participantes da pesquisa não reconheceram equação como um objeto matemático na atividade 2a, na presente atividade eles retomaram as situações da atividade 1, após ter sido explicitado a eles que o objeto matemático em questão era o conceito de equação.

Professor A – Situação a

O professor reconheceu uma equação permeando este item e, para justificar sua posição, associou equação às técnicas e aos algoritmos de resolução, como podemos perceber na transcrição abaixo:

A: Certo? Que foi resolvido aqui uma equação, tá? Então foi... enxergada como uma equação, tá? Então aí é que tá, oh: usei a equação, o conhecimento da equação e o conhecimento da propriedade, eu não fiquei colocando... resolvendo a potenciação, eu já fui direto naquela fórmula: quadrado do primeiro, duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo, tá? Então aqui eu ponho o quê? É... foi visto como uma equação e resolvido.

TE 22

Professor C – Situação a

O professor C também reconheceu uma equação permeando o item e, para justificar sua posição, fez a mesma associação da equação às técnicas e algoritmos de resolução. A transcrição abaixo deixa claro esse processo:

É, então a letra a é uma equação do segundo grau com uma incógnita, o y onde eu desenvolvi, e achar o valor de y, os valores.

TE 23

Professor A – Situação k

O professor relacionou, nesse item, equação com procedimentos de resolução, mas ficou em dúvida se o item apresentava uma equação ou não, e perguntou ao pesquisador se poderia colocar como resposta a palavra “dúvida”. Vejamos o diálogo abaixo:

A: OK, eu fiquei na dúvida... eu vou pôr assim, oh! "Dúvida", posso pôr?
P: Qual é a dúvida do senhor?
A: A dúvida é que eu não consegui visualizar como é que eu ia resolver esse exercício.
P: Mas é uma equação ou não é uma equação?
A: Sim, porque ela está pedindo o valor de x . Se está pedindo o valor de x , então está trabalhando com uma equação. Agora o tipo de equação eu não consegui visualizar o modo de resolver, tá? Então eu vou pôr assim: não... ou poderia ter resolvido através da propriedade distributiva e resolvido o exercício, tá? Aí seria o caminho mais longo, iria resolver pelo caminho mais longo, porque aí eu poderia ter resolvido, feito a adi... o produto, feito a adição, tá? E fazendo a multiplicação, depois eu iria fazer a multiplicação, eu iria pelo caminho mais longo, aí eu ia resolver, tá? Então... sim?

TE 38

Observando a transcrição acima, podemos apontar para o fato de que o professor A, ao classificar a situação matemática como equação ou não equação, buscou justificativas relacionadas aos procedimentos para sua resolução. Outro fato que nos chamou a atenção foi a necessidade apresentada pelo professor de adjetivar a equação.

Professor C – Situação k

O professor relacionou, neste item, uma equação à existência de incógnitas e de uma igualdade.

C. A k , a k , acho que também.
P. Também, porque que ela é uma equação?
C. Porque tem variáveis, uma igualdade.

TE 39

Professor A – Situação l

O professor reconheceu o gráfico de duas funções na situação apresentada a ele, manifestadas por uma função do segundo grau e por uma função logarítmica:

A: Bom, eu estou enxergando aqui uma equação do segundo grau, tá? Uma equação do segundo grau, eu estou vendo logaritmo, tá? Por que aqui eu tenho logaritmo, o que eu tô enxergando aqui é isso, tá?

TE 40

O professor A associou a situação matemática apresentada nesse item a uma função quadrática e uma função logarítmica. Ele não reconheceu uma hipérbole na situação apresentada e buscou, em sua imagem de conceito, elementos que pudessem ajudá-lo a justificar o reconhecimento que fez para a referida curva. Ao reconhecer o ponto de coordenadas (1,1) como pertencente ao gráfico da função, ele se recordou que uma função

logarítmica diz “*algo sobre a curva sempre passar em 1*”. O professor não associou os pontos de intersecção das curvas apresentadas como senod as raízes de uma equação polinomial do terceiro grau. Nesse item, o professor relatou que sim, existia uma equação permeando o item, porém reconheceu que essa equação se manifestava nos gráficos das funções das curvas apresentadas na situação matemática, as quais ele identificou como uma função do 2º grau e uma função logarítmica. Podemos perceber essa relação estabelecida pelo professor A entre equação e função, ao analisar o seguinte protocolo:

l) Sim, acude visualizei as funções de logaritmos e do 2º grau.

O professor reconheceu na situação apresentada a ele: as curvas de uma função e um sistema de equações, conforme observamos no protocolo 43:

Podemos trabalhar funções, num sistema, o ponto de encontro entre duas retas.

PR 43

O professor C reconheceu, nas intersecções das curvas apresentadas nesse item, a possível representação de um sistema de equações. Esse fato gerou certa insegurança, uma vez que ele só conhecia esse tipo de representação quando relacionadas equações do 1º grau com duas variáveis:

C. Em retas. Aqui é uma parábola, né? Esses pontos, como eu posso explicar? Onde o evento acontece? Nessa parábola, nessa função, em azul e na vermelha.

TE 44

Enfim, o professor relatou que sim, existia uma equação permeando o item e ela se relacionava aos gráficos das funções das curvas apresentadas na situação matemática e através de um sistema de equações. O fato deste professor associar a situação apresentada à um sistema de equações, parece indicar que ele fez uma associação com a resolução de um sistema de equações do primeiro grau com duas incógnitas por meio da intersecção de duas funções lineares, o que normalmente é trabalhado na Educação Básica.

- C. *Equac... é... uma função, equação se for uma reta, se forem retas.*
P. *Se fossem retas, você teria equações?*
C. *Não, mesmo uma equação, equação, é uma equação.*
P. *Então, nesse caso, você também tem equação?*
C. *Tem.*

TE 45

Considerações finais

Buscamos, em nossa pesquisa de mestrado, investigar quais significados de equação (RIBEIRO, 2007) estão presentes nas concepções dos professores de Matemática, ao ver, interpretar e tratar situações-problema relacionadas à equação. Para isso, desenvolvemos uma pesquisa de caráter qualitativo, composta por entrevistas semiestruturadas, nas quais os professores participantes buscaram resolver duas atividades elaboradas especificamente para nossa coleta de dados. O objetivo da primeira atividade foi levantar informações que nos revelassem de que forma os professores tratavam situações matemáticas que remetem ao conceito de equação. A segunda atividade teve por objetivo investigar se os professores reconheciam uma equação, permeando algumas das situações matemáticas contempladas na primeira atividade.

Nossa perspectiva de pesquisa permitiu-nos uma maior flexibilidade quanto à utilização do instrumento de coleta de dados, possibilitando ao pesquisador intervir sempre que necessário. Vale lembrar que utilizamos as noções de “Multisignificados de Equação” e de “Imagem de Conceito e Definição de Conceito” em nossas análises. Nosso estudo revelou que os professores por nós investigados utilizam corretamente as técnicas envolvidas na resolução de equações. Contudo, sentem dificuldades para explicar os procedimentos utilizados. Assim, ratificamos algumas das considerações apontadas em pesquisas sobre a formação do professor que ensina Álgebra, nas quais são apontadas que alunos da Licenciatura em Matemática se ressentem de uma abordagem de ensino, nos primeiros anos da graduação, que explique um pouco dos porquês envolvidos nas soluções de atividades em Álgebra Básica.

A constatação de que os professores utilizam corretamente as técnicas de manipulações algébricas, porém não compreendem muito bem o processo, parece ainda corroborar também os resultados da pesquisa desenvolvida por Dreyfus e Hoch (2004). Os professores de nossa pesquisa, assim como os sujeitos investigados por estes últimos pesquisadores, não reconhecem a estrutura interna da equação, como o princípio de equivalência, e utilizam manipulações algébricas.

Constatamos que apenas um dos significados que compõem os Multisignificados de Equação está, efetivamente, presente na imagem de conceito dos professores participantes da pesquisa: o significado Processual-Tecnicista. Contudo, este ainda se mostra pouco estruturado na imagem de conceito desses indivíduos, uma vez que conflitos cognitivos surgiram no momento em que esses professores buscavam justificar as técnicas de resolução utilizadas. Ao buscar identificar quais significados de equação (RIBEIRO, 2007) estavam presentes na imagem de conceito dos professores participantes da pesquisa, outros elementos se manifestaram. Um deles, podemos dizer, é o fato de o conceito de equação estar vinculado a um algoritmo de resolução, o que vem corroborar os resultados da pesquisa de Attorps (2006): ela relata que alguns dos professores por ela investigados só reconheciam uma equação quando conheciam um algoritmo de resolução para aquela situação.

Outro elemento bastante contundente na imagem de conceito dos professores de nossa pesquisa é o fato de o conceito de equação estar vinculado – quase exclusivamente – ao conceito de incógnita. Isso parece indicar, uma vez mais, que esses professores relacionam o conceito de equação a um algoritmo de resolução, ou seja, “achar o valor de x ”. Por outro lado, o conceito de igualdade não parece estar tão presente quanto ao de incógnita, uma vez que o primeiro raramente foi mencionado como um “elemento” central para o conceito de equação. Pudemos, assim, observar que o princípio de equivalência entre os membros de uma equação não está presente em suas imagens de conceito, pois os professores relatam que “o que você faz de um lado tem que fazer do outro”, como alguém que recita mais uma “regra decorada”, sem ser capaz de explicar essa regra.

Assim, baseados nessas evidências, percebemos em nossa pesquisa que a presença de diferentes significados de equação na imagem de conceito dos professores ainda é bastante limitada. O conceito de equação está, normalmente, muito vinculado à técnicas de resolução e à existência de incógnita. A partir destas constatações, esperamos contribuir com nossos colegas, professores de Matemática, ao levantar reflexões quanto aos significados que normalmente atribuímos ao conceito de equação e às possibilidades de ampliação de nossas imagens de conceito. Em nosso ponto de vista, tal ampliação pode possibilitar compreender melhor, e de forma mais ampla, os diferentes significados do conceito de equação.

Investigar a imagem de conceito de indivíduos não é uma tarefa fácil. Buscamos, no decorrer de todo o trabalho, respeitar a individualidade e os limites dos professores

envolvidos e ser o mais honestos e imparciais possível. A utilização de uma metodologia de pesquisa pautada em entrevistas semiestruturadas pareceu-nos a mais adequada às nossas ambições de pesquisa. Precisávamos de um instrumento que nos desse a necessária flexibilidade para “percorrer” partes da imagem de conceito dos professores e resgatar o máximo de informações que eles pudessem nos revelar.

Por fim, acreditamos que, a partir dos resultados de nossa pesquisa, a discussão dos Multisignificados de Equação possa tomar lugar nos cursos de formação inicial e continuada de professores, fornecendo, assim, uma eficaz ferramenta para ampliar a imagem de conceito desses professores, no que se refere a esse importante conceito algébrico.

Referências

ATTORPS, I. (2006) *Mathematics teachers' conceptions about equations*. (Thesis in Applied Education) – University of Helsinki, Helsinki, 2006. 250 p.

ATTORPS, I. (2003) *Teachers' Images of the 'Equation' Concept*. In: European Research in Mathematics Education, 3., 2003. Disponível em: <http://ermeweb.free.fr/cerme3/groups/tg1/tg1_list.html>. Acesso em: 15 dez. 2006, às 19h53.

BARBOSA, Y. O. (2006) *Estudando as concepções de equação de alunos das últimas séries do Ensino Fundamental*. Iniciação Científica – Universidade Paulista, São Paulo, 2006. 60 p.

_____. (2009) *Multisignificados de equação: uma investigação sobre as concepções de professores de Matemática*. 2009, 196 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.

DREYFUS, T.; HOCH, M. (2004) Equations: A structural approach. *Proceedings of the 28th Conference of International Group for the PME*, 2004, p. 1-152–1-155.

LIMA, R. N. (1999) *Resolução de equações de terceiro grau através de cônicas*. São Paulo, 1999. 173 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

POMMER, W. M. (2008) *Equações diofantinas lineares: um desafio motivador para alunos do Ensino Médio*. 2008. 153 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

RIBEIRO, A. J. (2007) *Equação e seus multisignificados no ensino de Matemática: contribuições de um estudo epistemológico*. 2007. 141 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

TALL, D.; VINNER, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, n. 12, p. 151-169, 1981.

Recebido em 18/10/2012

Aceito em 2/5/2013