

Un estudio de los errores de alumnos de ingeniería sobre ecuaciones diferenciales

Um estudo de erros de estudantes de engenharia em equações diferenciais

CLAUDIA MARIELA ZANG¹
GRETEL ALEJANDRINA FERNÁNDEZ VON METZEN²
MARÍA NATALIA LEÓN³

Resumen

En el presente trabajo se analizan las respuestas dadas por los alumnos de carreras de ingeniería al resolver ecuaciones diferenciales en el marco de un campo direccional, a fin de recabar información acerca de los conocimientos que los mismos ponen en juego al resolverlas y que se manifiestan de manera indirecta a través de sus producciones. Se reconoce que para el docente es importante el análisis de los errores como mecanismo proveedor de información sobre la forma en que los estudiantes interpretan los problemas y cómo utilizan diferentes procedimientos, también como elemento disparador para la reformulación de prácticas pedagógicas. El análisis realizado refleja las dificultades que tienen para obtener información al usar un enfoque cualitativo (gráfico), así como la preferencia por los métodos analíticos de resolución.

Palabras clave: ecuaciones diferenciales, errores, obstáculos

Resumo

Neste artigo analisamos as respostas dadas pelos estudantes de engenharia para resolver equações diferenciais no contexto de um campo de direção, a fim de coletar informações sobre o conhecimento que eles trazem em jogo para resolver e que se manifestam indiretamente, através de suas produções. Reconhece-se que é importante para o professor a análise dos erros como um mecanismo provedor de informação sobre como os alunos interpretam os problemas e como usar diferentes procedimentos, bem como um elemento disparador para a reformulação das práticas pedagógicas. A análise reflete as dificuldades que têm de aprender a usar uma abordagem qualitativa (gráfico), assim como a preferência dos métodos analíticos de resolução.

Palavras-chave: equações diferenciais, erros, obstáculos

¹ Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales. UNaM. claudiamzang@gmail.com

² Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales. UNaM. gretel_gaf@yahoo.com.ar

³ Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales. UNaM. nleon@fce.unam.edu.ar

Introducción

Este trabajo se realizó en el marco de un proyecto de investigación cuya temática gira en torno a la caracterización de los conocimientos previos que los estudiantes pueden movilizar cuando se los enfrenta a problemas de ecuaciones diferenciales (ED) y cuya intención es poder describir en qué medida estos saberes matemáticos básicos son un recurso para los primeros aprendizajes de dicho tema.

Las autoras de este trabajo, que están involucrados en la enseñanza de ED en carreras de grado de las Facultades de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales y de Ciencias Económicas dependientes de la Universidad Nacional de Misiones (UNaM), han observado en los alumnos grandes dificultades en el abordaje inicial del tema que, a medida que se desarrolla el programa, tienden a ser enfrentados recurriendo a una serie de técnicas que les permiten avanzar en un campo de débil dominio conceptual, donde poco perciben la relación que las ED mantienen con grandes temas como ecuaciones, funciones, derivada o diferencial, desarrollados en asignaturas anteriores.

La experiencia en la enseñanza de ED y la observación de errores recurrentes de los estudiantes en el manejo de las mismas motivó a analizar los diferentes aspectos que hacen a la enseñanza del tema en las aulas de las mencionadas casas de estudio. Es así que, como parte de las actividades llevadas adelante y que se encuadran en el proyecto antes mencionado, se consideraron las prácticas docentes de tratamiento del tema, las modalidades de trabajo de los alumnos y los errores que cometen los mismos al resolver cuestiones ligadas a las ED; se analizaron también los programas de las diferentes asignaturas en las que se estudian las ED y los aspectos conceptuales y metodológicos más relevantes indicados, tanto por la bibliografía sugerida desde las cátedras como por las investigaciones educativas relativas al tema; los procesos de evaluaciones contemplados y las herramientas tecnológicas seleccionadas por los docentes como complementos didácticos.

En lo que respecta a este trabajo, la discusión se centrará en analizar las respuestas dadas por los alumnos de las carreras de Ingeniería Química e Ingeniería en Alimentos a un problema que formaba parte del primer examen parcial de la asignatura Análisis II (correspondiente al ciclo lectivo 2011), con objeto de identificar y describir los errores más habituales en que incurren.

En este sentido, la importancia de indagar sobre los errores reside en el hecho de que, además de ser una preocupación constante para los docentes, éstos aparecen natural y sistemáticamente tanto en el proceso de construcción de conocimientos como en el proceso de evaluación. Identificarlos podría permitir un importante avance en la planificación y en el diseño de nuevas prácticas didácticas, basadas en el trabajo con el error con la finalidad de transformarlo en una situación de aprendizaje.

En el siguiente apartado se describe el marco teórico y los antecedentes que orientaron este trabajo, en secciones posteriores se esbozan los lineamientos metodológicos seguidos, se exhiben los resultados obtenidos y finalmente, se cierra el artículo mostrando una síntesis y las reflexiones que emanan del análisis realizado.

1. Marco teórico y antecedentes

El introducirse en la problemática de los errores, atendiendo a sus posibles orígenes como a su análisis e interpretación, suponen la referencia a un marco teórico, que está influido por las concepciones del aprendizaje y de la matemática que se tengan. Si se analizan las teorizaciones que han surgido como producto de la investigación en educación, se advierte que las miradas e interpretaciones varían según el paradigma en el que se sustentan éstas, en particular, el significado que se le confiere al error difiere si se lo considera desde la perspectiva conductista o bien desde el constructivismo.

Siguiendo los lineamientos del conductismo, la responsabilidad del error recae sobre el alumno y el tratamiento del mismo se encara poniendo a éste en situaciones que lo lleven a volver a aprender sus lecciones. En este sentido, en el marco de la enseñanza tradicional, fuertemente influida por las teorías conductistas y netamente enciclopedista en la que se privilegian los resultados de la evaluación de cierto saber en detrimento de los procesos de aprendizaje, se considera al error como un signo de la imperfección del alumno (no presta atención, no obedece al profesor, no visualiza el placer en el conocimiento, etc.), y se hace necesario sancionarlo, no exhibirlo y es al docente a quien corresponde indicar los errores y sustituir la técnica por una adecuada.

Por otro lado, a partir de la década del sesenta y en los años posteriores, el error tuvo una visión más constructivista. Bajo esta perspectiva, el error es la expresión de una forma de conocimiento que brinda posibilidades para que el sujeto construya su conocimiento ya sea completando, modificando o corrigiendo el erróneo (D'AMORE,

2008). Parafraseando a Rico (1995), quien retoma las reflexiones de Popper, se debe mostrar que:

“no hay fuentes últimas del conocimiento, admitir que todo conocimiento es humano, que está mezclado con nuestros errores y nuestros prejuicios. Esto lleva a **admitir el error como parte constituyente de nuestra adquisición del conocimiento**”. (RICO, 1995, p. 73)⁴

Asimismo, en la actualidad, se acepta que los procesos mentales de los alumnos no son visibles, sólo es posible acceder a ellos de un modo indirecto: se asume que lo que los alumnos piensan lo exteriorizan a través de los usos que hacen del lenguaje conjuntamente con lo que escriben y dibujan (GRECA *et al.*, 1998). Del mismo modo se asume que los errores en que habitualmente incurren los alumnos, la frecuencia con que aparecen, los patrones usuales que se observan, son algunos de los elementos que permiten realizar inferencias acerca de estos procesos mentales (DEL PUERTO *et al.*, 2004).

Debido a la polisemia de la palabra error y a fin de evitar ambigüedades, en lo que sigue se entenderá al mismo en el sentido señalado por Brousseau (1983), esto es, considerar que el error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre o del azar, como sostenían las teorías conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior que en cierto dominio de acciones tenía su interés y resultaba exitoso pero que ahora se revela como erróneo o inadaptado ó, expresado en otras palabras, el error debe ser considerado como *“la presencia de un esquema cognitivo inadecuado en el alumno y no sólo la consecuencia de una falta específica de conocimiento o de una distracción”* (SOCAS 1997 citado por DEL PUERTO S. *et al.*, *op. Cit.*).

1.1 Algunos estudios sobre errores y obstáculos en el aprendizaje

En las últimas décadas se han realizado numerosas investigaciones referentes a los errores, la mayoría se ocupan de los mismos en el ámbito de la aritmética y del álgebra, y en menor medida, de la geometría. Son relativamente pocas las investigaciones que se ocuparon de los obstáculos que podrían presentarse en el aprendizaje de los conceptos del análisis matemático, y dentro de este grupo la mayoría se circunscribe a las

⁴ Las letras en negritas pertenecen a Rico.

dificultades observadas en el ámbito del cálculo y del pre-cálculo, siendo escasas las publicaciones referidas a los obstáculos en el aprendizaje de las ED.

Si bien en el presente trabajo interesan los obstáculos que pueden presentarse en el estudio de las ED, se hará una breve reseña sobre las investigaciones de los errores en álgebra, por considerar que fueron las pioneras en esta línea de investigación y porque son las que reúnen mayor número de trabajos publicados y muchas de las reflexiones que se derivan de las mismas pueden extenderse al ámbito del análisis matemático. Así, se destacan las llevadas adelante por Kieran *et al.* (1989) que básicamente llega a la conclusión de que los errores observados en álgebra se deben a que “*los estudiantes siguen usando los métodos que le funcionaban en aritmética*”. Además presenta una tipificación de los errores más usuales. De igual modo Ruano *et al.* (2008) señalan que la entrada al estudio del álgebra puede encararse por tres vías: la sustitución formal, los procesos de generalización y la modelización, añaden también que el análisis de los errores cometidos por los alumnos suministra información sobre las ventajas e inconvenientes de recurrir a una u otra forma de introducir el álgebra en el ámbito escolar; al mismo tiempo ofrecen también una tipificación de los errores. Paralelamente Carmen Sessa (2005) también incursiona en el pasaje de la aritmética al álgebra, en su trabajo recoge los aportes de diferentes investigaciones y se centra en los problemas que pueden presentarse en el estudio de ecuaciones lineales con dos variables.

Dentro de las investigaciones específicas sobre ED se destacan las llevadas adelante por Moreno Moreno *et al.* (2003) en torno a las concepciones del profesorado universitario en facultades de ciencias experimentales sobre la enseñanza y el aprendizaje de las ED. En cuanto a los resultados que obtuvieron destacan que algunas de las creencias de los docentes participantes del estudio tienen que ver con que los estudiantes aprenden las ED por imitación y memorización de situaciones y por esquemas de resolución vistos en clase, también consideran que los estudiantes no son capaces de pensar, crear y razonar por sí mismos, entienden que las definiciones son algo mecánico que deben ser aprendidas y donde no hay nada que entender. Los autores identifican estas creencias como posibles causas de que se eternice la enseñanza tradicional de las ED, conjuntamente con la concepción formalista de las matemáticas (donde se sobreestima el tratamiento simbólico y se subestiman los métodos numéricos y gráficos), el temor de los docentes a la pérdida de contenidos específicos de las matemáticas puras a favor de contenidos y técnicas proporcionados por la matemática aplicada (se le otorga un

status infra-matemático a esta última puesto que consideran que las matemáticas puras son las “matemáticas de verdad”). Por otra parte, los mismos docentes opinan que les resulta difícil reconciliar los modelos matemáticos con las técnicas, en virtud de que los primeros suelen involucrar ED bastante complicadas, para los que no cuentan con métodos de resolución analíticos, en tanto que las técnicas permiten resolver ED simplificadas, y esto conlleva a elegir el camino más sencillo, es decir, el camino de las técnicas.

Por otro lado, también sobresalen los estudios de Artigue (1995a), que toma como marco teórico la noción de cuadro propuesta por Douady. Al respecto, indica:

“Estos cuadros son los siguientes: el cuadro algebraico de la resolución por fórmulas, el cuadro numérico de la resolución numérica aproximada y el cuadro geométrico del estudio global cualitativo de las curvas soluciones de la ecuación”. Caracteriza la enseñanza tradicional de las ED señalando que se privilegia el estudio en el cuadro algebraico y expone, según las diferentes dimensiones de análisis (epistemológica, cognitiva y didáctica) que se derivan de la perspectiva sistémica seguida en su trabajo, los aspectos que se oponen a la extensión del estudio de las ED a los campos geométrico y numérico.

En cuanto a la enseñanza de las ED, en lo epistemológico, identifica como restricciones que obstaculizan su tratamiento cualitativo la hegemonía histórica del cuadro algebraico, el hermetismo de las diversas problemáticas de resolución y la dificultad de los problemas que dan origen a la resolución cualitativa, entre otros. En lo cognitivo, actúan como restricciones la movilidad entre el registro de las ecuaciones y el de las gráficas, en el nivel de las funciones y las derivadas. Y en el plano didáctico, reconoce que la enseñanza tradicional, algebraica y muy algoritmizada no plantea problemas y corresponde a un nivel de exigencia mínima, y esto opera como restricciones puesto que introducir un enfoque cualitativo que, si bien es susceptible de métodos, no es algoritmizable, aumenta el interés de la enseñanza y también su dificultad (ARTIGUE, 1995b).

Paralelamente realiza una caracterización de las dificultades que se presentan en el aprendizaje del cálculo. Solamente se hará mención a aquellas que se relacionan con las ED. El autor las agrupa en tres categorías: aquellas ligadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo, aquellas ligadas a la conceptualización y a la formalización de la noción de límite; y aquellas ligadas a las rupturas necesarias con relación a los

modos de pensamiento puramente algebraicos, y finalmente a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo. Así se han detectado dificultades con la identificación de lo que es una función ya que la concepción que tienen los estudiantes sobre la noción de función está organizada no en torno a la definición, sino alrededor de prototipos comunes encontrados, de la asociación entre función y fórmula o de la asociación función-curva regular. Este obstáculo repercute seguramente en el abordaje de la solución de una ED dado que el proceso requiere encontrar una función conocido el comportamiento de su variación. Se mencionan dificultades para la conversión de un registro a otro o para trabajar dentro de un mismo registro, por ejemplo en el registro gráfico cuando se deben manejar simultáneamente dos niveles de información (informaciones sobre la función y su derivada).

Sobresalen también los estudios realizados por Habre (2003, citado por DULLIUS 2009) acerca de las estrategias que usan los estudiantes para resolver ED. Habre coincide con Artigue, al revelar que la enseñanza tradicional se centra en el manejo de técnicas y algoritmos propios del enfoque algebraico. También señala que los estudiantes, aún después de haber trabajado con ED siguiendo los tres enfoques (analítico, geométrico y numérico) tienen dificultades para reconciliar dichos enfoques entre sí y que los mismos, al ser interrogados sobre como resolverían una ED determinada, como primer procedimiento apelan a identificar de qué tipo de ED se trata (separable, lineal, exacta, etc.), a fin de resolverla analíticamente.

2. Aspectos metodológicos

2.1 Contexto educativo

Los alumnos que participaron de la investigación son estudiantes que cursaron, durante el ciclo lectivo 2011, la asignatura Análisis Matemático II, correspondiente al segundo cuatrimestre del segundo año de las carreras Ingeniería Química e Ingeniería en Alimentos de la FCEQyN-UNaM. Particularmente, en este trabajo se analizaron las respuestas dadas por los alumnos a un único problema de los que se incluían en el primer examen parcial de la asignatura y que consistía, en líneas generales, en el trazado a mano de una curva solución dado el campo de direcciones de una ED, como así también la identificación de los puntos críticos y la clasificación de las soluciones de equilibrio de la misma.

Los resultados que se muestran en la siguiente sección corresponden al análisis de las respuestas dadas por 36 alumnos a un único problema sobre ED. Cabe aclarar que el examen fue rendido por 54 alumnos, de los cuales 36 responden a esta cuestión, es decir, un tercio de los alumnos no responde a la consigna analizada y esto constituye un indicador más de las dificultades que tienen los alumnos para el aprendizaje de las ED.

Por otro lado, si se toman en consideración las descripciones efectuadas por Bardín (1996) y Ander-Egg (2010) sobre las diferentes metodologías de investigación en Ciencias Sociales, la modalidad de estudio adoptada en el presente trabajo responde a un enfoque descriptivo, pues se usaron técnicas de análisis de contenido que viabilizaron la recopilación de datos con propósitos concretos prefijados por los investigadores.

2.2. Objetivos pretendidos

Con relación a los aspectos sobresalientes del análisis a priori de la propuesta, se mencionará brevemente que la finalidad del problema planteado era obtener información sobre las posibilidades que tienen los estudiantes de caracterizar a las soluciones de la ED a partir del campo de pendientes de la misma. Debe destacarse que problemas de este tipo fueron trabajados en el transcurso de las clases, en virtud de que se adhiere a la premisa de que la evaluación es otra instancia más de aprendizaje, por lo cual no sólo será necesario propiciar situaciones de buena enseñanza en el sentido propuesto por Fenstermacher (1999), sino también situaciones de buenas evaluaciones, donde éstas sean coherentes con las prácticas de enseñanza que se llevan adelante y se conviertan en medios para la concientización de aprendizajes adquiridos.

La idea fue priorizar el enfoque cualitativo sobre las técnicas algebraicas. Justamente, se propone una ED no lineal a fin de que se dificulte el uso de los métodos de resolución analítica y en caso de que recurran al enfoque algebraico, la solución que se obtiene es una solución implícita y a partir de la cual no es posible obtener una solución explícita, lo que conlleva el no poder utilizar las condiciones iniciales para hallar la curva solución solicitada en la consigna. La intención de un tratamiento de esta índole es mostrar las limitaciones que tienen las técnicas de resolución exacta y exhibir las ventajas del análisis cualitativo y que reconozcan que para el método analítico de separación de variables, en el proceso de integración, se pierden algunas soluciones

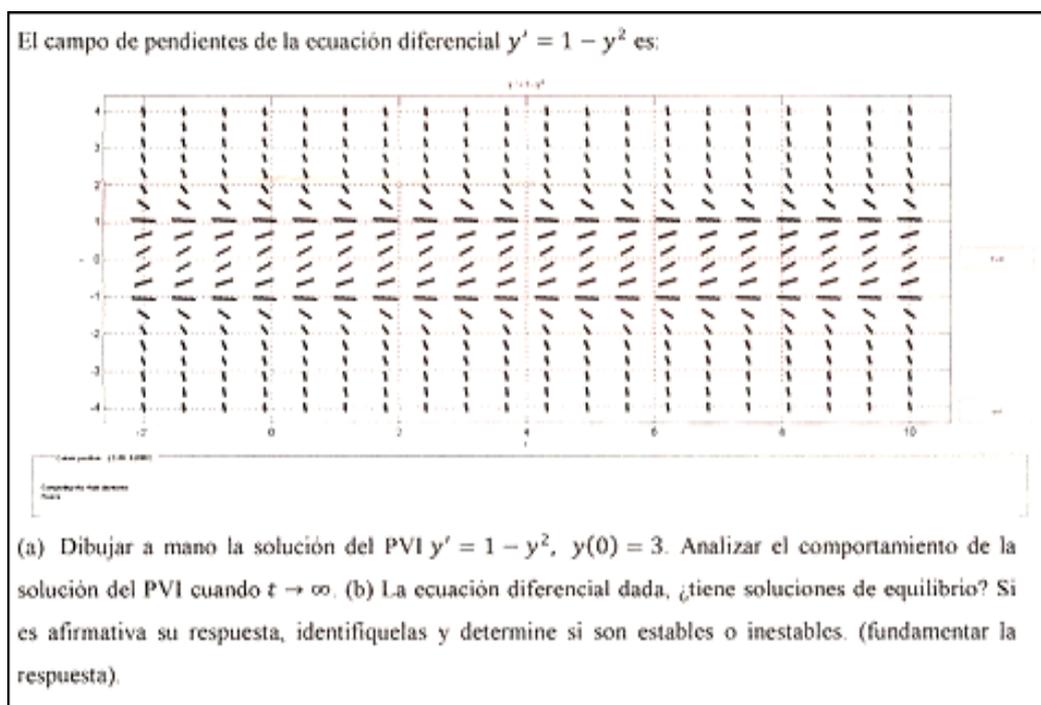
(soluciones singulares), puesto que no hay elección posible para la constante de integración en la solución general que arroje como soluciones particulares las soluciones de equilibrio $y(x) = -1$ e $y(x) = 1$.

3. Discusión de los resultados

3.1 Propuesta de trabajo y tipos de errores observados

El problema presentado y sobre el que se basa el análisis es el siguiente:

Figura 1: Problema propuesto a los alumnos



A continuación se comentarán brevemente cuales fueron los errores que aparecieron con mayor regularidad en el análisis de las respuestas y se reflexionará sobre los posibles orígenes de los mismos.

De los 36 alumnos que resolvieron la consigna, solamente 3 han respondido de forma correcta ambos ítems que conforman el problema. La mayoría de los estudiantes tuvo complicaciones para dibujar la curva solución solicitada, aún cuando logran identificar correctamente las soluciones de equilibrio y determinar con éxito el tipo de estabilidad que presentan. En este sentido, hubo 18 alumnos que no respondieron el ítem a), sin embargo lo hacen correctamente al ítem b). Las respuestas dadas por estos últimos reflejan diferentes niveles de apropiación de los conceptos, desde los que logran

identificar las soluciones de equilibrio utilizando solamente el campo de direcciones y trazando algunas curvas solución representativas, es decir, el procedimiento de resolución utiliza exclusivamente el gráfico como soporte, hasta los que logran triangular esta información con la que se obtiene buscando los puntos críticos de la ED y analizando los signos de la derivada en diferentes regiones. Las respuestas dadas por los alumnos restantes son muy confusas, denotan un pobre nivel de apropiación de los contenidos en juego.

Para el estudio se ha agrupado a los diferentes errores observados en grupos, donde cada uno de ellos está conformado por las producciones de aquellos estudiantes que evidencian errores similares. Cabe aclarar que los grupos conformados no definen categorías puesto que no son excluyentes, dado que las producciones de un mismo alumno pueden ubicarse simultáneamente en más de uno de tales grupos. Los errores más frecuentemente observados se han agrupado como sigue:

- Trazado de una curva solución de la ED sin tomar en cuenta las condiciones iniciales.
- Trazado de curvas que no corresponden a soluciones.
- Dificultades ligadas a los métodos de resolución algebraica
- Dificultades para fundamentar sus respuestas en cuanto a la estabilidad de los puntos críticos.
- Dificultades relacionadas con los procesos de validación de su actividad.

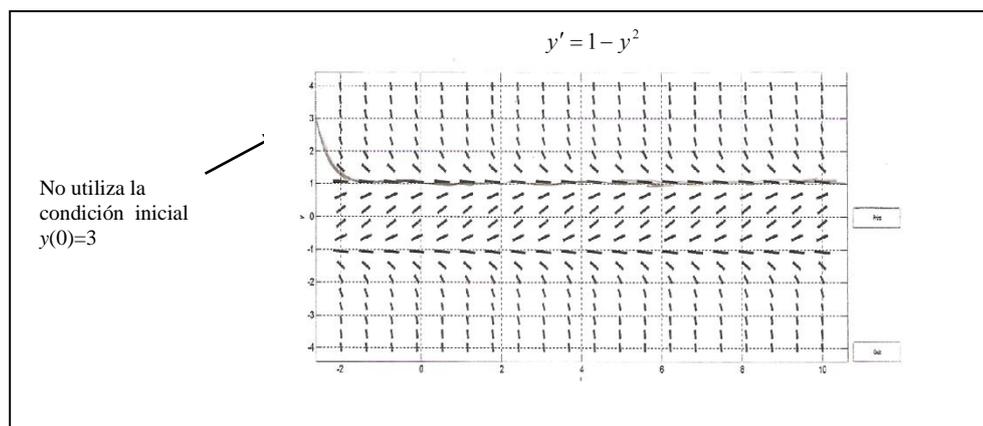
3.2 Descripción de los errores

A continuación se propone una descripción más detallada de cada uno de los grupos mencionados, y se exponen algunos ejemplos representativos para ilustrar cada uno.

3.2.1. Trazado de una curva solución de la ED sin tomar en cuenta las condiciones iniciales.

Se observa que varios alumnos trazan gráficas en las que se respeta el valor de y_0 que establece la condición inicial del problema, pero no así el de t_0 . Puede inferirse que el bosquejo que realizan estos alumnos está supeditado a comenzar en el margen izquierdo del campo de direcciones.

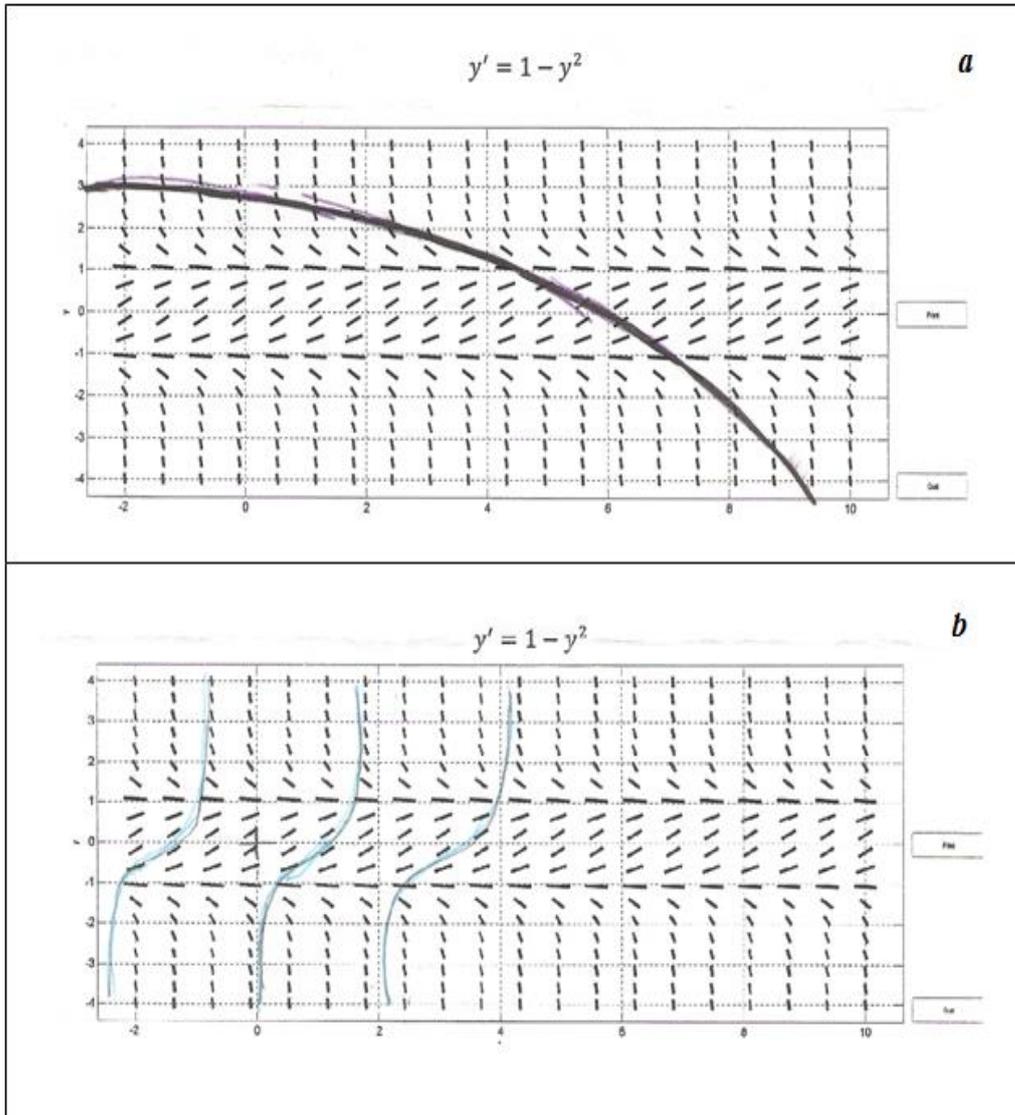
Figura 2: Trazado de curvas solución que no responden a la condición inicial: el alumno graficó una curva solución que no corresponde a la pedida en el enunciado del ejercicio



3.2.2. Trazado de curvas que no corresponden a soluciones.

Se ha observado que los estudiantes trazan curvas que, en primer lugar no son tangentes a los segmentos que conforman el campo de pendientes y en segundo lugar atraviesan las soluciones de equilibrio. Con esto se visualiza la falta de comprensión de los alumnos del significado de una solución de equilibrio y de la interpretación geométrica de la derivada (como pendiente de la recta tangente o como pendiente de una función). Para ilustrar estas deficiencias en la comprensión del concepto de derivada se tomaron las producciones de dos alumnos que se muestran en las figuras 3 a) y b).

Figura 3: a y b. Comprensión deficiente del concepto de solución. Se observa que las curvas trazadas atraviesan las soluciones de equilibrio y no son tangentes a los segmentos que conforman el campo de direcciones.



3.2.3. Dificultades ligadas a los métodos de resolución algebraica.

Se puede distinguir entre los que extienden los métodos de resolución algebraicos para ED lineales a ED no lineales y aquellos que tienen muy internalizado el método de variables separables. El que extiendan los métodos de ED lineales a ED no lineales puede ser ejemplificado con las producciones de dos alumnos, las que se muestran en las figuras 4 a) y b).

Figura 4: a y b. Extensión de los métodos de resolución algebraicos de ED lineales a ED no lineales

$$y' = 1 - y^2$$

$$y' + y^2 = 1$$

$$P(t) = 1 \quad Q(t) = 1$$

$$y = e^{-\int P(t) dt} \cdot \int Q(t) \cdot e^{\int P(t) dt} + c$$

$$-\int P(t) dt = -\int 1 dt = -t$$

$$\int Q(t) e^{\int P(t) dt} = \int 1 \cdot e^{-t} = e^{-t}$$

$$y = e^{-t} \cdot e^{-t} + c$$

$$y = e^{-2t} + c$$

$$3 = e^{-2 \cdot 0} + c$$

$$3 - 1 = c \Rightarrow c = 2$$

$$y = e^{-2t} + 2$$

a

⑤ CUANDO $t \rightarrow \infty$

S. $y' + y^2 = 1$; MEDIANTE LA ECUACIÓN RESOLVENTE

$$y(t) = e^{-\int P(t) dt} \left(\int Q(t) e^{\int P(t) dt} dt + c_1 \right)$$

$$y(t) = e^{-\frac{y^3}{3} + c_1} \cdot 1 \cdot e^{\frac{y^3}{3} + c_2} + c_3 = e^{-\frac{y^3}{3}} \cdot e^{\frac{y^3}{3}} + k ; k = cte.$$

$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1$

b

Es notorio que varios alumnos usaron un procedimiento similar al mostrado en la figura 4b. Utilizan una fórmula que en el ámbito universitario es conocida como ecuación resolvente y que solamente puede ser utilizada para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden de la forma $y' + P(t)y = Q(t)$. Llama la atención, que además de no reconocer que la ED presentada no es lineal, no tomen en cuenta que el objeto identificado como la función $P(t)$ no responde a la característica de ser una función dada, es decir, asimilan la función incógnita (la que deberá ser encontrada) con el objeto $P(t)$ que aparece en la fórmula. El problema que subyace es que no tienen en claro cuál es el papel de $y(t)$ en la ED, es decir, cuál es la función incógnita que tienen que encontrar.

Es necesario destacar que si bien es factible resolver la ED con el método de separación de variables, en general los alumnos revelaron tener dificultades para resolver la integral o con el método propiamente dicho, llegando incluso a obtener una solución explícita (en la mayoría de los casos). Este hecho se ilustra en las figuras 5 a) y b).

Figura 5: a) dificultades con el uso del método de separación de variables y b) dificultades con la integración

a

5) $y' = 1 - y^2$ P.V.I. = $(0, 3)$

$\frac{dy}{dt} = (1 - y^2)$

$\int \frac{1}{1 - y^2} dy = \int 1 dt$ solución general

$\frac{1}{3} y^3 + C = t$

P.V.I. = $(0, 3)$

$\frac{1}{3} (3)^3 + C = 0$

$C = -9$

b

5) - a) $\frac{dy}{dt} = 1 - y^2 \Rightarrow \int \frac{dy}{1 - y^2} = \int dt \Rightarrow \frac{\ln|1 - y^2|}{-2} = t + C$ $y = \sqrt{1 - 2t}$

$1 - y^2 = e$

$-2y dy = de$

$-2 \int \sqrt{1 - 2t} dy = de$

$dy = \frac{de}{2\sqrt{1 - 2t}}$

$\int \frac{-de}{2\sqrt{1 - 2t}} = \int dt \Rightarrow t + C = \int \frac{de}{2\sqrt{1 - 2t}} = t + C$

$t + y = t + C \Rightarrow y = t + C \Rightarrow y(0) = 3 = 0 + C \Rightarrow C = 3$

El análisis realizado muestra que, aún cuando la información solicitada no es posible obtenerla a partir de la solución formal de la ED (puesto que al resolverla se obtiene una solución implícita que no es posible expresar en forma explícita, lo que acarrea la imposibilidad de aplicar la condición inicial y consecuentemente el trazado de la curva solución solicitada), los alumnos emprenden la resolución del problema a través de métodos analíticos. Particularmente, 16 de los alumnos han usado los métodos

analíticos, ya sea de variables separables o para ecuaciones lineales para resolver la ED dada. Al mismo tiempo, los errores agrupados bajo esta categoría demostraron ser los más frecuentes (15 alumnos resolvieron de manera incorrecta la ED por presentar un manejo inadecuado de tales métodos).

En otras ocasiones, se observó que si bien resuelven incorrectamente de forma analítica la ED, llegan a responder de forma correcta el ítem b), pero al estar ausente la fundamentación de la respuesta, intuimos que la información requerida la habrán extraído del comportamiento global de las soluciones que es posible visualizar a través del campo de direcciones. Es de destacar que un solo alumno resuelve correctamente la ED usando separación de variables, en consecuencia obtiene una solución implícita pero que en realidad no le sirve para graficar la solución solicitada en el enunciado del problema.

3.2.4. Dificultades para fundamentar sus respuestas en cuanto a la estabilidad de los puntos críticos.

En general se ha observado que un número considerable de estudiantes afirman que la ED presenta soluciones de equilibrio pero no fundamentan su respuesta. También se ha notado que muchos alumnos son capaces de identificar correctamente los puntos críticos (igualando a cero la función $1 - y^2$) y los asimilan a soluciones de equilibrio, pero tienen dificultades para determinar si se trata de una solución de equilibrio estable o inestable, tanto desde el ámbito de lo algebraico-analítico (analizando el signo de la derivada) o desde el ámbito de lo gráfico (trazando algunas curvas representativas de forma que sean tangentes a los segmentos que conforman el campo de direcciones y observando su comportamiento a medida que la variable independiente crece indefinidamente).

3.2.5. Dificultades relacionadas con los procesos de validación de su actividad.

Aquí se puede destacar que, en primer lugar, no se recurre a la sustitución de la función hallada en la ED para corroborar que efectivamente se trate de una solución y en segundo lugar, no utilizan el gráfico del campo de direcciones como medio de validación del trabajo realizado, puesto que la información que obtienen de la fórmula tiene que ser contrastada con la información que provee este campo de pendientes y no deben producirse contradicciones. Fueron varios alumnos los que desarrollaron

procedimientos que pueden ser reunidos en este grupo. A fin de ejemplificar esto, en la figura 6, se exhibe la resolución desplegada por un alumno.

Figura 6: Dificultades para reconocer contradicciones entre los resultados hallados mediante el enfoque analítico y los hallados cualitativamente.

Ⓐ En PVI de $y' = 1 - y^2$; $y(0) = 3$. Que sucede si $t \rightarrow \infty$

$\int y' = \int 1 - y^2$

$\frac{dy}{dt} = 1 - y^2$

$dy = (1 - y^2) dt$

$\frac{dy}{(1 - y^2)} = dt$

Integro

$\text{arctg } y + C = t$

$\text{arctg } y = t - C$

$y = \text{tg}(t - C)$ En General

$y(0) = 3$

$3 = \text{tg}(C)$

$C = 71,6$

Solución del PVI

$y = \text{tg}(t + 71,6)$

Ⓑ Sin de equilibrio

$y' = 1 - y^2$

lo en de eq. es una en. constante.

$1 - y^2 = 0$

$y^2 = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ o } -1$

Existen dos Soluciones de equilibrio; cuando $y = 1$ y cuando $y = -1$.

$y > 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow y' = \ominus$ pendiente \ominus

y está entre 1 y $-1 \Rightarrow y = 0,5 \Rightarrow y' = \oplus$ pendiente \oplus

$y = -2 \Rightarrow y' = \ominus \Rightarrow$ pendiente \ominus

Cuando $y = 1$ es Solución de equilibrio estable

Cuando $y = -1$ es Solución de equilibrio inestable.

Es estable ya que las demás soluciones se acercan a la solución de equilibrio, de lo contrario, si se alejan es una solución de equilibrio inestable.

Reflexiones finales

Se ha podido constatar que existen puntos de encuentro entre los resultados que se han derivado del análisis de las respuestas de los alumnos y algunos de los obstáculos señalados por Artigue, especialmente en los que están ligados a la complejidad de los objetos básicos del cálculo, a la conceptualización y a la formalización de la noción de función y derivada y los relacionados a las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamiento puramente algebraicos. Al mismo tiempo, se advierte también que existe un débil dominio del concepto de ecuación propiamente dicho, tal como lo menciona Kieran *et al.* (op. cit.), puesto que según estos autores, tan pronto como los estudiantes de álgebra aprenden a manejar un método formal de resolución de ecuaciones tienden a abandonar el uso de la sustitución incluso lo abandonan como un mecanismo para verificar la corrección de su solución. Este error trasciende el contexto puramente algebraico puesto que los alumnos no sustituyen la solución encontrada en la ED a fin de corroborar que en efecto se trate de una solución. Paralelamente se observa que existen dificultades para la conversión de un registro gráfico a otro interpretativo o analítico, por ejemplo en algunos casos no coincide el registro gráfico con el analítico cuando se manejan simultáneamente los dos niveles de información y sin embargo los estudiantes no lo advierten.

Como consecuencia del trabajo realizado surgen varios interrogantes para seguir profundizando en investigaciones futuras, sobre todo vinculadas a la reformulación de prácticas de enseñanza de ED, que se caracterizan por un estudio de las mismas en el que se prioriza un tratamiento cuantitativo centrado en el manejo de técnicas y métodos de resolución en detrimento de aquellos enfoques cualitativos que permiten anticipar el comportamiento de las soluciones de una ED sin la necesidad expresa de resolverla. Así, surge también la necesidad de efectuar un análisis de las prácticas docentes y de la bibliografía que se maneja en el ámbito académico a fin de detectar si éstas realmente permiten la construcción de modelos, la utilización de conocimientos previos, la superación de obstáculos y la integración entre los diferentes contenidos matemáticos para favorecer el manejo de modelos matemáticos especializados.

Referencias

- ANDER-EGG, E. (2010) *Métodos y Técnicas de investigación social, Vol. III: Cómo organizar el trabajo de investigación*. Lumen, España.
- ARTIGUE, M (1995a). Ingeniería Didáctica. En Artigue M., Douady R., Moreno L., Gómez P., *Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*. México. Grupo Editorial Iberoamérica.
- ARTIGUE, M (1995b). La enseñanza de los principios del cálculo. En Artigue M., Douady R., Moreno L., Gómez P. *Ingeniería Didáctica para la Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*. México. Grupo Editorial Iberoamérica.
- BARDIN, L. (1996) *El análisis de contenido*. Madrid. Akal
- BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistemologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 164-198.
- D' AMORE, B.; DÍAZ GODINO, J.; FANDIÑO PINILLA, M. (2008) Competencias y matemática. Bogotá. Didácticas Magisterio.
- DEL PUERTO S., MINNAARD C., SEMINARA S. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas en *Revista Iberoamericana de educación*, 38 (4). En línea <http://www.rioei.org/deloslectores/1285Puerto.pdf>
- DULLIUS M. (2009). Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico. Tesis doctoral. Burgos
- FENSTERMACHER, G; SOLTIS, J. (1999). *“Enfoques de la enseñanza”*. Buenos Aires. Amorrortu.
- GRECA, I.; MOREIRA, M. (1998) Modelos mentales y aprendizaje de física en electricidad y magnetismo. *Enseñanza de la Ciencias*. 16 (2), 289-303.
- KIERAN C., FILLOY YAGÜE, E. (1989) El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 7 (3), 229-240
- MORENO MORENO, M.; AZCÁRATE GIMÉNEZ, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales en *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 21 (2). 265-280
- RICO, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick, J.; Rico, L y Gómez, P. *“Educación matemática”*. México. Grupo Editorial Iberoamérica.
- RUANO, R. M., SOCAS, M. M. Y PALAREA, M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*. 2(2), 61-74.
- SESSA, C. (2005). *Introducción al estudio didáctico del álgebra*. Buenos Aires. Libros del Zorzal.

Recibido: 28/10/2012

Aceito: 17/2/2013