Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática

The three dimensions of the didactical problem of mathematical modeling

BERTA BARQUERO FARRAS[1]
MARIANNA BOSCH[2]
JOSEP GASCÓN[3]

Resumen

El problema didáctico de la modelización matemática está actualmente en el centro de interés de numerosas investigaciones en Educación Matemática. Al tiempo que se asume la necesidad de enseñar la matemática como herramienta de modelización, se constatan las grandes dificultades objetivas con las que choca cualquier intento de implantar de forma generalizada la actividad de modelización en los sistemas de enseñanza. En este trabajo utilizamos el esquema heurístico que describe las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico para formular algunas de las principales cuestiones que plantea la Teoría Antropológica de lo Didáctico con relación a dicho problema y, consecuentemente, para proponer algunas de las respuestas tentativas a dichas cuestiones.

Palabras clave: *Problema didáctico de la modelización matemática, dimensiones epistemológica, económica y ecológica de un problema, Teoría Antropológica de lo Didáctico.*

Resumo

O problema didático da modelação matemática está atualmente no centro de interesse de numerosas investigações em Educação Matemática. Ao mesmo tempo em que se assume a necessidade de ensinar a matemática como uma ferramenta de modelação, se constatam as grandes dificuldades objetivas com que depara qualquer tentativa de implementar de uma forma generalizada a atividade de modelação nos sistemas educacionais. Neste trabalho, utilizamos o esquema heurístico que descreve as três dimensões fundamentais de um problema didático para formular algumas das principais questões suscitadas pela Teoria Antropológica do Didático em relação a este problema e, consequentemente, para propor algumas respostas provisórias a estas questões.

Palavras-chave:*Problema didático de modelação matemática, dimensões epistemológica, econômica e ecológica de um problema, Teoria Antropológica do Didático.*

[1] Doctora en Matemáticas por la Universitat Autònoma de Barcelona -Universitat de Barcelona - bertabf@gmail.com

[2] Doctora en Matemáticas por la Universitat Autònoma de Barcelona - Universitat Ramon Llull - marianna.bosch@iqs.url.edu

[3]Doutor em Educação Matemática - Departamento de Matemáticas, Universitat Autònoma de Barcelona - gascon@mat.uab.cat

1. Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico

Para precisar a qué nos referimos cuando hablamos del "problema didáctico de la modelización matemática" utilizaremos un esquema heurístico (GASCÓN 2011b) que pretende describir el desarrollo racional (no necesariamente histórico) de un problema didáctico cualquiera cuando este se construye en el ámbito de la teoría antropológica de lo didáctico (en adelante TAD[4]):

$$\{[(P_0 \oplus P_1) \hookrightarrow P_2] \hookrightarrow P_3\} \hookrightarrow P_\delta$$

En este esquema P_1, P_2 y P_3 representan las tres "dimensiones" fundamentales de un problema didáctico (*epistemológica*, *económica* y *ecológica*), mientras que P_0 juega un papel especial porque, como veremos, constituye una *formulación inicial*, en cierta forma "precientífica", de algunos tipos de problemas didácticos. A esta formulación provisional del problema la hemos denominado *problema docente* (GASCÓN 1999b).

El símbolo $\hookrightarrow$ no debe interpretarse estrictamente como una inclusión. Indica que una formulación "completa" de P_{i+1} requiere de cierta formulación previa (aunque sea implícita) de P_i. En cuanto a P_δ, podemos denominarlo simplemente *problema didáctico* y puede considerarse como una formulación (que nunca se llega a explicitar completamente) que contiene las tres dimensiones fundamentales del problema, las relaciones entre ellas y algunas cuestiones nuevas. Aunque P_0 es especialmente "visible" en las primeras etapas del desarrollo de la didáctica de las matemáticas (en las que nos encontramos actualmente), no constituye una "dimensión" necesariamente presente en *todos* los problemas didácticos. El símbolo $\oplus$ hace referencia precisamente a la incompletitud de P_0 como expresión de un problema didáctico y a la necesidad de añadirle, al menos, la dimensión *epistemológica* P_1 para que pueda empezar ser considerado como tal.

En el caso del problema didáctico de la modelización matemática (en adelante MM) el esquema toma la siguiente forma:

$$\{[(P_0(MM) \oplus P_1(MM)) \hookrightarrow P_2(MM)] \hookrightarrow P_3(MM)\} \hookrightarrow P_\delta(MM)$$

Este esquema puede considerarse, en consecuencia, como una descripción del desarrollo racional de dicho problema cuyo contenido se clarificará a medida que precisemos algunas de las *cuestiones* que forman parte decada una de sus tres dimensiones

[4] Chevallard, Bosch, Gascón (1997/2001) constituye una primera introducción general a la TAD. Para una panorámica actual del desarrollo de esta teoría se puede consultar la página http://www.atd-tad.org

fundamentales [5] .Queremos subrayar con toda claridad que en este trabajo no pretendemos, en absoluto, formular *todas* las cuestiones que forman parte de cada una de las dimensiones del problema de la MM; esta sería una pretensión ilusoria dado el estado actual de desarrollo del problema en cuestión.

2. El problema docente de la modelización matemática

Denominamos "problemas docentes" a los que se plantea el profesor *como tal profesor* cuando tiene que enseñar un tema matemático a sus alumnos. Los problemas docentes se formulan utilizando las *nociones disponibles* en la cultura escolar importadas habitualmente de los documentos curriculares (como, por ejemplo, las nociones de motivación, aprendizaje significativo, individualización de la enseñanza, adquisición de un concepto, abstracción, competencia, etc.). Los problemas docentes se formulan, normalmente, asumiendo y sin cuestionar no sólo las nociones sino también las *ideas dominantes* en la citada cultura escolar. En particular, en la formulación de un problema docente se suele asumir de manera acrítica la forma como se interpreta en la cultura escolar la matemática involucrada en el problema en cuestión.

En el caso particular de la MM, el *problema docente* P_0 (MM) puede enunciarse inicialmente como sigue:

> **Q_{00}:** ¿*Qué* tengo que enseñar a mis alumnos en relación a la *MM* y *cómo* tengo que enseñarlo?
>
> **Q_{01}:** Una vez enseñados los contenidos matemáticos básicos, ¿cómo conseguir que las matemáticas se enseñen como una *herramienta de modelización*, de tal forma que la enseñanza no se organice siguiendo únicamente la lógica de los contenidos matemáticos sino en base a los problemas que se deben resolver y a los proyectos que los estudiantes deben realizar? (BARQUERO, BOSCH, GASCÓN 2011).

A fin de transformar P_0 (MM) para empezar aformularlocomo un problema de investigación didáctica en el ámbito de la TAD, esnecesario cuestionar la forma de interpretar (de manera más o menos explícita) la MM, esto es, el modelo epistemológico de la MM dominante no sólo en las instituciones escolares sino también en la *noosfera*[6] y hasta en muchas de las investigaciones en Educación Matemática.

[5] En Bolea, Bosch, Gascón (2001b) se presenta una de las primeras interpretaciones de *cómo se construyen los problemas* en didáctica de las matemáticas.

[6] La noción de *noosfera del sistema de enseñanza* fue introducida por Chevallard (1985/1991) en el contexto de la teoría de la *transposición didáctica* para designar la esfera donde se piensa el funcionamiento del sistema didáctico. Se trata del verdadero tamiz por donde se opera la interacción entre el sistema de enseñanza y el medio social. La noosfera relaciona la institución productora del saber con la

Por lo tanto, en coherencia con el significado de nuestro esquema heurístico, no propondremos ningún tipo de respuesta $\mathbf{R_{0i}}$ a las cuestiones $\mathbf{Q_{0i}}$ que forman parte del problema docente P_0 (MM).

Recordando que el símbolo ⊕ hace referencia a la incompletitud de P_0 como formulación inicial de un problema didáctico y a la consiguientenecesidad de añadirle, al menos, la dimensión *epistemológica* P_1, empezaremos por plantear en la próxima secciónla necesidad de construir, desde la didáctica, un modelo epistemológico específico de la MM para clarificar el papel que juega (la MM) en relación a la actividad matemática globalmente considerada.

Dado que nos encontramos en la etapa fundacional de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, muchos de los problemas que aparecen en la bibliografia didáctica y, en particular, el propio problema de la MM, están formulados todavía de forma relativamente próxima a los problemas docentes. Esta proximidad se pone de manifiesto en que, al igual que en la formulación habitual de los problemas docentes, algunas investigaciones didácticas *no cuestionan* los modelos epistemológicos habituales[7] del ámbito de la actividad matemática que está involucrado en el problema didáctico que plantean y, en consecuencia, tampoco toman en consideración la *relatividad institucional* del saber matemático.

Sin embargo, desde la perspectiva de la TAD, dicho cuestionamiento es imprescindible puesto que, como ya hemos dicho (y como justificaremos en lo que sigue), para que un problema didáctico pueda ser considerado como tal debemos empezar explicitando la dimensión epistemológica del mismo.

3. Dimensión epistemológica del problema de la modelización matemática

De hecho, en la formulación de un problema didáctico cualquiera el didacta siempre utiliza, aunque sólo sea implícitamente, una descripción y una interpretación (esto es, un modelo epistemológico) del ámbito matemático que está en juego. La TAD ha subrayado desde el principio la necesidad de *explicitar* dicho modelo y utilizarlo como

Escuela. Las producciones de la noosfera (programas oficiales, libros de texto, recomendaciones para profesores, materiales didácticos, etc.) condicionan fuertemente las características y hasta la naturaleza del ‘conocimiento que debe ser enseñado’ en la Escuela.

[7] Nos referimos a los *modelos epistemológicos* o formas de interpretar y describir la geometría euclidiana, el álgebra escolar, la MM, la proporcionalidad o la estadística que son predominantes en las instituciones escolares, pero también en la noosfera y en las instituciones productoras del saber matemático.

referencia para analizar los hechos didáctico-matemáticos (GASCÓN 1993, 1994-1995, 1998, 1999a, 2001). Se le llama *modelo epistemológico de referencia* (MER) y tiene un carácter *siempre provisional*. Es el instrumento con el cual el didacta puede *deconstruir* y *reconstruir* las praxeologías cuya difusión intrainstitucional e interinstitucional pretende analizar. Por esta razón el MER constituye un instrumento de *emancipación del didacta y de la ciência didáctica* puesto que permite cuestionar la forma como las instituciones involucradas en la problemática didáctica interpretan el saber matemático.

La teoría de la transposición didáctica (CHEVALLARD 1985/1991, 1997), nos enseña que *no existe un sistema de referencia privilegiado* a partir del cual observar, analizar y juzgar el mundo de los saberes, pero la ausencia de un sistema de referencia *absoluto* no hace menos imprescindible (de forma bastante análoga a lo que pasa en *mecánica*) la utilización de sistemas de referencia *relativos* adecuados a cada problema y a cada situación (BOSCH, GASCÓN 2005). Queremos insistir una vez más en que estos modelos epistemológicos que construye la didáctica de las matemáticas deben tomarse como *hipótesis de trabajo* y, como tales, deben ser constantemente *contrastados* y *revisados*. El MER es asimismo imprescindible para estudiar el saber matemático antes de que se transforme para ser enseñado. Sólo así podremos dar cuenta no sólo de la forma de interpretar el álgebra, los sistemas de numeración, la proporcionalidad, la geometría, los límites de funciones, la topología, los números reales o la MM dentro del sistema de enseñanza, sino también del porqué es posible encontrar en dicho sistema unos objetos matemáticos y no otros. En cualquier caso, es importante que el MER que se utiliza en una investigación didáctica sea explícito (o, cuando menos, potencialmente explicitable) puesto que este modelo de referencia condicionará decisivamente (BOSCH, GASCÓN, 2007):

- La *amplitud del ámbito matemático* más adecuada para plantear el problema didáctico en cuestión.
- Los *fenómenos didácticos*[8] *que serán "visibles"* para el investigador.
- *Los tipos de problemas de investigación que se pueden plantear*.
- *Las explicaciones tentativas que se podrán proponer*, esto es, el tipo de soluciones que se considerarán "admisibles.

[8] En este trabajo utilizaremos la noción de "fenómeno didáctico" como una noción primitiva tal como suele hacerse cuando se habla de "fenómenos físicos", "fenómenos biológicos" o "fenómenos sociológicos". El análisis de la forma cómo una teoría didáctica construye los fenómenos didácticos y cómo los utiliza merece un estudio en profundidad que no podemos hacer aquí (ver Gascón 2011a y Artigue, Bosch, Gascón 2011).

En resumen, la *dimensión epistemológica* de un problema didáctico es una dimensión nuclear puesto que, como veremos, impregna y condiciona fuertemente el resto de las dimensiones del problema didáctico. Y esto es así incluso en las investigaciones didácticas en las que las cuestiones relativas a esta dimensión son más o menos transparentes y, en consecuencia, no se toman en consideración de manera explícita.

Cuando la dimensión epistemológica se pone en primer plano (y esta es una característica esencial de los enfoques que se sitúan en el Programa Epistemológico de Investigación en didáctica de las matemáticas[9]) entonces se hace un esfuerzo por explicitar el MER, sea con este nombre o con cualquier otro, y aparecen cuestiones relativas a la forma de describir e interpretar los conocimientos matemáticos que están en juego y, lo que es más importante, todas las restantes cuestiones incorporan necesariamente las respuestas aportadas a la dimensión epistemológica del problema.

En el caso particular del problema de la MM, las cuestiones que forman parte de su*dimensión epistemológica* P_1 (MM) son, entre otras, las siguientes:

> **Q_{11}:**¿Cómo puede describirse la MM mediante un *modelo epistemológico de referencia* (MER) compatible con el modelo epistemológico general de la actividad matemática que propone la TAD?
>
> **Q_{12}:** ¿Qué caracteres diferenciales (con relación a los que figuran habitualmente en la bibliografía) asigna la TAD a la actividad de MM?
>
> **Q_{13}:**¿Cuáles la amplitud del *ámbito matemático* más adecuada para plantear el problema didáctico de la MM? ¿Las cuestiones y tareas matemáticas puntuales, las áreas de la matemática escolar (como la aritmética, la geometría y la estadística) o la matemática escolar considerada como un todo?

En adelante, en aras de claridad, designaremos mediante $\mathbf{R_{ij}}$ la respuesta provisional que la TAD aporta a la cuestión $\mathbf{Q_{ij}}$ sin pretender que se trate ni de una respuesta completa ni, muchos menos, definitiva.

R_{11}: En lo que respecta a la forma de interpretar y describir la MM y su compatibildad con el modelo epistemológico general de la actividad matemática que propone la TAD,

[9] Guy Brousseau denominó inicialmente “didáctica fundamental” al nuevo punto de vista en didáctica de las matemáticas iniciado a principio de los años 70 del siglo pasado (Brousseau 1997). Este nuevo enfoque provocó una ampliación inesperada de la problemática didáctica debido, principalmente, a la inclusión del *conocimiento matemático* como *objetoprimario* de investigación. En Gascón (1998) se analiza la evolución de la didáctica hasta desembocar en la “didáctica fundamental” y en Gascón (2002 y 2003) se habla abiertamente de un nuevo *Programa de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*: *el Programa Epistemológico*.

cabe mencionar que, desde los primeros trabajos de Yves Chevallard sobre la enseñanza del álgebra (CHEVALLARD 1985, 1989a, 1989b, 1989c), el enfoque antropológico sitúa la MM en el corazón de la actividad matemática, asumiéndose que la modelización no es únicamente un aspecto de las matemáticas, sino que, en cierto sentido, *toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización*.

Se postula que cualquier actividad científica y, en particular, la actividad matemática, puede ser descrita en términos de la interrelación entre *sistemas* y *modelos*. Esto es, en toda actividad matemática se puede identificar un *sistema* en torno al cual se formulan *cuestiones problemáticas* que motivan, y dan origen, a la construcción de ciertos *modelos*. Esta construcción toma sentido como medio para aportar *respuestas* (aunque sean parciales y provisionales) a las cuestiones problemáticas que le han dado origen. Y en este proceso de búsqueda de respuestas se van a generar nuevas cuestiones que podrán requerir la búsqueda y construcción de nuevos modelos que puedan hacer avanzar el proceso.

En este punto la noción de *praxeología matemática* (en adelante PM) constituye la herramienta fundamental que utiliza la TAD para describir la actividad matemática y, en particular, los *sistemas* y los *modelos* que intervienen en los procesos de MM puesto que para estos se postula una estructura praxeológica[10]. Siguiendo los trabajos de García (2005) y de Garcíaet al. (2006), y generalizando la noción clásica del "ciclo de modelización" (BLUM, LEIß 2007), consideraremos los procesos de modelización como *procesos de reconstrucción y articulación de PM de complejidad creciente* (GARCÍA 2005, SIERRA 2006, BARQUERO 2009, RUIZ-MUNZÓN 2010).

Este proceso parte de cuestiones problemáticas que se plantea una comunidad de estudio y que constituyen la "razón de ser" de las PM que va a ser necesario (re)construir a modo de respuesta. En consecuencia, la MM así interpretada constituye un *instrumento de articulación de la actividad matemática escolar* y requiere de manera imprescindible

[10] Señalemos, sin entrar en detalles, que en toda PM se pueden distinguir dos aspectos inseparables: el nivel de la práctica o "*praxis*" y el del discurso razonado sobre la práctica o "*logos*". La praxis consta de los *tipos de tareas* problemáticas (T) y de las *técnicas* (τ), o maneras sistemáticas y compartidas de abordar un tipo de tareas, y constituye el bloque que se identifica genéricamente con el *saber-hacer*. El logos consta a su vez de dos componentes: la *tecnología* (θ) que se encarga de describir, explicar y justificar la praxis, y la *teoría* que puede ser considerada como una tecnología de la tecnología. Posteriormente, con el objetivo de tener herramientas más precisas para analizar los procesos didácticos institucionales, Chevallard (1999) introdujo la distinción entre diferentes tipos de praxeologías – *puntuales*, *locales*, *regionales* y *globales* – según el grado de complejidad de sus componentes y que, lejos de ser nociones absolutas, deben considerarse como nociones relativas a la institución en que viven dichas praxeologías.

considerar la *modelización intramatemática,* esto es, la que parte de un sistema de naturaleza “matemática”, como un caso particular muy importante de MM porque, como mostraremos en la respuesta $\mathbf{R_{12}}$(a), es completamente inseparable de lo que a veces se denomina “modelización extramatemática”.

Dado que la modelización intramatemática ha constituido históricamente (y sigue constituyendo) un instrumento esencial del desarrollo de las propias matemáticas, parece obvio que si la integramos dentro de la noción de “modelización matemática” será necesario utilizar explícitamente un modelo epistemológico general de la actividad matemática y que la nueva interpretación de lo que se entiende por MM deberá ser compatible con dicho modelo.

Esta concepción de MM que propone la TAD implica que la enseñanza de la MM se convierte en sinónimo de *enseñanza funcional de las matemáticas* en contraposición a una enseñanza meramente *formal*. Por lo tanto, desde esta perspectiva,la actividad de MM debe ser parte integrante de cualquier proceso de estudio de las matemáticas, lo que constituye un aspecto esencial de la formulación que propone la TAD del problema de la MM**.**

$\mathbf{R_{12}}$**:** Para interpretar adecuadamente la asunción de la TAD según la cual toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización, hay que tener en cuenta la forma como se interpreta la MM en la TAD, dado que esta difiere de manera significativa de las interpretaciones habituales. En concreto, la TAD propone los tres caracteres diferenciales de la MM que presentamos a continuación.

(a) *Se incluye la modelización intramatemática como un tipo particular muy importante de “modelización matemática”.*

Como ya hemos dicho, la TAD considera la MM de sistemas matemáticos (esto es, la modelización intra-matemática como, por ejemplo, la modelización algebraica de un sistema numérico o topológico y la modelización diferencial de un sistema geométrico) como una parte esencial de la actividad de modelización que es inseparable de la modelización de sistemas extramatemáticos. En efecto, aunque el proceso de modelización parta de un sistema extramatemático (por ejemplo un sistema proveniente de las ciencias de la salud, de las ciencias económicas o de las ciencias físicas) como sistema a modelizar, el progresivo desarrollo de la actividad de modelización incluye necesariamente etapas en las que interviene la modelización intramatemática.

Esta ampliación de la noción clásica de MM es coherente con el desarrollo histórico de las matemáticas y permite considerar la MM como un proceso de matematización progresiva de un sistema en el cual el primer modelo pasa a jugar el papel de sistema (matemático) y así sucesivamente, lo que conduce a trabajar con "*modelos de modelos*" del sistema inicial. Aparece así claramente el *carácter recursivo* de la actividad de MM.

Para ejemplificar la modelización intramatemática y el consiguiente carácter recursivo del proceso de MM podríamos acudir a cualquiera de las disciplinas matemáticas. Aquí tomaremos un ejemplo muy sencillo que parte de un sistema numérico (aritmético) y de un conjunto de cuestiones que se pueden plantear en dicho sistema: ¿Cómo se pueden sumar determinadas series de números tales como:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 1257;$$
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2;$$
$$1^n + 2^n + 3^n + \ldots + n^n;$$
$$5^0 + 5^1 + 5^2 + \ldots + 5^n;$$
$$n^0 + n^1 + n^2 + \ldots + n^n?$$

Se trata de cuestiones problemáticas porque en el sistema aritmético de partida se carece de técnicas adecuadas (económicas y fiables) para responder a dichas cuestiones. Estas limitaciones técnicas sugieren que, si queremos avanzar en el *estudio de este sistema numérico*, será preciso construir un modelo matemático del mismo y utilizar dicho modelo como una "máquina" para producir nuevos conocimientos relativos al sistema numérico modelizado. El primer modelo que consideramos es el que denominamos modelo de la "*forma de los números*". En este modelo se transforman las series de números a sumar en *configuraciones de puntos a contar*, apareciendo los *números poligonales*. Así, por ejemplo, el problema de sumar la serie de números impares (empezando por el 1) se transforma en el problema de contar los puntos que constituyen una configuración "*cuadrada*": 1 = 12; 1 + 3 = 22; 1 + 3 + 5 = 32; 1 + 3 + 5 + 7 = 42; 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 52; etc. En este caso, la configuración anterior muestra la estructura de los *números cuadrados* y proporciona una primera "explicación" (aunque no una "demostración") del porqué la suma de, por ejemplo, los 1000 primeros números impares es igual a 10002. En este modelo del sistema numérico, las *técnicas matemáticas* disponibles se enriquecen con las que se derivan del cálculo de áreas de figuras planas que, sin embargo, presenta importantes limitaciones como se pone de manifiesto cuando se intentan utilizar para calcular cualquiera de las restantes sumas propuestas.

La segunda modelización del sistema numérico inicial puede ser considerada como un *modelo del modelo* de la "forma de los números", lo que muestra el *carácter recursivo del proceso de modelización*. Este segundo modelo se fundamenta en la asignación de "nombres" adecuados a los números de manera que pongan de manifiesto, en cada caso, las propiedades de éstos que nos interesan. Así, a los números impares se les puede asignar el siguiente "nombre":

$$2n - 1 \ (n \in \mathrm{N}, n \neq 0)$$

Gracias al nombre asignado a los números impares, se puede modelizar algebraicamente la técnica que, en el modelo de la "forma de los números", permitía sumar un número cualquiera de impares consecutivos. Trabajando en el modelo del *nombre de los números* se demuestra fácilmente que la diferencia entre los cuadrados de dos números consecutivos cualesquiera es igual a un número impar (propiedad que en el modelo de la "*forma de los números*" sólo se mostraba):

$$n^2 - (n - 1)^2 = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1.$$

Basándose en esta igualdad se demuestra que la suma de los k primeros impares es igual al cuadrado de k.

$$\sum_{n=1}^{k} 2n - 1 = \sum_{n=1}^{k} n^2 - (n-1)^2 = k^2$$

Los detallesde este ejemplo, así como el desarrollo, dentro del modelo del "nombre de los números", de las técnicas matemáticas que permiten calcular el término general de las *sucesiones de recurrencia lineales homogéneas* y resolver así todas las cuestiones planteadas y muchas más, se encuentran en Bolea, Bosch, Gascón (2001a, pp. 269-270).

Otra consecuencia importante de esta forma de interpretar la MM es que permite poner de manifiesto su *carácter reflexivo*, puesto que en la modelización intramatemática (donde tanto el modelo como el sistema son de naturaleza matemática) el sistema puede hacer el papel de *modelo de su modelo*. Un ejemplo histórico de este proceso, nos lo proporciona el carácter reflexivo de la modelización mutua entre las geometrías euclidiana y cartesiana.

(b) *Se postula que los modelos que se construyen en la MM tienen estructura praxeológica (no son componentes aislados de una praxeología) y que los modelos no tiene la función de ser una imagen "fotográfica" del sistema modelizado.*

El análisis de la actividad de modelización nos conduce a considerar los sistemas y modelos como entidades con estructura necesariamente *praxeológica*. En efecto, el modelo epistemológico de la TAD no permite considerar la modelización de "conceptos" ni de "técnicas" ni de "problemas" aislados. Dada la naturaleza dinámica de las praxeologías, y la profunda interrelación que hay entre sus componentes, no podemos hablar de modelización de un componente de la praxeología independientemente del resto de los elementos. Postulamos, en consecuencia, que toda MM presupone la *modelización de una praxeología en su totalidad*, mediante otra PM.

En cuanto a la naturaleza de los modelos y su relación con el sistema modelizado, no debemos caer en la ingenuidad de pensar que un *modelo* es una copia o reproducción del sistema que modeliza, sino que es un *añadido* a dicho sistema, una *construcción artificial*. Se enfatiza así que la principal función del modelo no es la de "parecerse" al sistema que modeliza, sino la de *aportar conocimientos* sobre él y hacerlo de la forma más económica y eficaz posible. Para superar esta falsa interpretación, Chevallard (1992) propone sustituir la metáfora del modelo como *representación* figurativa del sistema por la del modelo como *máquina* cuyo funcionamiento permite producir conocimientos relativos al sistema modelizado. Digamos por último, que la problemática de la *adecuación del modelo al sistema* comporta la tarea de comparación de diferentes modelos de un mismo sistema. Esta dialéctica de idas y venidas entre el sistema y sus posibles modelos da lugar a un proceso*de ajuste progresivo* generado por el cuestionamiento constante de la eficacia del modelo que tiene por objetivo dar respuesta tanto a las cuestiones iniciales como a las que van apareciendo a lo largo del proceso de estudio. Este proceso de ajuste progresivo no debe confundirse con un proceso de adecuación del modelo a la "forma" del sistema.

Para ejemplificar la estructura necesariamente praxeológica de los sistemas y los modelos, así como la función de los modelos como "máquinas" destinadas a producir conocimientos relativos al sistema modelizado, partiremos precisamente de la *geometría euclidiana* definida axiomáticamente y que tomamos globalmente como sistema a modelizar. La explicitación de los axiomas de la geometría euclidiana, que no haremos aquí, constituye la primera etapa del proceso de modelización que podemos denominar *delimitación del sistema*. La segunda etapa es la construcción del modelo que sintetizamos brevemente a continuación en dos pasos.

Primer paso: *la introducción de coordenadas*. Fijamos de una vez por todas dos rectas que se cortan perpendicularmente en un punto *O* y lo denominamos *sistema de referencia cartesiano de origen O*. Suponemos que en la correspondencia biyectiva entre los puntos de estas rectas y los números reales (que constituye uno de los axiomas de la geometría euclidiana) al punto *O* le corresponde el número 0. A partir de aquí podemos establecer una correspondencia biyectiva entre los puntos del plano euclidiano y los pares ordenados de números reales.

Segundo paso: *las rectas tienen ecuaciones lineales*. Se puede demostrar que las rectas paralelas a los ejes de coordenadas tienen, respectivamente, ecuaciones del tipo $x = a$ e $y = b$. Para demostrar que una recta no paralela a los ejes también tiene una ecuación lineal, basta utilizar que si dos triángulos están en posición de Tales son semejantes y, entonces, los lados correspondientes son proporcionales.

La tercera etapa del proceso de modelización es el *trabajo dentro del modelo* que empieza por demostrar que la *geometría cartesiana*, definida mediante la traducción de los axiomas de la geometría euclidiana al modelo que acabamos de construir, cumple todos los axiomas de la geometría euclidiana. Así podremos afirmar que aquella constituye un modelo algebraico de esta. Resulta, en definitiva, una prueba de la *consistencia de la geometría euclidiana* (si el álgebra es consistente, la geometría euclidiana también lo es). Esta tercera etapa del proceso de modelización contiene asimismo el trabajo necesario dentro del modelo para responder a cuestiones planteadas previamente en el sistema y que, al no poder ser respondidas en este, dieron origen a la necesidad de construir el modelo que, en este caso, no es otro que la propia geometría cartesiana. Aquí podemos citar, por ejemplo, el famoso *problema de Pappus* formulado inicialmente en el ámbito de la geometría euclidiana y resuelto por Descartes en 1632 (GONZÁLEZ-URBANEJA 2003, pp. 111 y ss.).

En la cuarta etapa del proceso de modelización matemática se pueden *enunciar problemas nuevos* cuya resolución permitirá dar respuestas a cuestiones, relativas al sistema, que difícilmente se podían plantear antes de la construcción y del trabajo en el modelo. En esta etapa los problemas que se enuncian dentro del modelo pueden independizarse del sistema inicial para dar origen a nuevos sistemas y a nuevas cuestiones problemáticas que requerirán de nuevos procesos de modelización. Bastará citar la problemática de las *geometrías no euclidianas* como uno de los grandes desarrollos de este proceso de modelización que han acabado independizándose de la problemática estrictamente euclidiana.

(c) *Se interpreta la MM como un instrumento de articulación de la actividad matemática escolar.*

La TAD describe los procesos de modelización como *procesos de reconstrucción y articulación de PM de complejidad creciente* que necesariamente tienen que partir de cuestiones problemáticas que se plantea uma comunidad de estudio y que constituyen la "*razón de ser"* de las citadas PM. La forma como se conceptualiza la complejidad creciente de las PM es la siguiente: las PM más elementales se llaman *puntuales* y están constituidas alrededor de lo que en determinada institución es considerado como un único *tipo de tareas*. Cuando uma PM se obtiene por integración de cierto conjunto de PM *puntuales*, tales que todas ellas aceptan un mismo discurso tecnológico, diremos que tenemos una PM *local* caracterizada por dicha *tecnología*. Análogamente se habla de PM *regional* cuando se obtiene por integración de PM locales y está caracterizada por una *teoría*. Incluso podemos hablar de PM *global* cuando incluye toda una disciplina.

Para mostrar en qué sentido la modelización matemática puede considerarse como un *instrumento de articulación* de la actividad matemática escolar, tomaremos el ejemplo del proceso de modelización de la *proporcionalidad clásica* tal como se describe en Bolea, Bosch & Gascón (2001a).

En dicho trabajo se muestra de manera categórica que en la enseñanza secundaria actual la relación de proporcionalidad entre magnitudes aparece siempre aislada. Su integración en el ámbito de las relaciones funcionales (elementales) entre magnitudes requeriría la existencia, en el ámbito de la matemática escolar, de un nuevo tipo de técnicas matemáticas y, sobre todo, provocaría un cambio importante del papel que juega la proporcionalidad en la enseñanza secundaria. El mundo relativamente cerrado de la PM escolar en torno a la proporcionalidad debería desaparecer para integrarse en una PM mucho más amplia en la que la relación de proporcionalidad entre magnitudes sería considerada como una relación funcional más, al lado de muchas otras relaciones funcionales posibles. Se produciría así una reestructuración importante del conjunto de PM que se estudian en la secundaria obligatoria porque la *modelización funcional* *algebraica* pasaría a ocupar un papel central en dicho currículum.

Todos los datos disponibles muestran que la PM escolar en torno a la proporcionalidad no alcanza ni siquiera el primer nivel de algebrización, situándose en un estadio intermedio entre éste y la organización clásica. En efecto, mientras perviven muchos elementos de la organización clásica en torno a la proporcionalidad que considera la proporcionalidad como una *relación entre magnitudes*, aparecen múltiples tareas que tratan la proporcionalidad como una *relación entre variables numéricas* (e, incluso, como una *relación aritmética entre números*) eliminando completamente las magnitudes. Aunque en ocasiones se describela relación de proporcionalidad como una relación entre dos series de números, los problemas y las técnicas utilizadas en la práctica matemática escolar se mantienen muy cercanos al universo de las "reglas de tres". El aislamiento escolar de la relación de proporcionalidad, y la consiguiente *desarticulación de este ámbito de la matemática escolar*, puede ser interpretado, en gran medida, como una consecuencia de esta algebrización desigual, esto es, como unresultado de la ausencia del proceso de modelización algebraica de la proporcionalidad que debería culminar en la modelización funcional y, en definitiva, como un efecto de la ausencia efectiva del álgebra como instrumento de modelización (GARCÍA 2005; GARCÍA, GASCÓN, RUÍZ, BOSCH 2006).

R_{13}: La mayor parte de los trabajos que se llevan a cabo en el dominio de investigación "modelización y aplicaciones" se centran, o bien en un *nivel puntual* de las cuestiones aisladas o problemas de "aplicación" (BLOMHØJ, KJELDSEN 2009, BLUM 2002, BLUM, LEIß 2007, BLUM et al. 2007) o, por el contrario, consideran la modelización como una *competencia matemática general* situándola, por lo tanto, en el *nivel disciplinar* de la matemática escolar como un todo (NISS, 2001).

Desde el punto de vista de la TAD, todo problema didáctico debe hacer referencia necesariamente, de manera más o menos explícita, al proceso de estudio institucional de una PM local *relativamente completa* (BOSCH, FONSECA, GASCÓN 2004). Este es el ámbito matemático de la *unidad de análisis* de los procesos didácticos tal como se consideran en la TAD (BOSCH, GASCÓN 2005) y, por lo tanto, el ámbito en el que se debe plantear el problema. En particular, el problema de la MM no puede abordarse haciendo referencia únicamente a una PM *puntual* [11], esto es, generada únicamente por un concepto, por una técnica o por un tipo de problemas matemáticos.

4. Dimensión económicadel problema de la modelización matemática

Las cuestiones que forman parte de la *dimensión económica de la MM* son las que giran en torno a la relación institucional a esta actividad, esto es, las que se refieren a la forma de interpretar la MM en las instituciones involucradas en el proceso de transposición didáctica y, en definitiva, al tipo de actividades de MM que es posible llevar a cabo en dichas instituciones. Podríamos hablar de la *economia de la MM en las instituciones* en un sentido similar a como se hablade *economía de un organismo* (o de un sistema complejo cualquiera), para referirse a la *coordinación de los componentes* (o subsistemas) que intervienen en su funcionamiento (MOLINER 2007, p. 1098).

Es obvio que estas cuestiones (y las posibles respuestas) dependerán en gran medida del MER específico de la MM que hemos construido y que utilizaremos como sistema de referencia, lo que confirma una vez más el papel nuclear de la dimensión epistemológica en la construcción de los problemas didácticos.

Para responder a las citadas cuestiones se ha de llevar a cabo lo que Chevallard (2010) designó como el *análisis clínico de la didáctica.* Este análisis pretende, por una parte, estudiar los hechos didácticos que tienen lugar efectivamente en las instituciones didácticas, los que se producen cuando se introducen cambios didácticos controlados y la viabilidad de dichos cambios.

En concreto, algunas de las cuestiones que forman parte de la *dimensión económica* del problema de la MM, P_2 (MM), son las siguientes:

> **Q_{21}:** ¿Qué *ámbito institucional* hemos de tomar en consideración para abordar el problema didáctico de la MM: el aula, la escuela, el sistema de enseñanza de las matemáticas, la Sociedad o incluso la Civilización?
>
> **Q_{22}:** ¿Cómo se considera, cómo se describe y cómo se interpreta la MM *en cada una de las instituciones* que intervienen en el proceso de transposición? ¿Qué actividades consideradas como integrantes de la

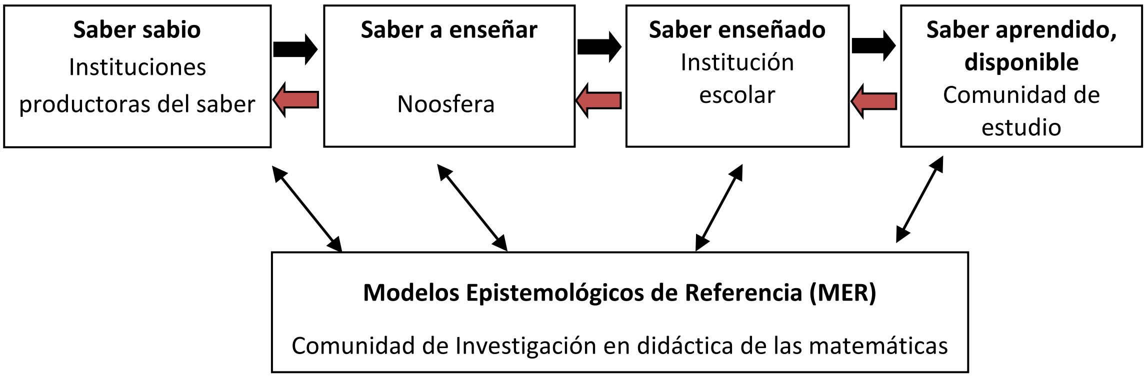
[11] Como ya hemos dicho, la caracterización de una PM como *puntual*, *local* o *regional* no es absoluta. Depende de lo que se considere, en cada institución, como un único *tipo de tareas matemáticas*, así como del ámbito que abarque el discurso tecnológico que se le asocie. Se puede mostrar (FONSECA 2004; BOSCH, FONSECA, GASCÓN 2004) que una de las discontinuidades didácticas que se aprecian en la articulación entre la enseñanza secundaria y la universitaria es la dificultad para hacer vivir en la enseñanza secundaria PM locales y la consiguiente ausencia de PM locales (en la universidad) que sean capaces, a su vez, de constituir el punto de partida para la construcción de PM de nivel superior (regionales y globales) de una forma no meramente *teoricista* (GASCÓN 2001)

MM en el MER que propone la TAD viven actualmente con normalidad en los sistemas de enseñanza?

Q$_{23}$: ¿Qué se entiende en las instituciones didácticaspor "*enseñar la MM*" o, simplemente, por "llevar a cabo actividades de MM"? En particular, ¿cómo se relacionan en el sistema de enseñanza las actividades consideradas escolarmente como actividades de MM y las consideradas de *Resolución de Problemas* matemáticos?

R$_{21}$: En la TAD el ámbito institucional de la *unidad de análisis de los procesos didácticos* (BOSCH, GASCÓN 2005) contiene todas y cada una de las instituciones que intervienen en el proceso de *transposición didáctica* (ver Figura 1). En consecuencia, el problema de la MM no puede formularse (como, en rigor, ningún otro problema didáctico) tomando únicamente en consideración los datos que emanan de una sola institución como, por ejemplo, el aula o la instituciónescolar. Mucho menos podemos restringirnos a los datos que emanan del comportamiento individual de los sujetos de una o más instituciones.

Figura 1- Etapas de la transposición didáctica y posición externa de la comunidad de investigación



La asunción de la citada unidad mínima de análisis de los procesos didácticos comporta la preeminencia de lo institucional sobre lo personal, tanto en la descripción de los fenómenos didácticos como en la formulación de los problemas de investigación didáctica y hasta en el tipo de respuestas admisibles. Así, en el caso que nos ocupa, el problema de la MM se formulará, en primera instancia, como un problema institucional (antes que personal) que, aunque aparece en el *sistema de enseñanza* de las matemáticas, no puede ser abordado adecuadamente sin analizar el papel que juega la MM en la matemática que se proponedesde la *noosfera* para ser enseñada y en las *instituciones productoras del saber matemático*.

R$_{22}$: En el ámbito de la TAD el álgebra elemental es considerada, en primera instancia, como un *instrumento de modelización* y, en consecuencia, como la herramienta fundamental para introducir la MM en Secundaria. En la enseñanza secundaria, al identificar el álgebra elemental con una especie de *aritmética generalizada* desaparece su función de instrumento de modelización y únicamente aparecen algunas etapas aisladas del procerso global de modelización. En coherencia con esta forma de interpretar el álgebra elemental, las actividades algebraicas escolares en secundaria son esencialmente *formales y numéricas* (BOLEA 2003, RUIZ-MUNZÓN 2010).

En la Enseñanza Universitaria de las Ciencias Experimentales (en adelante CCEE), en la comunidad científica y enla noosfera, la MM se interpreta como una *aplicación de las matemáticas* a posteriori y que, en cierto sentido, puede ser «prescindible». Este *aplicacionismo*[12] se caracteriza por establecer una distinción neta entre las matemáticas y las CCEE y supone una relación unidireccional entre las matemáticas que fabrican previamente modelos y las CCEE que constituyen el ámbito de los sistemas en los que se usan dichos modelos a posteriori. En consecuencia la MM, tal como se interpreta en la TAD, juega un papel muy secundario y casi decorativo en la enseñanza universitaria de CCEE (BARQUERO 2009).

R$_{23}$: En el sistema de enseñanza de las matemáticas se observa cierto paralelismo entre los papeles asignados por los documentos curriculares a la resolución de problemas y a la MM puesto que ambas se consideran como presuntos ejes integradores de la matemática escolar. Pero, paradójicamente, y tal como pasó con la resolución de problemas entre los años 80 y 90 del siglo pasado, en los libros de texto y en las aulas se tiende a presentarla MM como un contenido aislado que, por lo tanto, pierde su supuesta capacidad articuladora.Como se muestra en el trabajo de Bosch, Gascón, Rodríguez (2004), el movimiento del *Problem Solving* introdujo la resolución de problemas como un nuevo objetivo de enseñanza de las matemáticas. Este movimiento, cuyo máximo estandarte se sitúa en el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) de los EEUU, empezó recomendando que la resolución de problemas debía incorporarse como uno de los objetivos principales de la enseñanza matemática ("Agenda for Action"1980), hasta llegar a los *Principles and Standards for School*

[12]El aplicacionismo supone que los sistemas científicos y los modelos matemáticos que se utilizan para estudiarlos se mantienen invariantes a lo largo del proceso de estudio. Se contrapone así a la idea defendida por Galileo y el resto de la tradición platónica según la cual las matemáticas son "constitutivas" de las CCEE puesto que los fenómenos científicos se "construyen" a lo largo del proceso mismo de MM. Alexander Koyré (1973) explica que esta contraposición tiene raíces filosóficas profundas y proviene de la controversia entre las tradiciones de Platón y Aristóteles.

Mathematics en el 2000 donde queda ya formulada la hipótesis a la que nos referimossobre el papel de la resolución de problemas como *eje integrador y articulador de las matemáticas*:

> Solving problems is not only a goal of learning mathematics but also a major means ofdoing so […]. Problem solving is an integral part of all mathematics learning, and so itshould not be an isolated part of the mathematics program. Problem solving in mathematics should involve all the five content areas described in these Standards (NCTM 2000, p. 51)

Pero después de realizar un análisis de los textos oficiales españoles publicados en la última década del siglo pasado, los autores citados concluyen que la resolución de problemas juega um papel paradójico en los currículos y en las aulas. Por un lado, en los textos oficiales sele atribuye un papel *integrador* y *articulador*, mientras que su tratamiento didáctico en el aula aparece totalmente *aislado* del resto de atividades matemáticas, hasta el punto que acaba convirtiéndose en un nuevo contenido de enseñanza en lugar de aparecer como el contenido común. De aquí el declive de este movimiento no sólo a nivel español sino a nivel mundial. Como indican estos mismos autores:

> Nuestra hipótesis es que la formulación de la resolución de problemas como objetivo general (a nivel de la sociedad, la escuela o las matemáticas) no puede concretarse en los niveles inferiores de determinación (áreas, sectores o temas concretos) sin aparecer como "desvirtuado" por desprovisto de su carácter general. Si enseñar a resolver problemas, asecas, es distinto de enseñar a resolver problemas de este o aquél tipo, o de este o aquél sector de las matemáticas, entonces el mandato curricular no puede concretarse en ningún bloque de contenido concreto. De ahí su aparición como "bloque alternativo", ya sea allado de las demás áreas, ya sea como un nuevo tipo de bloque, "bloque de proceso" em oposición a "bloque de contenido" (ejemplo de los estándares estadounidenses). (BOSCH, GASCÓN, RODRÍGUEZ 2004, p. 128)

Tal como ocurrió en el caso de la resolución de problemas, el movimiento que propugna la enseñanza de la MM podría conducir (y, en algunos casos ya está conduciendo) a un deslizamiento semejante: del objetivo de enseñar la MM como herramienta de articulación de contenidos podría pasarse a la incorporación de la MM en el currículum como un contenido más, separado de los restantes y, por lo tanto, perdiendo (o renunciando a) su capacidad articuladora.

5. Dimensión ecológica del problema de la modelización matemática

Las cuestiones que forman parte de la *dimensión ecológica*, P_3(MM), del problema de la MM constituyen la problemática en torno a*por qué* la *relación institucional a la MM* es como es y qué condiciones se requerirían para modificarla en una dirección determinada dentro del universo de lo posible. De nuevo hay que señalar que estas cuestiones y sus potenciales respuestas dependerán, en primer lugar, de la forma de interpretar la MM (explicitada en el MER que hemos construido), lo que vuelve a subrayar el papel nuclear de la dimensión epistemológica del problema. Para llevar a cabo el análisis de la *ecología de la MM en los sistemas didácticos* se utilizan diversos materiales empíricos (manuales, textos oficiales, transcripciones de las clases, respuestas de alumnos y profesores a determinados cuestionarios, etc.) y se deben tener en cuenta las diferencias respecto al funcionamiento de la MM en las instituciones escolares y en las restantes instituciones que intervienen en el proceso de transposición didáctica.

Este análisis de algunos rasgos de la ecología de la MM en los sistemas didácticos pone claramente de manifiesto una sorprendente ausencia de la MM en dichos sistemas. Aparece así, como sucede en el caso del álgebra elemental, la necesidad de llevar a cabo un estudio ecológico que tenga en cuenta la naturaleza "abierta" del sistema didáctico con el objetivo de identificar restricciones que inciden sobre la ecología escolar de la MM y que provienen no sólo del propio sistema de enseñanza, sino también de la noosfera, de la matemática sabia y hasta de la cultura y las prácticas sociales (BARQUERO 2009).

Q_{31}:¿Qué papel juega la voluntad y las decisiones de los sujetos de las instituciones escolares en la ausencia de la MM en la actividad matemática escolar?

Q_{32}: ¿Por qué la MM está casi completamente ausente en la matemática escolar? ¿Cuáles son las principales *restricciones* que dificultan y hasta impiden la vida de la MM en los actuales sistemas escolares?

Q_{33}: ¿Cómo incide sobre la vida de la MM la *pedagogía dominante* en las instituciones escolares?

R_{31}: Uno de los principios básicos de la ecología de los problemas didácticos puede formularse diciendo que las características de las praxeologías matemáticas y didácticas, que viven en una institución determinada, no pueden cambiarse como consecuencia exclusiva de la *voluntad ni de la formación de los agentes de las instituciones* en cuestión, sean estos profesores, autores de cualquier tipo de materiales escolares o autoridades educativas. En particular, el papel que la TAD propugna para la MM no puede imponerse de manera puramente *voluntarista*, se requieren avances en la investigación didáctica que aporten un conocimiento bastante preciso de las condiciones de posibilidad y de las consecuencias de los cambios que se proponen. Desde el punto de vista de la TAD, uno de los objetivos esenciales de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica es precisamente el de aportar una visión más clara de las *condiciones de posibilidad* y de las *restricciones* que influyen sobre el acto de enseñanza. El estudio sistemático de dichas *restricciones* y de su procedencia es imprescindible para determinar el nivel adecuado de actuación desde el cual se puedan crear las *condiciones* necesarias para la difusión del conocimiento matemático.

R_{32}: Como sucede con todos los problemas didácticos, el estudio de las restricciones que dificultan y las condiciones que se necesitan para llevar a cabo la integración de la MM en nuestros sistemas de enseñanza requiere *ampliar el espacio institucional reservado a la didáctica de las matemáticas*. Mientras que tradicionalmente el espacio de acción de la didáctica se ha restringido al aula o, a lo sumo, a la institución escolar, la TAD postula que para estudiar la *dimensión ecológica* de cualquier problema didáctico es imprescindible tomar en consideraciónlos datos empíricos provenientes de todas las etapas de la transposición, desde las instituciones productoras del saber hasta las instituciones docentes[13].

En el caso de la MM, debemos estudiarlas restricciones transpositivas que inciden sobre las actividades de modelización escolares, teniendo en cuenta que estas restricciones originan transformaciones tanto de los objetos matemáticos como de la forma de organizarlos y de reconstruirlos en la escuela. Si no se toman en consideración las "fuerzas institucionales" que provocan el proceso de transposición didáctica, no será posible describir las condiciones que se requieren para que la MM pueda vivir en el sistema de enseñanza de las matemáticas.

[13]El saber que se enseña en la escuela proviene de distintas transformaciones de un "saber sabio" que es el que legitima y justifica su difusión (o "transposición") a otras instituciones. Dichas transformaciones se operan en instituciones intermedias y, en particular, en la "noosfera". Esta actúa como membrana del sistema de enseñanza, haciéndola permeable a ciertos objetos y protegiéndola de otros. Es en esta institución intermedia donde se decide, determina y describe el "saber a enseñar", es decir aquellos objetos matemáticos que se propone transponer en la escuela y que se acaban oficializando en los programas oficiales, libros de texto, recomendaciones a profesores, materiales didácticos, etc. La escuela también impone restricciones (en los niveles escolar, pedagógico y didáctico) para que los objetos matemáticos que se van a enseñar cumplan ciertos requisitos que las hagan "enseñables" de acuerdo a ciertos principios y modos de funcionamiento históricamente determinados. Esto provoca que el "saber efectivamente enseñado" no coincida normalmente con el "saber a enseñar", aunque las discrepancias deban mantenerse siempre relativamente ocultas o disimuladas para que el proceso de enseñanza no pierda su legitimidad (CHEVALLARD, 1985/1991).

Por ejemplo, la transposición puede facilitar la entrada en el sistema de enseñanza de ciertos objetos (los conceptos, modelos y sistemas conceptuales que tengan una existencia clara en la institución “sabia”) y dificultar la entrada de otros (en particular de los objetos “extramatemáticos” que no tengan una existencia clara en el saber matemático “sabio”). Pueden aparecer entonces rasgos de *algoritmización de la modelización* que se manifiestan en la tendencia a cerrar las actividades de MM convirtiéndolas en “resolución de problemas aplicados” relativamente aislados que no suelen dar origen al estudio de un verdadero campo de problemas si estos problemas no están previamente “nombrados” en el saber sabio. Y puede resultar de ello una *pérdida de sentido* de la MM cuando esta se enseña sin que responda a una verdadera necesidad de estudiar un sistema, esto es, cuando el estudio del sistema modelizado no se toma realmente en serio sino que sólo sirve como “excusa” para llevar a cabo un proceso de MM cuyo último objetivo sería la aplicaciónde conceptos matemáticos más acordes con el “saber sabio” y sólo artificialmente “motivados”. En Bolea, Bosch, Gascón (2001a y 2004) se estudia el efecto de la transposición sobre las praxeologías matemáticas en el proceso de algebrización.

R_{33}: En la *pedagogía monumentalista* dominante (CHEVALLARD 2005 y 2006) se identifica el objetivo de “enseñar” con el de “mostrar” los contenidos establecidos de antemano y cristalizados, olvidando las cuestiones específicas que los han generado. Esta dificultad para centrar el proceso didáctico en el *estudio de cuestiones* es una clara restricción a la vida de la MM porque el proceso de MM parte siempre y está generado por una cuestión.

La pedagogía dominante preconiza, además, una enseñanza cada vez más *personalizada* para tomar en consideración la exigencia cultural creciente de la atención a la diversidad, de manera que el profesor debe individualizar los objetivos de los contenidos y hasta el método de enseñanza. Esta *concepción individualista* de la enseñanza constituye una nueva restricción a la vida “normal” de la MM puesto que esta, como toda actividad científica, requiere que sea la comunidad la que se responsabilice del estudio de las cuestiones.

Por otra parte, la pedagogía dominante, con la “buena intención” de evitar que los alumnos se alejen y separen de la institución escolar, tiende a eliminar aquellos aspectos disciplinares (en nuestro caso, los aspectos de la *disciplina matemática*) más exigentes y, supuestamente, difíciles de soportar por los alumnos. Este principio “proteccionista” ha provocado sucesivamente en la Enseñanza Primaria, en la Secundaria y ahora ya en la Universitaria, una tendencia a excluir algunas de las principales dimensiones de la actividad matemática genuina, lo que tiene consecuencias imprevistas, espontáneas y contrarias, paradójicamente, a lo que se proponía (se trata de las "*funciones latentes*" en el sentido de Max Weber 1904/2009).

En consecuencia, la pedagogía dominante disminuye progresivamente los objetivos a largo plazo, dando fuerza al *mito de la comprensión inmediata* y casi instantánea (CHEVALLARD, BOSCH, GASCÓN 1997/2001): *atomiza la matemática enseñada* que se acaba convirtiendo en un conjunto de "anécdotas" independientes y hace desaparecer progresivamente el trabajo *sistemático*, *paciente* y *a largo plazo*,al tiempo que toda actividad "rutinaria" y sistemática es considerada repetitiva y aburrida, sobrevalorándoselo "práctico" considerado como "concreto" y motivador, frente al discurso justificativo que se considera "teórico", "abstracto", difícil y hasta fuera de lugar (GASCÓN 2009).

Todos estos rasgos de la pedagogía dominante provocan restricciones a la vida escolar de la MM puesto que esta es un prototipo de actividad sistemática, a largo plazo, con periodos de trabajo rutinario, que aporta respuestas siempre provisionales y proporciona una comprensión permanentemente incompleta, y que transforma "lo concreto" en "abstracto" y permite interpretar "lo abstracto" en el ámbito de "lo concreto".

6. Hacia un nuevo modelo didáctico: los recorridos de estudio e investigación

En resumen, podemos decir que sólo en la medida en que se ha avanzado en el estudio del problema de la MM, ha sido posible diseñar, desarrollar y experimentar de manera fundamentada dispositivos didácticos encaminados a posibilitar la implantación y el desarrollo de la MM en los sistemas de enseñanza de las matemáticas. Este avance se ha materializado, como hemos explicado, en progresos en cada una de las tres dimensiones del problema de la MM, esto es:

P_1(MM): Se ha clarificado y profundizado la noción de MM y su relación con la actividad matemática funcional (dimensión *epistemológica*).

P_2(MM): Se ha puesto de manifiesto cómo se interpreta la MM en los sistemas de enseñanza y cuál es el papel que juega en ellos dicha actividad (dimensión *económica*);

P_3(MM): Se ha progresado en el conocimiento de las condiciones que se requieren para que sea posible la vida de la MM en las instituciones escolares y se ha empezado a dilucidar el origen y la naturaleza de las restricciones que actualmente la dificultan (dimensión *ecológica*).

Estos nuevos dispositivos didácticos (que se están diseñando y experimentando en paralelo a los avances en el estudio del problema de la MM) son los *recorridos de estudio e investigación* (REI) que fueron introducidos por Chevallard (2005 y 2006). No es el objetivo de este trabajo hacer una descripción general de los REI ni, tampoco, explicar las múltiples experimentaciones que se han llevado a cabo y en las que estos dispositivos han jugado un papel central (GARCÍA 2005, RODRÍGUEZ 2005, SIERRA 2006, BARQUERO 2009, RUIZ-MUNZÓN 2010). Diremos únicamente que un REI es un dispositivo didáctico que viene desencadenado por el estudio de una cuestión viva con fuerte poder generador, capaz de dar lugar a un gran número de cuestiones derivadas. El estudio de dichas cuestiones da lugar a una *arborescencia de respuestas provisionales y de nuevas cuestiones* que se desarrollan en una dialéctica compleja y delimitan el mapa de los posibles recorridos del estudio.

Los REI recuperan así la relación genuina entre cuestiones y respuestas que está en el origen de la construcción de todo conocimiento científico y, en particular, de la actividad de modelización. Esto es, en un REI las cuestiones van "antes" que las respuestas. Además, las cuestiones "se toman en serio" puesto que son las que generan y dan sentido al proceso de estudio; las respuestas vienen "después", no se conocen de antemano, siempre son provisionales y generan, a su vez, nuevas cuestiones.

De entre las características de los REI directamente relacionadas con la MM destacamos las siguientes:

(a) Permiten que la MM tenga un gran protagonismo a lo largo del proceso de estudio, explicitando y resaltando en cada paso su papel esencial como *herramienta de construcción de conocimiento*.

(b) Provocan una transformación notable de los objetivos y de los *dispositivos de evaluación*, centrándolos en el proceso de MM como totalidad más que en los productos finales resultantes de dicha actividad.

(c) Permiten explicitar, cristalizar, institucionalizar y evaluar el propio proceso de MM, lo que posibilita que el proceso de estudio tenga una cierta continuidad en el tiempo y *rompa con la atomización* de las cuestiones matemáticas que se tratan.

(d) Posibilitan el *cuestionamiento tecnológico* de los modelos que se van construyendo. Este cuestionamiento es el motor de todo el proceso de estudio

> porque provoca la necesidad de reestructurar, modificar, corregir e interpretar los modelos estudiados mediante la progresiva ampliación de las hipótesis sobre el sistema y la correlativa construcción de otros modelos más amplios y complejos.

Por todo ello, los REI constituyen dispositivos didácticos muy flexibles que pueden ayudar a superar muchas de las *restricciones* que dificultan enormemente y casi impiden la enseñanza de la MM en los actuales sistemas de enseñanza, aunque los resultados obtenidos hasta el momento también muestran que la integración y difusión generalizada de los REI en los actuales sistemas de enseñanza (desde infantil hasta la universidad) requieren seguir profundizando en el estudio de sus condiciones de viabilidad y sus posibilidades de desarrollo.

En efecto, la gestión de los REI requiere modificar profundamente el *reparto de responsabilidades* que se da por sentado en un curso escolar tradicional, lo que implica cambios importantes en el *contrato didáctico* habitual. El profesor debe actuar como director del proceso de estudio cediendo la máxima autonomía y responsabilidad a los alumnos y negociando explícitamente muchos de los aspectos que suelen quedar implícitos y bajo la responsabilidad exclusiva del profesor: planificación del estudio, tiempo dedicado a cada una de las actividades, selección de las herramientas matemáticas supuestamente apropiadas, uso de herramientas informáticas y bibliográficas, institucionalización de las respuestas parciales, evaluación de los resultados, etc. Esta *autonomía debe ser asumida por los estudiantes* porque es una condición imprescindible para poder desarrollar la actividad de modelización matemática.

Señalemos, para acabar, y en base a lo dicho hasta aquí, que la implantación generalizada de los REI supondría la introducción de cambios profundos tanto en la estructura como en las funciones del sistema de enseñanza. No es de extrañar, por lo tanto, la existencia de múltiples restricciones que surgen, en primera instancia en el nivel disciplinar, y que también se manifiestan en los niveles escolar, pedagógico y social, y que dificultan grandemente la implantación generalizada de los REI. Como afirma Rolando García, los sistemas complejos, y el sistema de enseñanza es un prototipo de tales sistemas, imponen sus propias leyes a sus subsistemas mediante los *mecanismos homeostáticos* que mantienen el sistema en estado estacionario y mediante los *procesos de reorganización* que conducen a la formación de nuevas estructuras estabilizadas (GARCÍA 2006, p. 127).

Referencias

ARTIGUE, M., BOSCH, M. & GASCÓN, J. (2011). Research praxeologies and networking theories. En M. Pytlak, T. Rowland, E. Swoboda (Eds.) *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME7* (pp. 2381-2390). Rzeszów, Polonia: University of Rzeszów.

BARQUERO, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Tesis doctoral. Departament de Matemàtiques. Universitat Autònoma deBarcelona. Versión digital disponible en: http://www.tesisenxarxa.net/TESIS_UAB/AVAILABLE/TDX-0615110-153200/

BARQUERO, B., BOSCh, M. & GASCÓN, J. (2011). Los Recorridos de Estudio e Investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las Ciencias Experimentales, *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(3), 339-352.

BOLEA, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.*Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

BOLEA, P., BOSCh, M. & GASCÓN, J. (2001a). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 21/3, 247-304.

BOLEA, P., BOSCH, M. & GASCÓN, J. (2001b). Cómo se construyen los problemas en Didáctica de las Matemáticas.*Educación Matemática*, 13(3), 22-63.

BOLEA, P., BOSCH, M. & GASCÓN, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica, 14*, 125-133.

BLOMHØJ, M., & KJELDSEN, T. H. (2009). Project organised science studies at university level: exemplarity and interdisciplinarity. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 41 (1-2), 183-198.

BLUM, W. (2002). ICMI study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*,51, 149–171.

BLUM, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines *et al.* (Eds), *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics.* (pp. 222-231). Chichester, UK: Horwood.

BLUM, W., GALBRAITH, P. L., HENN, H.-W. & NISS, M. (2007). Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study. New ICMI Study Series Volume 10. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*,40(2), 337-340.

BOSCH, M., FONSECA, C. & GASCÓN, J. (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24/2; 205-250.

BOSCH, M. & GASCON, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A. et Margolinas, C. (Coord.), *Balises en Didactique des Mathématiques*, (pp. 107-122), La Pensée Sauvage : Grenoble.

BOSCH, M. & GASCÓN, J. (2007). 25 años de transposición didáctica, en Ruiz-Higueras, L., Estepa, A. y García, F.J. (eds.) *Sociedad, Escuela y Matemáticas.*

Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén, 385-406.

BOSCH, M., GASCÓN, J. & RODRÍGUEZ, E. (2004). ¿Qué papel se asigna a la resolución de problemas en el actual currículum de matemáticas? In C. Castro, & M. Gómez, *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas* (pp. 95-118). Barcelona: Edebé.

BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics. Didactique des Mathématiques 1970-1990*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

CHEVALLARD, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège: l'évolution de la transposition didactique, *Petit x* 5, 51-94.

CHEVALLARD, Y. (1985/1991). *La Transposition Didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage, Grenoble (2ª edición 1991).

CHEVALLARD, Y. (1989a). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie: Perspectives curriculaires : la notion de modelisation. *Petit x, 19*, 45-75.

CHEVALLARD, Y. (1989b). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Troisième partie: Perspectives curriculaires: voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x, 25*, 5-38.

CHEVALLARD, Y. (1989c): *Aspects d'un travail de théorisation de la didactique des mathématiques. Etude du cas de l'algèbre élémentaire*, Nota de síntesis disponible en el IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach, in R. Douady and A. Mercier (eds.), *Research in Didactiqueof Mathematics*, *Selected Papers*. La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 131-167.

CHEVALLARD, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Aique, Buenos Aires.

CHEVALLARD, Y. (1999): L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19/2, 221-266.

CHEVALLARD, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *La place des mathématiques vivantes dansl'éducation secondaire, APMEP,* 239-263.

CHEVALLARD, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En Bosch, M. (Ed.) *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4).* (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.

CHEVALLARD Y. (2010). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD, *Actes de la XXVe École d'Été de didactique des mathématiques (Clermont-Ferrand, août 2010).*

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. & GASCÓN, J. (1997/2001). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje,* ICE/Horsori: Barcelona. [Existe tradução em português: *Estudar Matemáticas. O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*, Artmed Editora: Porto Alegre (Brasil), 2001].

FONSECA, C. (2004). *Discontinuidades Matemáticas y Didácticas entre la Secundaria y la Universidad*, Universidad de Vigo, Tesis doctoral.

GARCÍA, F. J. (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén.

GARCÍA, F.J., Gascón, J., Ruíz, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*,38(3), 226-246.

GARCÍA, R. (2006). *Sistemas complejos. Conceptos, método y fundamentación epistemológica de la investigación interdisciplinaria*, Gedisa: Barcelona.

GASCÓN, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en didactique des mathématiques,* 13(3), 295-332.

GASCON, J. (1994-1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée ». *Petit x*, 37, 43-63.

GASCÓN, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 18(1) 7-34.

GASCÓN, J. (1999a). La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar. *Educación matemática.* 11(1), 77-88.

GASCÓN, J. (1999b). Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas. In T. Ortega, (Ed.), *Actas del III Simposio de la SEIEM* (pp. 129-150). Valladolid: SEIEM.

GASCÓN, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*RELIME*), 4(2), 129-159.

GASCÓN, J. (2002). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas, *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española,* 5/3; 673-698.

GASCÓN, J. (2003). From the Cognitive to the Epistemological Programme in the Didactics of Mathematics: Two Incommensurable Scientific Research Programmes? *For the Learning of Mathematics* 23/2, 44-55.

GASCÓN, J. (2009). El problema de la Educación Matemática entre Secundaria y la Universidad, *Educação Matemática Pesquisa*, 11/2, 273-302.

GASCÓN, J. (2011a). ¿Qué problema se plantea el enfoque por competencias? Un análisis desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 31/1, 9-50.

GASCÓN, J. (2011b). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental.*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME,* 14 (2), 203-231

GONZÁLEZ-URBANEJA, P.M. (2003). *Los orígenes de la geometría analítica*, Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia: Tenerife.

KOYRÉ, A. (1973). *Estudios de historia del pensamiento científico*, Siglo XXI México: D.F.

MOLINER, M. (2007). *Diccionario de uso del español*, Gredos: Madrid.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Recuperable en http://standards.nctm.org

NISS, M. (2001). University mathematics based on problem-oriented students projects: 25 years of experience with the Roskilde Model. En D. Holton, *The teaching andlearning of mathematics at university level: an ICMI study* (pp. 153-165). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

RODRÍGUEZ, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico*. Universidad Complutense de Madrid, tesis doctoral.

RUIZ-MUNZÓN, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*, Universitat Autònoma de Barcelona, Tesis doctoral.

SIERRA, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas*. Universidad Complutense de Madrid, tesis doctoral.

WEBER, M. (1904/2009). *La "objetividad del conocimiento en la ciencia social y en la política social* (J. Abellán, trad.). Madrid: Alianza Editorial (Edición original: 1904).

Recebido em 27/12/2012

Aceito em 15/2/2013