Pesquisa e ensino de matemática: tensão entre modernidade e arcaismos na visão francesa sobre a análise entre 1872 e 1886

Research and Teaching Mathematics: Modernity and Archaism tension on analysis according to French view between 1872 and 1886

GERARD GRIMBERG[1]

TATIANA ROQUE[2]

Resumo

A partir dos trabalhos de Zerner, Gispert e Schubring, procuramos discutir a visão histórica tradicional do conceito de rigor por meio das relações entre pesquisa e ensino da análise na França em um período determinado. Nosso estudo tem por foco dois tratados de análise editados nesta época, de Charles Méray e Jules Houël, nos quais estudamos a parte introdutória que expõe os fundamentos da análise que, segundo os autores, devem partir da construção dos números reais. Este artigo se divide em três etapas: 1) uma discussão sobre a visão tradicional da evolução do conceito de rigor; 2) uma definição do quadro teórico e dos aspectos metodológicos que nos serviram de base para elaborar nosso estudo; 3) o estudo de caso, por meio do exame de dos dois tratados de análise escritos respectivamente por Méray e Houël.
Palavras-chave*: ensino da análise; história da análise; conceito de rigor.*

Resumé

À la suite des travaux de Zerner, Gispert et Schubring, nous essayons de questionner la vision historique traditionnelle du concept de rigueur au travers des relations existant entre recherche et enseignement de l'analyse en France et sur une très courte période. Notre étude est centrée sur deux traités d'analyse parus à cette époque, ceux de Charles Méray et Jules Houël, dans lesquels nous étudions la partie introductive supposée livrer les fondements de l'analyse selon ces auteurs, en particulier la construction des nombres réels qu'ils exposent. Notre étude comporte trois étapes : 1) une discussion da vision traditionelle de l'évolution du concept de rigueur ; 2) une définition du cadre théorique et des concepts avec lesquels nous entendons mener notre étude. 3) l'étude des deux traités d'analyse de Méray et d'Houël.
Mots-clefs*: enseignement de l'analyse; histoire de l'analyse; concept de rigueur.*

Introdução

A historiografia tradicional da matemática costuma designar o século XIX, sobretudo sua segunda metade, como a "idade do rigor". Sabemos que, no período que se estende desta época até meados do século XX, a matemática sofreu a chamada "crise de seus fundamentos", resultado dos paradoxos da teoria dos conjuntos e dos problemas

[1] Instituto de Matemática, UFRJ – gerard.emile@terra.com.br
[2] Instituto de Matemática, UFRJ – tati@im.ufrj.br

relacionados à consistência de seu edifício teórico.

Ao discorrer sobre a história da análise matemática[3], o historiador I. Grattan-Guinness detalha a contribuição de pensadores dessa época, como Dirichlet, Riemann, Weierstrass, reunindo-os em uma "era do rigor". Essa é uma caracterização correta, mas somente no sentido de que a análise adquiriu um fundamento que ainda reconhecemos como satisfatório, o que não é explicitado. O movimento, também conhecido como de "rigorização", que teve lugar entre o fim do século XIX e meados do XX, invadiu toda a análise e transformou-a na disciplina que aprendemos hoje. Logo, quando se fala em "idade do rigor" está se referindo à idade do *nosso* rigor.

Na maioria dos livros que abordam a história da análise matemática, as práticas dos analistas do século XVIII aparecem como inconsistentes em comparação com a análise moderna, que teria começado a se desenvolver com Cauchy. Dentro desse espírito, chega-se a afirmar que, em meados do século XIX, os matemáticos começaram a se preocupar com a inconsistência dos conceitos e provas de amplos ramos da análise e resolveram colocar ordem no caos. O relato sobre o rigor se prolonga, ignorando o período das duas grandes guerras, para incorporar as mudanças que se iniciaram nos anos 1950 e que culminaram com as propostas de Bourbaki para uma nova arquitetura da matemática, que devia ser erigida sobre a ideia de conjunto. O título de outro livro de história da análise, do autor já citado, exprime por si só este objetivo: *From Calculus to Set Theory*. Ou seja, haveria uma linearidade ligando o cálculo infinitesimal, praticado por Leibniz e Newton, à teoria dos conjuntos, proposta por Cantor e outros matemáticos do final do século XIX, elevada à fundamento da matemática por Bourbaki.

Nosso objetivo não é criticar Grattan-Guinness, ou outros historiadores da análise. Contudo, até os anos 1970 e 1980 a história da matemática não se preocupava em discutir a historicidade de noções que integram a imagem corrente da matemática, como é o caso da noção de rigor. Gostaríamos, portanto, de contribuir para mostrar que as discussões sobre fundamentos que ocuparam muitos matemáticos importantes do final do século XIX não foram incorporadas à prática matemática da época e não possuem um desenvolvimento linear.

---

[3] Trata-se do livro *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, mais especificamente de seu sexto capítulo, intitulado justamente "The age of rigor" (A idade do rigor).

Atendo-nos, ainda, ao relato tradicional, o início do movimento de rigorização da análise é normalmente associado à Berlim de Weierstrass e de seus discípulos, que era o centro da matemática, onde se defendia um novo ideal de rigor, ligado à aritimetização da matemática. A emergência dos novos métodos, ligados à teoria dos conjuntos, é associada a Cantor, outro alemão. Ao relativizar a influência predominante de Cantor neste domínio, em *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and Its Role in Modern Mathematics*, J. Ferreirós propõe distinguir a teoria dos conjuntos de uma visão conjuntista (*set-theoretical*), que teria ganho destaque na matemática, sobretudo na Alemanha, a partir de 1850. Este ponto de vista, associado a Dedekind e outros matemáticos da época, defendia uma matemática conceitual, distante dos cálculos formais, o que abriu o caminho para sua afirmação como uma ciência abstrata, ou "pura".

A influência da noção de conjunto está presente, até os dias de hoje, em ferramentas usuais da matemática: a concepção das estruturas numéricas como conjuntos; o uso sistemático de aplicações e morfismos; o trabalho com classes de equivalência e outros. Contudo, a visão de que esta abordagem define o rigor na matemática e deve servir de princípio para a exposição de todos os seus domínios foi uma reconstrução histórica, que contou com a contribuição decisiva de Bourbaki.

A famosa obra de 1939, com a qual pretendia reformular toda a matemática, chamava-se *Éléments des mathématiques: les structures fondamentales de l'analyse*. Ou seja, tratava-se de um livro-texto para ensinar a análise matemática, no qual os Bourbaki comemoram o fato de que os matemáticos, no início do século XIX, começaram a recolocar a análise no caminho do rigor, cansados de manipulações algébricas desprovidas de fundamentos. O título de *Elementos* já indica o desejo de codificar o estilo matemático segundo os padrões defendidos pelo grupo.

Ao invés da diversificação de métodos e objetos, que tinha imperado até aquele momento, era preciso garantir a unidade da matemática, vista como uma hierarquia de estruturas. Em 1948, J. Dieudonné, membro do grupo, publica o manifesto "The Architecture of Mathematics", assinando como Bourbaki. A metáfora de que se estava propondo uma "arquitetura" esclarece muito sobre o desejo do autor de construir uma teoria unificada que, como um edifício, se assentasse solidamente sobre suas fundações.

Esta visão contagiou a historiografia da matemática. Nos *Elementos de matemática* de

Bourbaki, cada um dos livros, versando sobre certa subárea era introduzido por um relato sobre a evolução histórica daquele assunto até ali. Estes relatos foram reunidos em um só volume, publicado em 1960, como *Éléments d'histoire des mathématiques*, empregando os mesmos critérios para avaliar as ideias importantes do presente e do passado. Esta narrativa teve uma influência decisiva para a consolidação da imagem de que Hilbert e Bourbaki são dois pontos de referência fundamentais na afirmação da matemática como ciência das estruturas, organizada de modo axiomático.

Mais recentemente, o historiador Leo Corry (2001) começou a desconstruir esta visão, mostrando que, apesar do intuito dos bourbakistas ter sido apresentar a noção de estrutura como o ápice, o estágio definitivo do desenvolvimento histórico da matemática, sua proposta foi mais influente na constituição de uma imagem da matemática do que na prática matemática propriamente dita. O conceito de estrutura não foi tão importante na formulação de novas ferramentas ou técnicas, mas, sobretudo, na produção de um ponto de vista hierárquico e unificado da matemática, com forte influência no ensino[4].

As tendências a enxergar a matemática desenvolvida entre os anos 1870 e 1960 como consequência de um movimento homogêneo ainda são fortes. Só para dar um exemplo, Jeremy Gray (2008) propõe compreender as transformações deste período como por meio do conceito de "modernismo", definido como a afirmação da independência dos enunciados matemáticos de uma referência qualquer à realidade[5].

Acreditamos que não seja possível, ou interessante, afirmar estilos hegemônicos na atividade matemática como um todo depois da crise dos fundamentos. Fornecer um panorama da diversidade de práticas que surgiram a partir do final do século XIX tem sido o objetivo de muitos historiadores atuais e pretendemos contribuir, neste artigo, para mostrar a complexidade na produção e na recepção das transformações sofridas pela análise matemática nesta época. Há muitos caminhos possíveis para realizar esta tarefa e abordaremos a questão a partir de um aspecto particular: como os novos

[4] Para além do movimento da matemática moderna, já amplamente discutido e revertido, esta imagem continua a ter consequências no modo como noções básicas da matemática nos são apresentadas hoje – caso da definição de funções e de números por meio do conceito de conjunto.

[5] Gispert e Schubring (2011) propõem um outro sentido para o adjetivo "moderno", associando-o aos argumentos empregados no início e em meados do século XX para justificar transformações no contexto institucional, em particular, relacionadas ao ensino.

métodos e a nova proposta de sistematização da matemática foram recebidos pela comunidade francesa, que não estava no centro das transformações formalistas do período em questão? Em particular, que relações existiram entre a incorporação destas novas práticas de reestruturação da análise matemática e as discussões sobre seu ensino?

Estudaremos o caso particular de dois livros-texto de análise, escritos por professores universitários na França dos anos 1870. Para justificar a escolha dos autores e do contexto que pretendemos investigar, utilizamos a periodização dos tratados de análise na França proposta por Martin Zerner (1994). Este historiador os divide em três períodos. O primeiro é caracterizado por incorporar, às vezes, sem grandes modificações, o estilo dos textos de Euler do século anterior, como é o caso do tratado de Lacroix (1802), que não se alterou em suas sucessivas reedições. O segundo período, que nos interessa neste artigo, inicia-se com a primeira publicação, em 1856, do tratado escrito por J-M. Duhamel, professor da École Polytechnique desde 1834 e professor na Sorbonne a partir de 1851. Este livro teve diversas reedições (em 1860, 1874 e 1886) e terceira contém notas escritas por J. Bertrand, também professor na École Polytechnique (a partir de 1852) e professor de cálculo diferencial e integral na École Normale Supérieure. A segunda geração de tratados e encerra-se com a publicação das obras de J. Tannery (1886) e de C. Jordan (1893), matemáticos mais conhecidos, justamente por incorporarem alguns pontos da análise desenvolvida pelos alemães.

O livro de Duhamel (1874) foi comentado por Darboux, em 1876, que ressalta a importância de sua utilização dos infinitamente pequenos. Zerner observa que, na verdade, todos os tratados do segundo período utilizam o seguinte princípio, conhecido como “dos infinitamente pequenos”: “dois infinitamente pequenos a e b podem ser trocados um pelo outro se se pode negligenciar sua diferença, seja na busca do limite da razão ou na busca do limite da soma destes números, desde que a diferença entre eles seja infinitamente pequena em relação a um dos dois” (ZERNER, 1994, p. 9).

Sendo assim, a exposição deste princípio caracteriza, para Zerner, a segunda geração de tratados de análise, uma vez que está ausente das obras do terceiro período. Neste último, o estilo se distingue por conter, desde a introdução, uma construção dos números reais; uma definição precisa dos conceitos de continuidade e de limite; e uma separação clara entre a noção de convergência e de convergência uniforme. Outro aspecto destacado por Zerner é o que ele chama de “arcaísmo de primeira e segunda espécies”: de primeira espécie quando as reedições sucessivas não sofrem modificações notáveis; de segunda espécie quando um tratado utiliza noções ou conceitos que pertencem aos períodos anteriores, e que já desapareceram de outros escritos contemporâneos. Por exemplo, o princípio dos infinitamente pequenos, que caracteriza o segundo período, encontra-se em alguns livros da terceira geração, como no de P. Appell (1898).

Dentre todos os tratados da segunda geração, selecionamos dois, escritos respectivamente por Charles Méray (1872) e Jules Houël (1878). Nossa periodização será, portanto, a mesma dos tratados de segunda geração, como classificados por Zerner, mas iniciando com o ano da publicação do primeiro livro-texto de Méray. Não se tratam dos livros mais importantes, nem mais conhecidos, nem mais significativos deste período. Contudo, apesar de serem marginais na história da análise, estes autores se inscrevem em um contexto particular de transformação do ensino francês da época, a saber, o desenvolvimento do ensino universitário. Em particular, seus esforços traduzem uma nova preocupação com a formação de matemáticos e professores de matemática, que se desenvolveu paralelamente às universidades.

Além disso, há um traço específico na abordagem de Méray e de Houël, a introdução ao ensino de análise a partir da construção dos números reais, que pode ser visto como uma inovação, pois já seria uma característica dos tratados de terceira geração. Justamente por não exprimir o padrão da época, torna-se interessante analisar como cada autor justificou a necessidade desta inovação no ensino, investigando se eles podem ter sofrido influência externa, em particular de autores alemães.

Veremos que tanto a obra de Méray quanto a de Houël combinam aspectos arcaicos e inovadores. Ao mesmo tempo em que propõe uma construção dos reais vista até hoje como avançada[6], Méray expõe uma teoria das funções seguindo a concepção de Lagrange, entendendo sob o conceito de função unicamente aquelas expansíveis em série de Taylor. Já o tratado de Houël contém definições indicadas por Darboux (1880) como ultrapassadas, por exemplo, a definição de derivada[7].

Enfocaremos, na obra de cada um, somente a definição de números reais, em particular

[6] A construção dos reais de Méray foi, nos anos 1970, preferida àquela dos cortes de Dedekind no ensino universitário francês.
[7] Vide Gispert (1987).

dos irracionais. Hoje, a construção destes números está praticamente ausente do ensino de análise. Na maioria dos casos, o corpo dos reais é definido como um corpo completo, totalmente ordenado, mas sua construção nunca é exibida, nem pela definição de um número real como classe de equivalência de sequências de Cauchy, nem pelos cortes de Dedekind. Nos casos em que tais definições são mencionadas, mais frequentemente em livros sobre fundamentos da matemática, como o de B. J. Caraça (1951), estas apresentações são vistas como uma solução moderna para as ambiguidades na compreensão dos irracionais presentes na matemática desde a suposta crise dos incomensuráveis da matemática grega. Nunca fica claro, portanto, que estes modos de construir os reais implicam em uma escolha sobre o tipo de matemática que se convencionou acreditar que é o melhor. Como veremos adiante, as argumentações para se incorporar ou não os novos padrões de rigor em análise ao ensino são múltiplas e sofreram transformações ao longo do tempo. Não cabe avaliar se o padrão atual, reforçado pela narrativa histórica, é ou não o melhor. Mas, de nosso ponto de vista, uma contribuição da história para o ensino pode ser somente tornar explícito que se trata de uma escolha, ainda que não consciente ou não concebida como projeto, mas de uma seleção realizada em um contexto determinado, a partir de atores e instituições. Compreender a escolha sobre o tipo de matemática que consideramos hoje ser a mais consistente implica em exibir como uma construção histórica o papel preponderante que possuem, na matemática atual, os critérios de homogeneidade, uniformidade e generalidade.

1. Ensino e Rigor: considerações metodológicas

Data da primeira metade do século XIX, por volta de 1820, uma das primeiras querelas envolvendo a organização da análise e as necessidades do ensino desta disciplina. A proposta feita por Cauchy para ensinar a análise nos moldes de seu livro-texto *Cours d'analyse algébrique*, com uma organização em que se partia das definições dos conceitos para só depois ensinar as técnicas do cálculo, sofreu resistências por parte dos estudantes e da direção da École Polytechnique, como mostrado em Vianna e Roque (2010).

Na segunda metade do século XIX, a discussão sobre o modo como o ensino de análise devia ser estruturado esteve muito presente e pode ser útil entender o teor dos argumentos envolvidos. O apelo à natureza e à intuição servia para defender posições conflitantes a respeito do ensino de análise: introduzir de modo formal esta disciplina logo no início do curso ou manter a forma tradicional de ensinar, por meio dos infinitesimais e outras noções intuitivas, guardando para o final do curso esclarecimentos adicionais, ligados à questão do rigor? Será que expor a análise da maneira mais rigorosa é a melhor estratégia para introduzir os alunos neste domínio?

A atualidade desta discussão se verifica em estudos sobre o ensino de cálculo diferencial. Para dar apenas um exemplo, não estamos longe da dualidade das posições acima referidas quando questionamos se um curso de cálculo deve, necessariamente, começar por introduzir o conceito de limite, ou se seria mais oportuno expor este conceito após experiências intuitivas, como é o caso de experiências gráficas com aproximação de curvas por linhas retas[8].

Nosso objetivo, neste trabalho, não é tratar das dificuldades na aprendizagem de análise, nem usar a história para propor novas abordagens de ensino. Também não pretendemos estudar mais uma etapa na evolução da noção de rigor em matemática. Propomos analisar uma situação precisa na qual as concepções sobre o próprio rigor são inseparáveis do contexto de ensino e refletem as transformações institucionais de um momento histórico. Este estudo será feito a partir de uma investigação detalhada sobre o modo como os números reais são apresentados em livros-texto de análise. Como afirma Gispert (2009, p. 1), tendo uma função de ensino e encarregado de propor um texto sobre o saber estudado, estes livros são um objeto social.

Sendo assim, a reflexão sobre o contexto e os modos de considerá-lo em um trabalho de história da matemática é particularmente útil para nós, uma vez que desejamos compreender a relação complexa entre material escrito para o ensino e pesquisa “pura”. O livro de Gert Schubring (2005) oferece uma exposição detalhada sobre o papel da École Polytechnique no desenvolvimento da análise na França desde a Revolução Francesa, seguido pela constituição da matemática “pura” na Alemanha do final do século XIX. O autor mostra, de modo esclarecedor, que estas transformações envolveram disputas sobre a concepção de rigor que estavam relacionadas também ao contexto institucional e à profissionalização dos matemáticos.

[8] Esta discussão tem sido fundamental para a investigação iniciada por David Tall em 1980, hoje conhecida como *Advanced Mathematical Thinking* (Pensamento Matemático Avançado). Para uma descrição recente ver Tall (2010).

Como na obra citada, pensamos ser importante considerar o ambiente intelectual da época que investigamos em relação direta com as transformações internas da matemática. A palavra contexto, muito usada hoje em história da ciência, pode ser entendida como um conjunto geral de valores culturais ligados a uma certa tradição, ou seja, normas que definem um ambiente geral no qual a prática matemática está imersa. Mas esta concepção pode ser superficial, entendida muitas vezes como a simples descrição de um panorama ou pano de fundo, sem conexão direta com o desenvolvimento matemático em si mesmo.

No caso particular que passamos a expor veremos que é importante compreender a discussão sobre os padrões de exposição da análise matemática a partir das transformações do meio acadêmico francês no final do século XIX. Desde a Revolução de 1789, a cena francesa foi dominada pela École Polytechnique, voltada para a formação de engenheiros. O objetivo não era treinar pesquisadores nem acadêmicos, ainda que muitos matemáticos importantes do século XIX tenham sido alunos desta escola, mas formar homens que iriam usar a matemática para desenvolver a capacidade de obter métodos sistemáticos de resolver problemas práticos (BELHOSTE, 2001). A tensão entre o ideal de dar uma educação científica geral e democratizada e o treinamento utilitário era forte dentre os membros dos comitês que decidiam os programas de ensino até meados do século XIX. Um exemplo foi justamente o debate em torno do ensino de análise de Cauchy, criticado como excessivamente teórico (GILAIN, 1989, p. 3-46). A partir dos anos 1830, a escola começou a mudar de objetivo, apesar de continuar não sendo um local dedicado a formar pesquisadores. Até o fim dos anos 1860, a École Polytechnique era o principal lugar de treinamento dos matemáticos franceses e até os anos 1880 teve um papel decisivo na estruturação do meio matemático.

Durante muito tempo, as universidades (*facultés des sciences*) não tinham estudantes, serviam somente para oferecer diplomas, como o *baccalauréat*. A École Normale Supérieure se dedicava a treinar professores do ensino médio (*lycées*) e apenas a Sorbonne oferecia ensino de alto nível em matemática, mas voltado para poucos alunos. Nos anos 1850-1860 esta situação começou a mudar, quando se tornaram professores universitários alguns discípulos de Cauchy, como Briot, Bouquet, Puiseux e, sobretudo, Hermite. Estes nomes ajudaram a elevar o nível da matemática nas universidades. Depois de 1880, a expansão do ensino universitário levou a uma profunda reorganização do meio matemático francês, transferindo o centro da pesquisa para a École Normale Supérieure e para as universidades.

Gispert (1991) analisa todo este processo. A partir de um levantamento preciso das publicações da época, esta historiadora observa que começam a aparecer artigos de pesquisa, ao contrário da maioria das publicações dos anos 1860-70, quando a atividade matemática era dominada pela *mathématique de concours* (constituída de exercícios para preparar para concursos). Quanto aos conteúdos, observa-se um ganho de importância da análise, sob o impulso da École Normale Supérieure. Já a geometria aparece apenas nas revistas escolares e de vulgarização (GISPERT, 1991, p.16).

Este contexto explica a proliferação de tratados de análise no decorrer dos anos 1870-80, em que fica claro o esforço para repensar *o que* e *como* se devia ensinar, com ênfase nos modos de organizar e fundamentar esta disciplina. A preocupação de fundamentar a análise de um modo novo, que animava a escola de Weierstrass desde 1860, só foi sentida na França a partir de 1885. Na obra de Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, publicada em 1886, encontramos referências aos trabalhos alemães sobre os fundamentos, mas foi somente com a publicação da segunda memória de Jordan, em 1893, que a análise passou a ser exposta de modo mais conforme aos padrões weierstrassianos de rigor, como mostra Gispert (1982)[9].

A partir dos anos 1880, a necessidade de se reformar o ensino de matemática superior foi bastante discutida na França, e a incorporação das transformações que vinham de fora, sobretudo da Alemanha, tornou-se uma preocupação, chegando a aparecer nos discursos oficiais. A incorporação da produção estrangeira tornou-se até mesmo um assunto de Estado, como vemos no pronunciamento abaixo, publicado no "Le Journal Officiel" de 3 de dezembro de 1882, veículo de comunicação da Câmara dos Deputados:

> Chegamos à emenda dos Srs. Laissant, Paul Bert, Hervé Maugon, que é assim concebida: estabelecer o crédito de 12.000 fr, pedido pelo Governo, para a criação de uma segunda cadeira de cálculo infinitesimal na Faculdade de Ciências de Paris. Com a palavra Sr. Laissant: Creio que esta criação se justifica por si mesma. (…) Vemos nas universidades estrangeiras, em particular na Alemanha, o ensino da alta ciência matemática ganhar uma importância que cresce a cada dia; vemos que aí se ensinam os métodos vindos de nações

[9] Encontramos também um estudo sobre a recepção dos trabalhos alemães na França em Schubring (2005, p. 603).

> estrangeiras; ao contrário, em nosso país, infelizmente, apesar da grande distinção e do grande talento dos homens chamados para ensinar os diversos ramos da matemática, constatamos uma lacuna considerável nesta parte do ensino superior. (…) Sei bem que as grandes universidades alemães são organizadas em condições diferentes, mas permitem ao menos que se chegue a este resultado, que não se ignora o que se passa nos países estrangeiros do ponto de vista científico. Já nas universidades francesas, os métodos estrangeiros, em geral, não são ensinados (p. 1837-1840).

Este pronunciamento revoltou alguns matemáticos, como Charles Hermite, que era professor de álgebra na Universidade de Paris, de 1871 a 1898, e tinha sido professor de análise na École Polytechnique. Hermite se sentiu diretamente visado, e respondeu dizendo que não era verdade que seu ensino era arcaico, pois ensinava vários tópicos recentemente elaborados. No entanto, é fato que suas posições sobre o ensino não eram tão favoráveis ao modelo alemão, e talvez fosse esta questão nacional a maior disputa em jogo.

Exatamente nesta época, por volta de 1880, Mittag-Leffler torna-se um dos principais divulgadores dos trabalhos da escola de Weierstrass na França. Até este momento, poucos matemáticos franceses tinham lido os cursos de Weierstrass, enviados por Mittag-Leffler (DUGAC, 2003). Alguns, contudo, apesar de admitirem a necessidade de novos fundamentos para a análise, não julgavam que estas novas ferramentas fossem indispensáveis para uma boa exposição sobre os princípios do cálculo infinitesimal. Ou seja, o produto da nova pesquisa matemática não era unanimemente reconhecido como podendo servir ao ensino.

Não era evidente que os princípios expostos da maneira mais rigorosa possível (segundo os novos critérios) fossem efetivamente mais fáceis de compreender. Este era um dos principais argumentos na discussão, claramente expresso por Hermite. Em 1881, após o anúncio feito por Mittag-Leffler de que iria ensinar os números irracionais ao modo de Weierstrass, Hermite responde:

> Creio, caro amigo, que não seria isento de perigo expor aos iniciantes esta matemática nova, tão incontestavelmente melhores e mais rigorosas que as antigas. Meu sentimento é que é preciso primeiro prepará-los para estas novas teorias, e seguir o antigo caminho, mostrando sejam os erros ou as insuficiências das demonstrações, que permaneceram despercebidas durante muito tempo, anunciando que outros métodos as fariam desaparecer. E a razão é que algo do desenvolvimento histórico da ciência deve se encontrar no ensino. Explico-me. É um fato de experiência totalmente certo que o erro foi frequentemente mais útil, para a marcha do espírito e o progresso da

> ciência, do que as verdades perfeitas. (...)
> Tiro daí, talvez me enganando, a conclusão de que o tão complexo aparelho do rigor moderno, e o caráter abstrato que reveste, pode não ser absolutamente lucrativo para os iniciantes, ou ao menos de que talvez seja útil relegá-lo para o fim, reservando-o para o coroamento do edifício, este rigor que nem é sempre é *suficientemente instrutivo* (DUGAC, 2003, p. 199, grifo de Hermite)

Em outubro de 1881, Mittag-Leffler responde:

> É verdade que os erros foram lucrativos para a ciência, mas então éramos ingênuos e acreditávamos no erro. Mas como o senhor quer ensinar um erro quando sabe que é um erro? (...) Não creio tampouco que seja justo enxergar o sistema do Senhor Weierstrass como complicado. Ao contrário, é simples e natural, ao mesmo tempo que rigoroso, mas é verdade que é preciso muito tempo para desenvolvê-lo (DUGAC, 2003, p.199).

Não enfocaremos o caso específico da discussão entre Hermite e Mittag-Leffler, mas este exemplo é útil para identificarmos argumentos recorrentes em outras discussões da época, que também envolviam a relação entre rigor e ensino. Vemos que Mittag-Leffler emprega o adjetivo *natural* para qualificar o sistema rigoroso proposto por Weierstrass. Este mesmo argumento será usado por Méray, defensor de que o padrão de rigor deve ser considerado mais importante do que o conhecimento que se convencionava considerar como intuitivo. Para contrapor os defensores de um ensino que se preocupasse em não chocar os hábitos comuns dos alunos, os propagandistas do novo padrão de rigor, precisavam apresentar seus sistemas como “naturais”, ou “simples”. Para compreender exatamente um dos sentidos atribuídos a estas expressões, precisamos passar aos estudos dos exemplos particulares das diferentes apresentações da análise propostas por Méray e Houël.

2. Estudos de caso: as definições de irracionais

A grande maioria dos livros de análise que apareceram na França entre 1870 e 1893 se baseava em princípios tradicionais, herdados de Cauchy. O estudo da convergência de séries, por exemplo, bem como os critérios para a existência de limites de sequências, seguiam os passos de Cauchy, sem que os autores sentissem a necessidade de definir os números irracionais. A preocupação de fundamentar a análise pela construção dos reais se tornará comum a partir do apêndice ao terceiro tomo do tratado de Jordan, de 1887, sobretudo em sua segunda edição, de 1893.

Por exemplo, o tratado de Bertrand (1864) e a primeira versão do livro de Jordan (1882) não possuem um capítulo dedicado aos números reais, como se este tópico não fizesse parte da análise. O tratado de Duhamel parece ter sido uma exceção, já que ele inicia sua exposição por uma definição dos números fracionários e incomensuráveis. No entanto, este autor se situa na problemática de Euclides, retomando sua definição de razões e de grandezas incomensuráveis.

Neste aspecto, os trabalhos de Méray e Houël são inovadores. Charles Méray ficou conhecido na historiografia como o primeiro matemático a propor uma definição de números irracionais, pois sua definição empregava sequências de racionais, ou seja, um recurso similar ao que seria usado por Cantor logo depois.

Méray obteve primeiro lugar no concurso para a École Normale Supérieure em 1854, foi professor em 1866 na universidade de Lyon e depois em 1867 na universidade de Dijon. Contudo, há poucas referências a Méray nos textos de sua época. Mesmo Darboux não chega a citá-lo, talvez porque a questão da definição dos irracionais não o inquietasse tanto quanto a das funções contínuas. No que tange ao ensino, não parecia ser diferente. Não encontramos menção a Méray em nenhuma memória dos *Nouvelles Annales de Mathématiques*, jornal que servia à preparação dos estudantes para os concursos da École Polytechnique e da École Normale[10]. Seus trabalhos só se tornarão conhecidos nos anos 1890, graças à divulgação feita por Tannery.

O caso de Houël é também bastante significativo. Foi professor na Universidade de Bordeaux, desde 1859, e editor, juntamente com Gaston Darboux, do *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, a partir de 1870. Traduziu várias obras de matemáticos estrangeiros, como Bolyai, Lobatchevsky, Beltrami e Riemann. Neste sentido, era um dos matemáticos franceses mais bem informados sobre os progressos da matemática internacional. Nos anos 1870-1871 redigiu um livro-texto de análise, com uma versão ampliada publicada entre 1878 e 1880. A partir de sua correspondência com Darboux, publicada por Gispert[11], sabemos que, surpreendentemente, o tratado de Houël recebeu severas críticas, justamente pelo padrão de rigor usado ser considerado insuficiente.

[10] Para mais detalhes sobre a recepção dos trabalhos de Méray na França, ver Dugac (1970).
[11] Vide Gispert (1987, 1982, anexo, p.143).

2.1 Charles Méray, 1869-1872

O artigo “Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir des limites à des variables données”, publicado em 1869, é mencionado por Pierre Dugac (2003, p. 46-49) como a primeira definição dos irracionais publicada. Esta informação nos parece menos interessante do que observar que, no título deste trabalho, Méray indica que desejava tratar da “natureza” das quantidades incomensuráveis. De fato, o autor argumenta que a maneira como ele define os irracionais é a mais “natural” ou a mais “consistente com a natureza das coisas”, e que, por esta razão, seria mais fácil compreendê-la.

Com o fim de discutir estas afirmações, vamos começar expondo, de forma bastante resumida, a definição de número irracional proposta por Méray. No início do artigo citado, ele enuncia dois princípios da teoria dos números incomensuráveis:

1º) Uma quantidade v que recebe, sucessivamente, os valores v_1, v_2, ..., v_n, ..., tende a um certo limite, se os termos estiverem sempre em ordem crescente, ou decrescente, desde que permaneçam, no primeiro caso inferiores ou, no segundo caso superiores a uma quantidade fixa qualquer.

2º) A variável v acima goza da mesma propriedade se a diferença $v_{n+p} - v_n$ tende a zero quando n aumenta indefinidamente, qualquer que seja a relação entre n e p.

Essas duas proposições eram consideradas até tal momento como axiomas, mas Méray queria mostrar que é possível deduzir o segundo caso do primeiro, cujo “caráter de evidência é mais pronunciado”.

Apesar de ser considerado evidente, o primeiro princípio é problemático, pois afirma que o limite existe, sem fornecer um método para descobrir o seu valor. Essa dificuldade é devida ao fato de não serem definidas as quantidades incomensuráveis. Se o limite é um número – isto é, um número racional –, sabemos que o limite existe porque calculamos o seu valor. Caso contrário, parece contraditório ligar sua existência a uma hipótese que não o associa a nenhum número. Esta questão levou Méray a tentar compreender a verdadeira natureza das quantidades incomensuráveis, definindo estas quantidades até então conhecidas como fictícias.

Uma quantidade v que recebe, sucessivamente, vários valores v_n em número ilimitado é chamada de “variável progressiva”. Se quando n cresce infinitamente, existe um número

V de tal forma que, a partir de um valor conveniente de n, $V - v_n$ é inferior a uma quantidade qualquer tão pequena quanto podemos supor, então dizemos que v tem por limite V.

Mas para Méray, a palavra "número" ou "quantidade" designava somente os inteiros e as frações. Logo, esse número pode não existir e, nesse caso, já não é possível afirmar que v tem um limite. Aqui está a dificuldade de não considerar as quantidades incomensuráveis como números.

No entanto, ele nota que a diferença $v_{n+p} - v_n$ também converge para zero neste caso, (em que v não tende para um número racional). Nesta situação, Méray observa que a natureza de v oferece uma extraordinária semelhança com as variáveis realmente dotadas de limites. Podemos então dizer que a variável progressiva v é "convergente", que possui ou não um limite "numericamente atribuível". Definimos assim o raciocínio de Méray: se a "variável progressiva" – para nós, uma "seqüência" – é convergente, mesmo se o limite para o qual converge não é um número em si, podemos defini-lo como sendo um.

Isso é feito para ampliar o conceito de número. Quantidades que não são "numericamente atribuíveis" são consideradas como sendo números, a fim de dar consistência ao fato de que toda sequência convergente deve ter um limite, mesmo que esse limite seja fictício. Na verdade, Méray afirma, na continuação de seu artigo, que essa é uma convenção útil para expressar a convergência da "variável progressiva", afirmando que ela tem "um limite (fictício)".

Ele irá, então, definir as quantidades incomensuráveis por meio desses limites. Para isso, será necessário saber quando podemos afirmar que duas "variáveis progressivas" são equivalentes. Em seguida, Méray irá propor que toda quantidade chamada de "incomensurável" corresponde a uma infinidade de "variáveis progressivas" (comensuráveis) convergentes que são equivalentes. Não entraremos nos detalhes desta definição, e podemos dizer, em linguagem atual, que Méray define um número irracional como o limite de uma seqüência de Cauchy quando esse limite não é racional.

Observamos que a necessidade desta definição é explicada pelo desejo de manter a uniformidade na definição de uma sequência convergente como aquela que tende para um limite. Já era assim quando tínhamos um limite numérico e um novo tipo de número, fictício, será proposto a fim de obter uma definição semelhante para todos os casos.

O objetivo de Méray se torna mais claro em seu tratado de 1872, *Nouveau Précis d'Analyse Infinitésimale*. Ele define as quantidades incomensuráveis como os limites de "variantes" (sequências) convergentes, como no artigo de 1869 – tornando a apresentação mais clara e detalhada. Méray explicita que essa generalização só é possível porque usa uma *convenção*: "Esta é para nós a natureza dos números incomensuráveis: são ficções possíveis de serem formuladas, de uma maneira uniforme e mais pitoresca, [a partir de] todas as proposições relativas às variantes convergentes" (MÉRAY, 1872, p. 4, tradução nossa).

Apesar de ser uma convenção, a definição proposta é vista como mais "conforme à natureza das coisas" e esta é a afirmação que mais nos interessa em sua argumentação. Méray publica, em 1887, um artigo para esclarecer o significado de sua nova definição: "Sur le sens qu'il convient d'attacher à l'expression nombre incommensurable et sur le critérium de l'existence d'une limite pour une quantité variable de nature donnée". Ele explica que:

> Ao examinar atentamente os diferentes pontos desta teoria, constataremos que não existe nenhuma propriedade dos números incomensuráveis que não seja a tradução, para outra linguagem, de alguma propriedade que diga respeito aos números propriamente ditos variáveis. Além desta concepção, nada parece satisfazer plenamente o espírito (MÉRAY, 1887 p. 355).

Isto quer dizer que, em sua visão, estender o conceito de número, e de operações com números, aos incomensuráveis parece satisfazer o espírito. Ou seja, é preciso padronizar as operações da álgebra e fazer com que elas sejam válidas para todo tipo de número que possa servir de limite para uma sequência convergente de números racionais.

Alguns anos mais tarde, a partir de 1892, Méray publica alguns textos em que volta a defender sua definição dos irracionais, mas agora, de modo mais explícito, a partir de sua adequação para o ensino. Duas obras são fundamentais a este respeito: o artigo "Considérations sur l'enseignement des mathématiques", de 1892; e o livro *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques,* publicado entre 1894 e 1898. Em conformidade com os preceitos, na época já conhecidos na comunidade francesa, Méray esclarece em que sentido um raciocínio matemático deve ser considerado "artificial":

> Os princípios de cada demonstração devem ser procurados dentro da teoria à qual se relaciona a proposição correspondente, e não fora dela, ou ainda menos em teorias subsequentes. É preciso explorar todas as consequências que podem ser tiradas de um princípio, antes de introduzir um novo. De outro modo, as teorias se confundem, perdendo ao mesmo tempo sua clareza e sua elegância. (...)
>
> O que chamamos *artifícios* são as infrações a esta regra; eles podem seduzir pela sua facilidade e imprevisibilidade; mas não possuem verdadeira importância, e seu emprego habitual produz apenas teorias desconectadas, que só transmitem a aparência do saber" (MÉRAY, 1892, p.15-16; grifo do autor)

Por esta razão, deve-se ensinar do modo mais natural, uma vez que "os raciocínios bem construídos acabam sempre, apesar das complicações, penetrando o espírito dos alunos, que os reproduzem facilmente em seguida". *Natural* é, portanto, o atributo daquilo que se pode deduzir por demonstração dos axiomas, ou dos princípios, enunciados explicitamente no começo da exposição de uma teoria. Logo, afirmar que uma definição é mais *natural* significa que podemos deduzi-la dos princípios da teoria, sem termos que recorrer a nenhum conhecimento exterior a ela. Essa afirmação reflete o sentimento, que se tornava comum na época, de que se devia ir além dos argumentos físicos para justificar as definições matemáticas.

No âmbito do ensino, porém, este modo de expor matemática estava longe de ser apreciado como pertinente. Em 1873, H. Laurent publicou uma análise dos *Nouveaux Précis* de Méray no *Bulletin des Sciences Mathématiques*. Este matemático, conhecido na época, aprecia a intenção de Méray de expor as bases do cálculo infinitesimal, mas não acredita que o autor tenha atingido seu objetivo. Em primeiro lugar, sua exposição apresenta o que podemos chamar de um arcaísmo, pois, como observa Laurent (1873, p. 24): "O Sr. Méray se encarregou da difícil tarefa de expor os princípios da análise infinitesimal, tomando por base o desenvolvimento das funções pela fórmula de Taylor". Laurent considera, portanto, que o tratado de Méray se limita às funções analíticas e perde sua generalidade e acrescenta outras preocupações, relacionadas ao ensino, pois "os métodos empregados nesta obra são tão sutis, tão delicados, que só seriam compreendidos por pessoas já familiarizadas com as especulações da alta análise (...) e não se pode romper bruscamente com hábitos consagrados por uma longa experiência" (LAURENT, 1873, p. 25).

Méray responde a tais crítica no prefácio de suas *Leçons*. Em primeiro lugar, no que tange à restrição às funções analíticas, ele afirma que são elas que representam os fenômenos físicos e propõe que pode não ser vantajoso, para iniciar o aluno no domínio da análise, apresentar, desde o início, o conceito mais geral de função. Mas ao mesmo tempo em que defende, com argumentos pedagógicos, este arcaísmo, afirma a pertinência de se ensinar, desde o início, do modo mais rigoroso possível, a definição dos irracionais. Neste último caso, Méray afirma que as apreensões sobre o valor didático de seus métodos foram desmentidas pelo resultado de sua própria experiência como professor. É verdade, assume ele, que é um pouco incômodo, no início, romper com hábitos consagrados, mas esta ruptura é necessária se se tratam de maus hábitos (MÉRAY, 1894, p. xxxii).

Mas por que uma definição dos irracionais "mais conforme à natureza das coisas" seria a mais adequada para o ensino? De seu ponto de vista, ensinar a análise de um modo natural consiste em enunciar primeiro os princípios e, depois, os teoremas podem ser deduzidos destes princípios. Um raciocínio deste tipo, segundo ele, acaba por penetrar no espírito dos alunos, uma vez que é bem construído, ou seja, nos permite esquecer os passos efetuados em sua construção. Méray queria justificar sua escolha expondo razões didáticas e, segundo ele, os princípios expostos da maneira mais rigorosa (de acordo com seus critérios) são mais fáceis de compreender.

Contudo, observamos que sua definição de um número incomensurável, ou irracional, é considerada como a mais natural justamente por garantir uma maior homogeneidade e uma maior uniformidade nos enunciados matemáticos. A "natureza das coisas" reflete uma visão da matemática em que os objetos devem ser os mais uniformes e as proposições devem ser as mais gerais possíveis. Isto implica uma noção particular de número. Além disso, uma concepção que não é absolutamente fácil de entender como sendo a mais natural.

Poderíamos resumir como segue os principais aspectos da nova definição:

1º - É necessário definir um novo tipo de número, ou seja, um número considerado como um novo tipo de objeto (ficcional), para padronizar a noção de convergência. Qualquer sequência convergente deve ter um limite.

2º - O número é bem definido, por meio de uma relação de equivalência, como sendo o seu próprio limite (a sequência convergente é o número).

3º - É possível estender as operações comuns para esses "novos" números e ter uma definição uniforme tanto dos limites quanto dos números.

Nenhum desses aspectos pode ser considerado mais natural, ou mais conforme à natureza das coisas, sem que essa natureza seja explicitamente escolhida. Ou seja, sem que estejamos convencidos de que a *generalidade* e a *consistência* são características necessárias para que a matemática seja vista como rigorosa.

2.2 Jules Houël

Depois de uma primeira versão em 1870-1871, Houël publicou, em 1878, os dois primeiros volumes de seu *Traité de calcul infinitésimal*. Neste trabalho, ele apresenta uma teoria dos números reais inspirada em Hankel (1867), ao passo que quase todos os tratados escritos neste período – antes do livro de Tannery (1886) – não consideravam útil iniciar a apresentação da análise por uma exposição dos números reais e de suas propriedades.

Houël introduzia seu tratado por uma teoria geral das operações e de suas propriedades: comutatividade, associatividade, elemento unitário, elemento inverso e distributividade. A partir dessas considerações, foi possível mostrar, no capítulo II, como os diferentes tipos de número podem ser obtidos como generalizações sucessivas a partir dos números inteiros. Os números fracionários puderam ser definidos, assim, a partir dos números inteiros e de seus elementos inversos com relação ao produto. Do mesmo modo, os números negativos foram definidos como elementos opostos com relação à adição.

Os números fracionários e negativos são necessários para definir os resultados das operações inversas e, assim, tornar o produto e a adição operações fechadas. Ou seja, as operações de soma e produto, agora definidas para estes números, recuperam as propriedades que precisam para satisfazer o que ele chama de "princípio de permanência".

A construção dos números incomensuráveis é menos evidente. Houël ressalta que as potências inteiras dos números fracionários são números fracionários, mas não acontece o mesmo com as operações inversas destas potências – as raízes e os logaritmos:

> Mas se não existe nenhum número comensurável x tal que $x^m = a$, poder-se-ia obter, pelo menos, uma sequência de números x', x'', ...,

> comensuráveis com a unidade, e tais que x'^m, x''^m, ... acabam diferindo tão pouco quanto se queira de a. Designaremos estes números como valores aproximados da raiz m-ésima de a (HOUËL, 1878, p.21).

A justificativa que encontramos na página seguinte é um argumento visual. Houël associa a cada valor numérico um ponto na reta e infere que, quando os x'^m, x''^m, ... se aproximam de a, intuímos que os x', x'', ... irão tender em direção a um limite que será a raiz m-ésima de a.

O "princípio de permanência" permite afirmar que, a partir dos números inteiros positivos e das operações de soma e produto, é possível obter todos os números inteiros negativos e todos os números fracionários. Mas como garantir que a partir das operações inversas das potências é possível obter todos os números incomensuráveis?

Depois de propor que as potências e as operações inversas devem se aplicar também aos números incomensuráveis, e que as propriedades dessas operações são conservadas nesta extensão, Houël apenas observa:

> Sendo assim, por este meio, preenchidas todas as lacunas que existiam na sequência dos números comensuráveis, poder-se-á considerar a série dos números, tanto comensuráveis quanto incomensuráveis, como formando uma sequência contínua (HOUËL, 1878, p. 23).

Ressaltamos que Houël define os incomensuráveis por um argumento de continuidade aplicado às operações de potenciação e sua inversa. Em seguida, ele associa todo número a um ponto da reta, por meio da visualização geométrica, e conclui sua exposição propondo que: "Para designar de uma maneira específica as quantidades positivas e negativas que compreendem como caso particular as quantidades aritméticas, dá-se a elas o nome de quantidades *reais*" (HOUËL, 1878, p. 30).

Descrever as propriedades das operações sobre os números, ou das quantidades em geral, não é comum nos tratados do segundo período (no sentido de Zerner). Os objetos são considerados, normalmente, menos importantes do que as propriedades às quais são submetidos. Mas Houël introduz na França uma concepção dos números inspirada em Hankel, o que dá ao seu livro um aspecto inovador. Por intermédio deste matemático alemão, percebem-se as influências de outros, como Grassmann[12]. Deste ponto de vista,

---

[12] Aliás, Houël utiliza a mesma notação para as operações que Grassmann (o que Hankel não faz).

Houël representa uma inovação em relação aos tratados franceses da época e Darboux (1880, p. 6) ressalta este traço, observando que no livro de Houël:

> Há, primeiro, noções sobre o cálculo das operações que nos parecem das mais interessantes. São, sem dúvida, um pouco abstratas e poderão incomodar os iniciantes; mas agradarão certamente aos professores, e estou feliz de encontrá-las em uma obra francesa.

Apesar disso, Darboux se preocupa com o apelo à intuição geométrica, presente em diversas partes da exposição de Houël. A relação entre os pontos da reta e os números reais permite uma visão mais clara das relações entre os números irracionais e suas aproximações. No capítulo I do primeiro livro, ele enuncia o seguinte teorema: sejam duas variáveis, uma crescente e outra decrescente, se a primeira é sempre menor do que a segunda e a diferença entre as duas variáveis pode ser tornada tão pequena quanto se queira, essas duas variáveis terão o mesmo limite. Houël ressalta que esta propriedade é o fundamento do método de exaustão e é a imagem da reta que possibilita intuí-la. Segue-se daí a constatação de que todo número incomensurável é limite de uma sequência de números fracionários.

Na verdade, Houël se coloca o problema da construção de um modelo dos números reais, mas enuncia várias propriedades destes números por meio de justificações heurísticas. Zerner aponta o princípio dos infinitamente pequenos como a característica dos tratados da segunda geração. No entanto, a relação entre os infinitesimais e o conceito de número é mais clara no tratado de Houël do que em outros do mesmo período. Um infinitesimal, segundo Houël, é uma variável que tende a zero e definem-se dois infinitamente pequenos de mesma ordem quando a razão entre eles tende a um limite finito. Sendo assim, o tratado de Houël representa uma tentativa de fundamentar a análise a partir do conceito de limite.

Paradoxalmente, a definição de diferencial proposta por Houël representa o que Zerner chama de "arcaísmo de segunda espécie". Como Darboux observa na resenha ao livro de Houël:

> O autor fornece uma definição de diferencial diferente daquela que é geralmente adotada hoje. Para Houël, (...) a diferencial será $dy = (y' + \varepsilon)dx$ e a parte que chamamos normalmente de *diferencial*, ele chama de *parte principal da diferencial* (DARBOUX, 1880, p. 7).

Neste aspecto, Houël relaciona o conceito diferencial ao cálculo dos infinitamente pequenos e, deste ponto de vista, utiliza arcaísmos em definições de base. Outros traços que podemos associar a arcaísmos permaneceram desde a edição de 1870-1871, duramente criticada por Darboux. Neste período, este matemático mantinha intensa relação com Houël, pois ambos colaboraram na edição do *Bulletin des Sciences Mathématiques* e trocaram uma correspondência bastante rica, onde constam discussões envolvendo a redação do tratado de Houël. No decorrer de dez anos, Darboux criticou tudo o que lhe parecia errado nas escolhas do colega. Em uma das primeiras cartas, afirma:

> Permita-me lhe fazer observar que há duas escolas de geômetras aqui e em todo lugar: 1) os que admitem sem demonstração muitas coisas verossímeis como a afirmação de que toda função positiva que não atinge o zero possui um mínimo (proposição, aliás, falsa); 2) os que querem um rigor absoluto e que pretendem tudo demonstrar e precisar, exceto, é claro, os axiomas. Enfim, é preciso fazer a distinção entre o ensino e a ciência. A experiência me mostrou que há dificuldades que não se pode levar os alunos a perceberem, somente quando eles já estão mais experientes, refletindo sobre estas dificuldades, poderão enxergá-las" (GISPERT, 1987, p. 158).

Entre 1871 e 1878, Darboux tenta convencer Houël de alguns pontos significativos para o ensino da análise. Uma das críticas diz respeito ao problema da convergência uniforme e do limite uniforme, noções que não são definidas nos tratados deste segundo período. Sempre que os raciocínios infinitesimais envolvem duas variáveis, Houël admite implicitamente a uniformidade. Em 1875, chega a afirmar:

> Sim, admito como um fato de experiência (sem tentar demonstrá-lo no caso geral, o que pode ser difícil) que nas funções que considero sempre é possível encontrar *h* satisfazendo a igualdade $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) < \varepsilon$, para qualquer que seja *x*, e posso dizer que ignoro o que poderia significar a palavra derivada se não fosse assim. Acredito que esta hipótese é idêntica à da derivada. Se não é, acrescento-a." (HOUËL apud GISPERT, 2009, p. 421).

Na carta de 2 de fevereiro de 1875, Darboux exibe um contra-exemplo para mostrar a fraqueza do raciocínio de Houël. A necessidade de apresentar enunciados bem precisos que não comportam exceções é um dos pontos essenciais para o primeiro:

> Se eu lhe trago tantos tormentos sobre os princípios do cálculo infinitesimal é porque queria lhe ver produzir alguma coisa de verdadeiramente novo, com rigor no lugar do mais ou menos de Duhamel e de seus predecessores, expresso na frase célebre de D'Alembert: *vá em frente e a fé lhe virá*.

Houël parece entender as falhas em seus raciocínios, mas sua postura é mais a do professor que visa encontrar os caminhos mais claros e simples para a exposição da análise. Gispert (2009, p.422), cita um trecho de carta de Houël não datada:

> Não me indique funções para mostrar o defeito dos meus enunciados, mas mostre-me em que condições são verdadeiros (pois são certamente verdadeiros em todos os casos de que trato) e que restrições devo adotar. Até que ponto, formulando restrições suficientes, posso conservar os enunciados e as demonstrações atuais que não são inteiramente falsas.

Este debate indica as dificuldades de se incorporar aspectos da pesquisa em análise que se fazia na época aos livros-texto. Darboux, em consonância com outros matemáticos como Dirichlet, Riemann e Weierstrass, buscava exemplos de funções colocando em questão os enunciados tradicionais da análise, mas outros, como Houël e Hermite, questionavam a necessidade de abordar estas sutilezas no ensino.

Em uma carta de 23 de dezembro de 1873, Darboux havia proposto um plano para o tratado de Houël, que deveria ser iniciado com a ideia de limite, mostrando em seguida que a condição necessária para que uma sequência a_n tenha um limite é que se possa tomar n suficientemente grande de modo que $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$. Seguia-se daí a definição de funções contínuas e outros conceitos básicos. Em outra carta, de 15 de dezembro de 1875, um novo plano de Darboux sugeria começar pelo estudo das funções contínuas. Em ambos os casos, segundo Darboux, o conceito de infinitamente pequeno não era necessário para fundamentar a análise, mas também não era necessária a noção de número real, visão distinta daquela efetivamente praticada por Houël.

Sendo assim, em relação aos números reais, não podemos considerar que Houël tenha sofrido influência de Darboux. Além disso, a vontade deste último de demonstrar de modo rigoroso, em um novo sentido, todos os teoremas enunciados mostra o quanto Darboux percebia a exigência de justificar a exposição do modo mais geral possível, não dando margem a contra-exemplos. Esta não era, contudo, uma preocupação prioritária de Houël, que preferia restringir as condições do teorema para manter o enunciado e a demonstração tradicionais.

Conclusões

Os exemplos que estudamos exibem o movimento vivo e a evolução contraditória que atravessa a elaboração e a fundamentação da análise na segunda metade do século XIX. Por meio das noções de arcaísmo e inovação, definidas com relação ao contexto histórico, podemos observar que os tratados escritos para ensinar análise eram permeados pela oposição entre tradição (inércia e hábito) e desejo de renovação – almejando dialogar com os avanços da pesquisa da época.

O período da segunda geração de tratados é o momento em que essas tendências contraditórias aparecem de modo mais agudo, como indicam os casos de Méray e Houël. Alguns aspectos vistos como arcaísmos, como o conceito de função herdado de Lagrange, podem ser reinterpretados como uma escolha pedagógica. O mesmo vale para o conceito de diferencial, ligado à noção de infinitesimal, no tratado de Houël. Por outro lado, os tratados do terceiro período serão apresentados a partir de inovações, já presentes em Méray e Houël, como a importância da noção de sequência para definir os irracionais; e a noção de limite desta sequência para justificar as propriedades das operações sobre os números reais.

Apesar de serem semelhantes em relação ao papel dos irracionais, outros traços diferenciam os dois tratados, como a escolha pedagógica em relação à definição do conceito de função. Ao passo que Méray acha mais conveniente voltar ao conceito de função definido por Lagrange, o que exclui as funções patológicas, Houël introduz um conceito bastante geral de função e, após as críticas de Darboux, tenta incluir, em seus teoremas, os casos de funções especiais.

Além da tensão entre modernidade e arcaísmo, observamos, nestes tratados, uma incorporação não linear dos novos padrões de sistematização da análise, associados à pesquisa alemã. Houël procura em autores alemães, como Hankel e Grassmann, inovações que propiciem uma melhor compreensão do conceito de número e de quantidade. O tratado de Méray parece se constituir sobre uma reflexão própria (ao menos não são citados pesquisadores alemães no texto), mas este autor reconhece, em consonância com a tendência alemã, a necessidade de fornecer uma definição precisa de número real como fundamento da análise, que não faça apelo à intuição, mas possa ser inferida somente de princípios axiomáticos. Neste sentido, chega-se a afirmar que ele antecipa os trabalhos de Cantor e Dedekind (DUGAC, 2003).

Noções como generalidade e uniformidade, que chegam a ser vistas hoje como valores eternos e universais do padrão de rigor em matemática, começaram a ser elaboradas neste período, recebendo definições distintas dependendo dos atores e do meio em que se inseriam. Vimos que a ideia de que uma definição é mais “natural” que outra, no sentido usado por Méray (análogo ao defendido por Mittag-Leffler) introduzia um valor de generalidade e uniformidade para as definições matemáticas: o número irracional era definido de um modo "natural" se servia para garantir que todas as sequências convergem para um número. A definição de número real, proposta por Houël, exibe uma preocupação análoga, ao defender que os números devam ser definidos de modo a não deixar lacunas na reta.

Mas os exemplos de Méray e Houël indicam, ainda, o quanto a relação entre pesquisa e ensino interfere na constituição dos padrões de rigor admitidos como satisfatórios em um dado momento histórico. As argumentações usadas para defender a pertinência destas novas definições não se baseavam somente em necessidades internas à matemática, elas participavam de um debate intenso sobre a melhor maneira de se ensinar a análise. Temos exemplos positivos, mas também negativos, como a resistência de Houël em reformular seus teoremas, considerados por ele então como didáticos, a partir das críticas feitas por Darboux, que demandava a introdução de exemplos não-intuitivos de funções.

As definições para "natural" e "intuitivo", bem como para "rigoroso" e "geral", são múltiplas. Nosso objetivo foi sugerir, usando exemplos precisos, que estas ideias são construídas historicamente, a partir de reflexões ligadas ao contexto de pesquisa e ensino em certa época.

Referências

APPEL, P. (1898). *Eléments d'analyse mathématique à l'usage des ingénieurs*. Paris: Gauthier-Villars.

BELHOSTE, B. (2001). The École Polytechnique and Mathematics in Nineteenth-Century France". In BOTTAZZINI, U.; DAHAN-DALMEDICO, A. (Ed.). *Changing Images in Mathematics: from French Revolution to the new millennium*. London: Routledge, p. 15-30.

BERTRAND, J. (1864). *Traité de Calcul différentiel et integral*. Paris: Gauthier-Villars.

BOURBAKI, N. (1939). *Éléments des mathématiques*, 10 vols. Paris: Hermann.

_____. (1950). The Architecture of Mathematics. In *American Mathematical Monthly*. N.4, v. 57.

_____. (1960). *Éléments d'histoire des mathématiques*. Paris: Hermann.

CANTOR, G. (1915). *Contributions to the Founding of the Set Theory of Transfinite Numbers*. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1915.

CARAÇA, B. J. (1951). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Sá da Costa.

CAUCHY, A.L. (1992). *Cours d'analyse algébrique*. Paris: De Bure, 1821. Reimpresso Bologna: CLUEB, 1992.

CORRY, L. (2001). Mathematical Structures from Hilbert to Bourbaki". In BOTTAZZINI, U.; DAHAN-DALMEDICO, A. (Ed.). *Changing Images in Mathematics: from French Revolution to the new millennium*. London: Routledge, p. 167-185.

DARBOUX, G. (1876). Duhamel, Eléments de Calcul infinitésimal (resenha). In *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*. v. 11.

_____. (1880). Houël, Cours de Calcul infinitesimal (resenha). In *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*. N.1, v. 4.

DEDEKIND, R. (1872). Continuity and irrational numbers. In *R Dedekind, Essays on the theory of numbers*. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1901. Trad. de W.W. Beman de "Stetigkeit und irrationale Zahlen", 1872.

_____. The nature and meaning of numbers". In *R Dedekind, Essays on the theory of numbers*. Chicago: The Open Court Publishing Company, 1901. Trad. de "Was Sind und was Sollen die Zahlen?", 1888.

DUGAC, P. (1970). Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite. In *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*. N.4, v. 23.

_____. (2003). *Histoire de l'analyse: autour de la notion de limite et de ses voisinages*. Paris : Vuibert.

DUHAMEL, J-M. (1856). *Éléments de Calcul infinitésimal*. Paris: Gauthier-Villars.

_____. (1874*). Éléments de Calcul infinitesimal* (3a ed.). Paris: Gauthier-Villars.

FÉLIX, L.; ROQUE, T. (2011). A definição dos números irracionais proposta em 1869. In *Anais do III SIEMAT*. São Paulo: UNIBAN.

FERREIRÓS, J. (2000). *Labyrinth of Thought: A History of Set Theory and its Role in Modertn Mathematics*. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 2000.

GILAIN, C. (1989). Cauchy et le cours d'analyse de l'Ecole polytechnique. In *Bulletin de la Société des amis de la bibliothèque de l'Ecole polytechnique*. v. 5.

GISPERT, H. (1982). *Camille Jordan et les fondements de l'analyse (comparaison de la 1ère édition (1882-1887) et de la 2ème (1893) de son cours d 'Analyse de l'École Polytechnique)*. Thèse de doctorat. Université de Paris-Sud, Paris.

_____. (1983). Sur les fondements de l'analyse en France (à partir de lettres inédites de G. Darboux et de l'étude des différentes éditions du Cours d'analyse de C. Jordan). In *Archive for History of Exact Sciences*. v. 28.

_____. (1987). La correspondance de G. Darboux avec J. Houël. Chronique d'un rédacteur (déc. 1869-nov. 1871). In *Cahiers d'histoire des nathématiques*. v. 8.

GISPERT, H. (1991). La France mathématique: la Société mathématique de France, 1870-1914. Paris: Société françaised'histoire des sciences et des techniques; Société mathématique de France. In *Cahiers d'histoire & de philosophie des sciences*. Nouvelle série, N.34.

_____. (2009). Les traités d'analyse et la rigueur en France dans la deuxième moitié du XIXe siècle. Des questions, des choix et des contextes. In BRIZZI, G. P.; TAVONI, M.

G. (Eds.). *Dalla pecia all'e-book*. Bologna: Libri per l'Universita:Stampa, editoria, circulazione e lettura, Clueb, p. 415-430.

_____.; SCHUBRING, G. (2011). Societal, Structural, and Conceptual Changes in Mathematics Teaching: Reform Processes in France and Germany over the Twentieth Century and the International Dynamics. In *Science in Context*, N.1, v. 24.

GRATTAN-GUINNESS, I. (1970). *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*. Cambridge, Massachussets: MIT Press.

_____. (1980). *From Calculus to Set Theory 1630-1910: An Introductory History*. Princeton: Princeton University Press, 1980.

GRAY, J. (2008). *Plato's Ghost: The Modernist Transformation of Mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

HANKEL H. (1867). *Vorlesungen über die complexen zahlen, und ihren functionnen*. Leipzig: Leopold Voss.

HERMITE, C. (1984-1989). Lettres à Gösta Mittag-Leffler, publiées et annotées par P. Dugac. In *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*. v. 5.

HOUËL, J. (1878). *Cours de calcul infinitésimal*. Paris: Gauthier-Villars.

JORDAN, C. (1882). *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*. Paris: Gauthier-Villars.

_____. (1893). *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*. Paris: Gauthier-Villars.

JOURNAL OFFICIEL DE LA REPUBLIQUE FRANÇAISE. (1882). Débats parlementaires. Journal official, Paris.

LACROIX, S-F. (1802). *Traité de calcul différentiel et du calcul intégral*. Paris: Courcier.

LAURENT, H., (1873). Ch. Méray. Nouveau précis d'analyse infinitésimale. In *Bulletin des Sciences Mathématiques*. v. 4.

LÜTZEN, J. (2003). The Foundations of Analysis in the 19th Century. In JAHNKE H. N. (Ed.). *A History of Analysis*. Providence: American Mathematical Society, p. 155-196.

MÉRAY, C. (1869). Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données. In *Revue des Sociétés Savantes*. N.2, v. 4.

_____. (1872). *Nouveau précis d'analyse infinitésimale*. Paris: Savy.

_____. (1887). Sur le sens qu'il convient d'attacher à l'expression nombre incommensurable et sur le critérium de l'existence d'une limite pour une quantité variable de nature donnée . In *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*. N.3, v. 4, p. 341-360.

_____. (1892). Considérations sur l'enseignement des mathématiques. In *Revue bourguignonne de l'Enseignement Supérieure*. v. 2.

_____. (1894-1898). *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques*. Paris, Gauthier-Villars.

SCHUBRING, G. (2005). *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition: number concepts underlying the development of analysis in 17-19th century France and Germany*. New York: Springer.

TALL, D. (2010). A Sensible Approach to the Calculus. Conferência: The National and International Meeting on the Teaching of Calculus, September 2010, Puebla, Mexico. Disponível em http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/calculus.html.

TANNERY, J. (1886). *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*. Paris: Hermann.

TANNERY, J. (1894). Méray Ch. Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques, Première partie: Principes généraux. In *Bulletin des Sciences Mathématiques*. N.2, v. 8.

VIANNA R.; ROQUE, T. (2010). O Ensino na École Polytechnique e a Rigorização da Análise: o Cours d'analyse de Cauchy. In *Boletim GEPEM*. v. 57.

ZERNER, M. (1994). La transformation des traités français d'analyse. Publications mathématiques du laboratoire Dieudonné, Université de Nice. Disponível em http://hal-unice.archives-ouvertes.fr/docs/00/34/77/40/PDF/zernertransformation.pdf

Artigo recebido em 16 de agosto de 2012