

Geometria e óptica no século XVI: a percepção do espaço na perspectiva euclidiana

FUMIKAZU SAITO

Resumo

Este trabalho aborda alguns aspectos relacionados à óptica e à geometria no século XVI, na Europa. Neste estudo, foram selecionados para análise a *Óptica*, de Euclides, e o *De refractione optices parte libri novem*, de Giambattista della Porta. A análise desses tratados de óptica à luz de outros documentos ligados à perspectiva em geral, publicados naquela época, revela dois quadros teóricos distintos utilizados para explicar a percepção visual de um mesmo objeto. Aponta-se, desse modo, para as questões de natureza epistemológica ligadas à representação dos objetos e sua relação com os mecanismos de visão, de modo a lançar luz sobre a natureza dos objetos de investigação da matemática e, assim, contribuir para a reflexão acerca da articulação entre a matemática e seu ensino.

Palavras-chave: Óptica; Matemática; representação.

Abstract

This paper discusses some aspects concerning geometry and optics in sixteenth-century Europe. The analysis is centered on Optics, by Euclid, and on De refractione optices parte libri novem, by Giambattista della Porta. An analysis of these works in light of other documents related to perspective in general, published at that time, shows two distinct theoretical frameworks used to explain the visual perception of the same object. Thus, this study approaches the epistemological issues related to the representation of objects and its relationship to the vision mechanisms, in order to shed light on the nature of the objects of mathematical investigation and thereby to contribute to the debate about the articulation between mathematics and its teaching.

Keywords: Optics; Mathematics; Representation.

* Doutorado em História de Ciências – PUC-SP. Professor de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática – PUC-SP. E-mail: fsaito@pucsp.br

Embora a matemática fizesse parte do cotidiano das pessoas e re-geesse boa parte das atividades humanas desde a Antiguidade, o estímulo para usá-la como guia para interpretar a natureza teve sua origem no resurgimento das doutrinas platônicas, neoplatônicas e pitagóricas durante o Renascimento. A partir daquela época, a nova relação entre matemática, natureza e técnica encontrou lugar para se manifestar em vários segmentos da atividade humana, não só na pintura, escultura, arquitetura, etc., mas também em outros ramos da filosofia natural (Debus, 1996, pp. 15-42). Mas, no que diz respeito especificamente à matemática, podemos dizer que foi o desenvolvimento da perspectiva linear, a partir do século XV, que impulsionou e propiciou novos desdobramentos na geometria.

Associada inicialmente às questões ligadas ao processo visual, a perspectiva linear parece ter conduzido a novos desenvolvimentos no estudo da geometria, por ter redefinido a percepção da experiência visual, ao introduzir novos padrões de desenhar e trazer novos critérios para a “verdade óptica”. Nesse sentido, alguns estudos têm demonstrado que isso esteve relacionado não só à capacidade interpretativa de cada um, mas também ao modo como o homem passou a organizar sua experiência visual. Considerando-se que o homem classifica seus estímulos visuais segundo as capacidades que uma sociedade ou uma cultura valoriza, de modo a compartilhar sua experiência e hábitos visuais, a perspectiva linear no Renascimento parece ter, assim, redefinido o espaço de visibilidade, isto é, aquele espaço percebido pela visão (Baxandall, 1988; Edgerton Jr., [s.d.]). Assim, neste estudo, procuramos apontar para a interface entre a óptica e a geometria que, em meados do século XVI, buscou redefinir a concepção de visão e espaço percebido e, por conseguinte, representado. Análise de documentos originais daquele período trazem indícios da estreita relação entre óptica e geometria que, entretanto, privilegiaram, ora questões de natureza mais matemática, ora mais de “óptica”. Por meio desta análise, buscamos compreender de que maneira Óptica e Geometria se articularam em finais do século XVI. Para tanto, partiremos de algumas considerações ligadas à óptica quinhentista, de modo a apontar para os seus pressupostos matemáticos, estabelecendo um diálogo com os estudos sobre a refração óptica, área de estudo bastante explorada naquela época.

A óptica quinhentista

A óptica no século XVI possuía características muito distintas daquelas com as quais estamos acostumados. Naquela época, óptica ou *perspectiva*, como era mais conhecida, não era simplesmente um capítulo da Física com características essencialmente matemáticas, tal como aquela praticada especialmente com mais intensidade a partir do século XVII. Ela não se restringia simplesmente ao estudo dos estímulos físicos e à geometrização dos “raios visuais”, mas também se ocupava dos efeitos de tais estímulos no órgão sensorial da visão e da conseqüente percepção apreendida pela alma (Ronchi, 1991, pp. 11-20). Desse modo, não era raro encontrar esses tratados tópicos relativos à fisiologia e à anatomia do olho ao lado de outros, que procuravam explicar de que maneira o órgão sensorial da visão adquiriria conhecimento acerca das propriedades dos objetos¹.

Segundo Hamou (1995), o termo *perspectiva* era a tradução latina para o termo grego *optiké*, que significava visão direta ou distinta, aquele que, para os gregos desvelava as coisas (p. 7). Assim, os tratados antigos e medievais sobre a visão recebiam a designação de *perspectiva* que, até o século XVII, parece ter coexistido com aquele termo que nomeava a técnica pictórica. Para distingui-los, comumente opunha-se à perspectiva “comum” ou “natural” a *perspectiva artificialis* dos pintores, expressão que deve ser traduzida por “visão artificial” (Simon, 1988, p. 73).

Mas outros termos também eram utilizados fazendo referência à óptica. Se dermos atenção aos títulos dos tratados de óptica anteriores ao século XVII, veremos que, ao lado dos termos “óptica” e “perspectiva”, ocorrem outros tantos, tais como *aspectibus*, *visu*, e mesmo *prospettiva* (a tradução italiana de *perspectiva*).² Nesse particular, observa Gabriella Vescovini (1997, pp. 163-164) que esses termos designavam a óptica em geral, embora tratassem de diferentes aspectos. Assim, o termo *perspectiva*, durante a Idade Média, era empregado para se referir a um conjunto de teorias ligado à visão. O termo *aspectibus*, por sua vez, fazia referência aos problemas de aparência visual, ao aspecto ou à forma das coisas tal como apareciam aos olhos. Além disso, *aspectibus* geralmente traduzia para o latim os estudos de óptica que foram desenvolvidos pelos árabes (séculos

1 Como veremos mais adiante, podemos entender “raios visuais” em dois contextos diferentes, isto é, segundo uma teoria “emissionista” ou “recepcionista” da visão.

2 Vide levantamento de tratados de óptica medievais e renascentistas em Lindberg (1975).

IX a XII) e referia-se basicamente à teoria óptica desenvolvida por Alhazen (965-1039). Quanto ao termo *visu*, ele designava apenas o sentido da vista no que dizia respeito aos problemas da visão e da evidência das coisas sensíveis. O termo estava, assim, associado não só à óptica grega (*optike*), mas também à terminologia empregada pelos latinos, tal como Cícero (106 a.C.-46 a.C.) e os antigos estóicos. Nas cópias mais tardias, os textos reconhecidos como *De visu* também receberam a designação de *De aspectibus*. Enfim, os termos *perspectiva* e *prospettiva* seriam distinguidos em alguns tratados de perspectiva linear ao longo do século XVI. Desse modo, *perspectiva* designaria o estudo da visão enquanto “*aspetto*”, isto é, da recepção natural dos impulsos ópticos e *prospettiva*, o estudo da *perspectiva artificialis*, que recriava a ilusão de profundidade num plano bidimensional.³

É nesse pano de fundo que devemos localizar a óptica do século XVI ao discutirmos a relação entre Óptica e Matemática. Embora possamos encontrar indícios do uso da geometria para explicar os fenômenos da visão desde a Antiguidade, tal como na *Óptica* de Euclides (1996) (*fl.* 300 a.C.), foi apenas a partir do Renascimento, com o desenvolvimento da perspectiva linear, que as discussões da relação entre geometria e óptica ganharam um novo impulso, propiciando novos desdobramentos, tanto na Matemática quanto na Óptica (Simon, 2003, 1994).

Isso não significa, entretanto, que estudiosos medievais não tivessem considerado a estreita conexão existente entre essas duas áreas do conhecimento. Muito pelo contrário, a relação entre Filosofia Natural e Matemática estava no centro de suas discussões, tal como podemos constatar nas obras de Tomás de Aquino (1225-1274), Roger Bacon (1214-1294), Roberto Grosseteste (1175-1253) entre outros (Nascimento, 1998, pp. 13-87; Gagné, 1969, pp. 975-986; Dear, 1995). Mas, embora a geometria fosse um ótimo recurso para descrever algumas propriedades ligadas à percepção visual, ela não explicava o fenômeno perceptual como um todo, de modo que muitos estudiosos procuraram basear seus estudos, nos detalhes fisiológicos e anatômicos do olho.⁴

3 Sobre os significados de *prospetto* e *aspetto*, vide Frangenberg (1986).

4 Cabe ainda observar que o propósito da óptica, naquela época, era compreender a visão, a percepção e, eventualmente, a cognição (Simon, 2003). Sobre a visão como sentido privilegiado e sua conexão com a aquisição de conhecimento, vide: Spinosa (1997) e Beretta (2004).

Não aprofundaremos aqui questões ligadas à teoria da visão, pois foge ao escopo de nossa principal discussão. No entanto, queremos apontar para alguns aspectos que parecem estar diretamente ligados à questão da “geometrização da percepção visual”. Assim, em primeiro lugar, discorreremos brevemente sobre as duas formas mais correntes de explicação para o funcionamento da visão no século XVI, de modo que possamos compreender a estreita conexão entre teorias da visão e da representação.

A Óptica de Euclides

Euclides é mais conhecido como o autor de *Elementos* e, portanto, como geômetra.⁵ Entretanto, há outras numerosas obras atribuídas a ele, dentre as quais tratados relativos à música, à astronomia e à óptica, da qual nos ocuparemos neste trabalho (Incardona, 1996, pp. 37-45). Em todas essas obras é notória a influência dos axiomas e dos teoremas presentes nos *Elementos* (Bulmer-Thomas, 1981, pp. 415-437).

A *Óptica* foi escrita, provavelmente, no início do século III a. C. e é o primeiro tratado de óptica com características geométricas de que se tem notícia. Assim como as outras obras de Euclides, esta, que reduz o problema visual aos contornos geométricos do objeto visível, tem a mesma forma de um tratado axiomático. Tal como nos *Elementos*, a obra apresenta, inicialmente, alguns “postulados”,⁶ a partir dos quais são deduzidos 58 teoremas. No total de sete, esses “postulados” foram apresentados por Euclides nos seguintes termos:

- I. Que as linhas retas, que procedem do olho, divergem indefinidamente.
- II. Que a figura formada pelos raios visuais é um cone, que tem como vértice o olho e a base o contorno da coisa vista.

5 Para este estudo, consultamos Euclides (1952).

6 Incardona utiliza o termo “premissas” para traduzir a palavra grega *boroi* (Euclides, 1996, p. 101). A esse respeito, cabe observar que o termo grego *boroi* significa “definições”, mas no sentido de regra ou norma. Assim, diferentemente da sugestão de Incardona, traduzimos o termo por “postulados” porque estes 7 *boroi* preenchem esta função na *Óptica* de Euclides. Contudo, devemos tomar o cuidado de não considerá-los axiomas, pois, para os gregos na época de Euclides, o termo “axioma” tinha sentido mais estrito; a esse respeito, vide Cabrera (1949).

III. Que as coisas vistas são aquelas sobre as quais incidem os raios visuais; que aquelas não vistas são aquelas sobre as quais não incidem os raios visuais.

IV. Que as coisas vistas sob ângulos maiores aparecem maiores; que aquelas vistas sob ângulos menores, menores; aquelas vistas sob ângulos iguais, iguais.

V. Que as coisas vistas sob raios visuais mais altos aparecem mais altos; aquelas vistas sob raios visuais mais baixos, mais baixo.

VI. Que, similarmente, as coisas vistas sob raios visuais mais à direita aparecem mais à direita; aquelas vistas sob raios visuais mais à esquerda, mais à esquerda.

VII. Que as coisa vistas sob mais ângulos aparecem mais claramente. (Euclides, 1996, p. 101, tradução nossa)

Os “postulados” I, II e III definem o processo visual geometricamente: a visão é dada pelo cone visual formado pelos raios visuais que são emitidos a partir dos olhos em direção ao objeto. O vértice do cone é localizado no olho e a base na superfície do objeto.

Ao representar os raios visuais por meio de linhas retas, Euclides transformava os problemas de óptica em problemas geométricos. O processo de geometrização, entretanto, é completado com os “postulados” subseqüentes, com os quais as dimensões do objeto visível são percebidas pelo observador. Com exceção do último “postulado”, que se refere mais propriamente à clareza com a qual o objeto é percebido, os “postulados” IV, V e VI estabelecem que o tamanho aparente do objeto é dado pela abertura do ângulo de visão e a sua posição no espaço através do cone visual.⁷ Assim, uma vez que, em *Elementos*, Euclides tinha ensinado como usar os ângulos retilíneos e, em sua *Óptica*, tinha definido a trajetória retilínea da luz, ele podia então desenvolver uma série de teoremas e aplicá-los à visão.⁸

A *Óptica* recebeu vários comentários e foi estudada com grande atenção durante a Antiguidade, Idade Média e Renascimento de modo que, podemos dizer, esteve na base da atual óptica geométrica e na ori-

7 Cabe observar que, ao proceder dessa maneira, Euclides ignora os problemas físicos associados à natureza dos raios visuais, bem como as questões relacionadas à fisiologia da visão e os fatores “psicológicos” que influenciariam a percepção e a localização dos objetos no espaço. Vide a esse respeito em Lindberg (1976, pp. 13-14).

8 Sobre o uso de ângulos, vide as Definições 9 e 18 de *Elementos* em Euclides (1952, p. 1).

gem, direta ou indiretamente, da moderna perspectiva (Incardona, 1996, p. 49). Contudo, cabe observar que a *Óptica*, atribuída a Euclides, durante a Idade Média e o Renascimento era, na realidade, uma compilação⁹ escrita por Theon de Alexandria (ca. 365). O que significa que a óptica euclidiana veio a ser estudada, no Renascimento, através da obra de Theon, que trazia novos teoremas e demonstrações diferentes daqueles propostos por Euclides (Incardona, 1996, p. 8).¹⁰

A primeira tradução da *Óptica* de Euclides em língua vulgar (italiano) foi feita a partir do latim, em 1573, e recebeu uma segunda edição em 1623. Traduzido por Egnazio Danti (1536-1586), esse tratado foi utilizado com frequência pelos estudiosos não só de óptica, mas também por fabricantes de instrumentos, pintores e escultores. A tradução de Danti teve por base a tradução latina de 1557, feita por Johannes Pena (ca. 1557), das *Opticae recensiones* de Theon, que Danti acreditava ser autêntica, embora ele duvidasse se algumas das anotações ali contidas eram de Euclides ou de Theon (Frangenberg, 1988).

Mas o que cabe aqui observar é a importância que teve a *Óptica* de Euclides na elaboração da teoria da representação do espaço. Tal importância, entretanto, não repousa no fato de que os estudiosos naquela época tivessem assumido os pressupostos geométricos de Euclides e tê-los aplicado, prontamente, ao mundo real. Mas no debate que conduziu os estudiosos do século XVI sobre a estreita conexão existente entre as teorias de visão e de representação na elaboração da perspectiva linear.

Os estudiosos de óptica naquela época conheciam muito bem a *Óptica* de Euclides. Entretanto, em sua grande maioria, o tratamento geométrico proposto por Euclides não parecia ser satisfatório para explicar o funcionamento da visão. Primeiro, porque, de acordo com a teoria euclidiana, a visão se daria por emissão de raios de “luz” dos olhos do observador que seriam enviados até os corpos sensíveis para “sentir-los”. Segundo, porque a teoria de Euclides não explicava adequadamente de que maneira a visão reteria as cores dos corpos, visto que a cor só podia estar no corpo.

9 Trata-se de *Opticae Recensiones* de Theon de Alexandria, traduzida do grego para o latim por Johannes Pena em 1557.

10 Para estudo comparativo entre o conteúdo dessas duas obras, vide Incardona (1996, pp. 54-60).

Conhecida como “emissionista”,¹¹ a teoria de Euclides encerrava ainda uma série de outras dificuldades. Um delas era o fato de que não explicava por que razão, ao observarmos as constelações, por exemplo, toda quantidade de “luz” presente nos olhos não se esgotava. Além disso, se o olho emitisse raios de “luz”, esses raios teriam que transitar através do ar e isso não poderia ocorrer sem penetração de corpos, o que se afigurava como um absurdo (Saito, 2008, p. 91).

Em contrapartida, a “teoria recepcionista”, que remontaria aos atomistas gregos, notadamente Demócrito, postulava que dos corpos proviriam continuamente simulacros que, como “peles”, se destacariam dos corpos visíveis e se dirigiriam para os olhos (ibid., p. 90).¹² Essa teoria também encerrava várias dificuldades, porém, parecia ser mais satisfatória e adequada para explicar o funcionamento do órgão da visão sem, entretanto, descartar o uso do cone visual, tal como podemos constatar no tratado de óptica de Wítelo (ca. 1230-ca. 1280) e Alhazen.¹³

Segundo Alhazen, a visão era decorrente de um processo visual que estabelecia uma correspondência entre cada ponto do objeto da visão e do olho. Assim, qualquer corpo, independentemente de seu tamanho, podia ser decomposto em pequenas unidades ou pontos. Cada um desses pontos emitiria a forma do corpo com suas cores em todas as direções. Desse modo, cada ponto do olho receberia um único raio que lhe era perpendicular. A coleção de todos esses raios perpendiculares constituía uma pirâmide ou cone visual cuja base estava no objeto da visão e o vértice no centro do olho (Alhazen, 1972, pp. 7-20).

Cabe notar que tanto essa teoria quanto a anterior tinham por pressuposto a idéia de que a visão ocorria por contato com a coisa visível. De

11 Também conhecida como teoria de “extromissão”. A origem dessa teoria está associada ao nome de Euclides, vide a esse respeito em Lindberg (1976, pp. 12-16).

12 Cabe notar que, além das teorias “emissionistas” e “recepcionistas” da visão, existiram também outras teorias igualmente plausíveis para explicar o processo visual; a esse respeito, vide Saito (2008, pp. 89-107) e Frangenberg (1991).

13 Além da *Perspectiva communis* de John Pecham, a *Óptica* de Ptolomeu teve grande circulação no século XVI (Dupré, 2003). Porém, os tratados de óptica de Wítelo e de Alhazen parecem ter sido as obras de referência mais comuns e foram reconhecidas como os principais textos de óptica; vide a esse respeito em Lindberg (1972, pp. xxi-xxiii). Comentários a respeito da óptica de Alhazen e a compilação de Risner (*Opticae thesaurus* de 1572) podem ser consultados em Sabra (1989, pp. lxxiii-lxxix) e Lindberg (1968).

acordo com a teoria recepcionista, a visão era um receptáculo de simulacros (*simulachra*). Assim como o tato e o palato sentiam as coisas por contato direto e o olfato e a audição, indiretamente, por meio de emanções e eflúvios que saíam dos corpos, a visão “sentia” as coisas visíveis por meio dos simulacros (*simulachra*) que penetravam o olho. Além disso, a teoria emissionista postulava a existência de um homólogo à luz que saía dos olhos e “tocava” as coisas visíveis dando a sensação da visão.¹⁴

Mas deve-se ressaltar que a teoria euclidiana da visão não era exatamente uma teoria emissionista, mas uma teoria matemática da visão, aspecto esse que seria ressaltado pelos estudiosos de perspectiva no século XVI. De fato, a maior parte dos 58 teoremas da *Óptica* de Euclides parece lidar apenas com problemas de perspectiva, isto é, com questões ligadas à aparência de um objeto em função de sua relação espacial com o observador (Euclides, 1996). Assim, problemas relativos à natureza dos raios visuais e do seu encontro com os objetos visíveis parecem ter sido praticamente ignorados por Euclides (Lindberg, 1976, pp. 11-14).¹⁵

Contudo, para que a teoria da visão geométrica euclidiana tivesse êxito, era necessária uma teoria matemática da representação muito diferente daquela com a qual os estudiosos estavam acostumados até então (Panofsky, 1999). O desenvolvimento dessa teoria, entretanto, requisitou não só uma mudança nas concepções de espaço, mas também de outras, relacionadas à visão. Como veremos a seguir, os estudiosos voltaram a atenção para responder questões ligadas à relação entre a construção de uma imagem e a geometria da visão, buscando responder o que acontecia com a imagem em perspectiva quando ela era considerada um objeto da visão.

A perspectiva linear e a percepção do espaço

No século XVI, parece já existir a convicção de que aquilo que é visto é aquilo que é desenhado, e aquilo que é desenhado é aquilo que lá está. Ou seja, há uma retórica que parece assegurar uma correspondência entre a visão e a representação.¹⁶

14 Cabe notar que raio visual e raio luminoso são duas noções distintas; vide Simon (1994).

15 A esse respeito, Jones (1994, pp. 48-56) observa que Euclides não deixou claro se os raios eram fisicamente reais; segundo o autor, há duas diferentes versões da *Óptica*.

16 Há vários estudos dedicados à perspectiva linear. Citamos aqui apenas alguns destes: Edgerton Jr. (1975 e 1991) aborda o tema tendo em consideração o conhecimento

Sem entrarmos em pormenores, podemos dizer que a perspectiva linear não era só um meio eficaz de representar a realidade aparente, mas também uma técnica extraordinária de medida (Camerota, 1998, pp. 293-308 e 2004, p. 146; Salvemini, 1990). A visão parece, dessa maneira, ter adquirido uma dimensão matemática através da perspectiva linear (Veltman, 1986, pp. 104-114).

Podemos dizer que, diferentemente dos estudos medievais, os tratados de perspectiva parecem ter abandonado gradativamente as indagações acerca dos fenômenos perceptivos, passando a enfatizar problemas específicos de representação. Entretanto, esse movimento que implicou a passagem de uma concepção de espaço percebido pela visão para um outro, geométrico, desvinculado dos fenômenos fisiológicos da percepção não esteve relacionado diretamente a critérios de rigor matemático. Tal movimento, provavelmente, esteve ligado à crescente preocupação dos estudiosos da natureza em querer representar a natureza tal “como ela é” (Edgerton, [s.d.], pp. 168-197). Os vários aspectos ligados à percepção visual, que não podiam descartar outros, relacionados ao órgão sensorial da visão, foram reconsiderados por esses estudiosos para poder representar a natureza de maneira mais fidedigna, considerando questões atinentes à construção de novos conhecimentos.

De fato, mesmo pintores, escultores e arquitetos não abandonaram questões relativas à visão em seus tratados ao elaborarem suas teorias de perspectiva. Leon Batista Alberti (1404-1472), por exemplo, ao apresentar sua teoria expôs, primeiramente, uma teoria sobre a visão (Alberti, 1989, p. 79). Segundo Alberti, “ver” era uma questão de o olho obter informações de um objeto por meio de um cone que tinha o vértice no olho e a base no objeto visto” (ibid., p. 89). A “pintura” era, desse modo, uma fatia desse cone, uma intersecção transversal em relação ao seu eixo, feita a uma certa distância do olho do observador (ibid., p. 94). Assim, para produzir um quadro em perspectiva, era necessário orientar o cone da visão do artista de tal modo que a linha central fosse a mais curta possível entre o olho e o centro da cena a ser pintada. Tal intento

matemático dos artistas; Kemp (1990) procura traçar a complexa formação da construção perspectiva através das matemáticas práticas, da interação entre humanistas e artesãos, dos novos modos de devoção religiosa e da ligação dos valores estéticos clássicos, especialmente, o sistema proporcional do desenho arquitetônico dos pintores.

era satisfatoriamente obtido por meio da recomendação feita por Alberti, com o uso de um “véu, muito fino, de tecido pouco fechado, tinto com a cor que se quiser, com fios mais grossos formando quantas paralelas se quisessem” (ibid., p. 94).

O uso desse recurso teve implicações importantes não só na óptica, mas também na filosofia natural, principalmente, no que diz respeito à apreensão do espaço. Na medida em que a cena, situada além da trama do véu, deveria ser observada através deste, era preciso que o pintor desenhasse não o que se sabia ser verdadeiro naquela cena, mas o que se via no véu.¹⁷ E, o que se via eram linhas paralelas que convergiam umas para as outras à medida que se afastavam do observador. Assim, essas linhas podiam ser quantificadas e depois transferidas para uma superfície plana, criando, com traçados cuidadosamente orientados, a ilusão de um espaço com três dimensões.

A teoria do véu de Alberti derivou, provavelmente, das considerações feitas por Euclides e Alhazen em seus tratados de óptica (Camêlo, 2005, p. 40). Nesses tratados, além do cone ou pirâmide visual, o principal objeto de investigação era o ângulo de visão, isto é, aquele ângulo por meio do qual se percebiam as dimensões do objeto visto. No entanto, deve-se notar que a construção de desenhos em perspectiva linear não estava baseada na abertura do ângulo visual, mas na distância entre o olho e o objeto.

Na perspectiva angular, o segmento BD seria visto sob um ângulo de abertura β . Conforme o “postulado” IV da *Óptica* de Euclides, se a abertura angular reduzisse para α de modo que $\beta = 2\alpha$, tal como na Figura 1, este mesmo segmento BD apareceria diminuído em seu tamanho para EC. Ou seja, para dois ângulos, onde um seria o dobro do outro, o segmento BD seria visto menor pelo olho A. Por outro lado, na perspectiva linear, sob as mesmas condições, o segmento BD seria visto em E’C’ (e não em EC), pois a base de medida, neste caso, não seria angular, mas linear. Desse modo, o segmento BD seria visto a uma distância que era o dobro da distância entre o olho e o segmento BD, isto é, a uma distância AC’ = 2 AB.

¹⁷ Vide exemplos da dificuldade de “ver apenas o que se via” na pintura em Crosby (1999, p. 177).

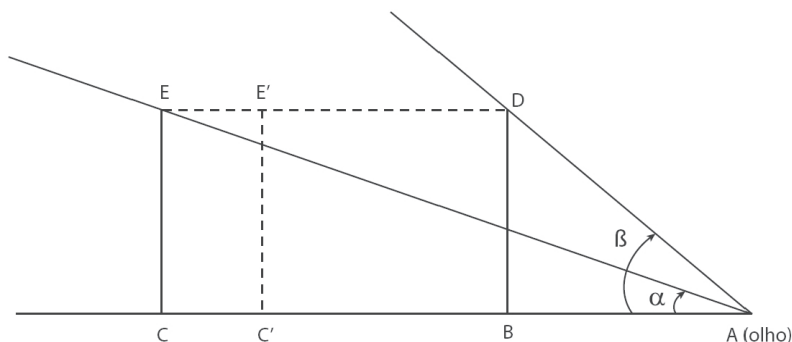


Figura 1 – discrepância entre perspectiva angular e linear (figura nossa)

Nesse particular, ressaltando a discrepância existente entre dois métodos de perspectiva (angular ou curva e linear), Panofsky (1999) observa que a principal diferença entre os antigos e modernos repousa no contraste entre “teoria matemática da visão” e “teoria matemática da representação”. Segundo Panofsky (ibid.), na óptica da Antiguidade (e, portanto, também dos medievais), o campo de visão era entendido como uma esfera. Desse modo, as grandezas aparentes seriam sempre determinadas pela amplitude dos ângulos de visão e não pela distância do objeto ao olho. A relação entre as grandezas do objeto era expressa em graus de ângulo ou de arco. Além disso, na perspectiva linear, as quantidades e as distâncias variavam proporcionalmente. Assim, considerando que a perspectiva linear correspondia ao mesmo tempo à experiência óptica e às leis da matemática do espaço, Panofsky observa que se fez sentir uma contradição entre a *perspectiva naturalis* ou *communis*, defendida por Euclides, e a *perspectiva artificialis*, que se desenvolveu no Renascimento de tal modo que a primeira não procurou senão formular matematicamente as leis da visão e a segunda estabeleceu um método que se provaria útil na representação de imagens em superfícies bidimensionais. Desse modo, Panofsky (ibid., p. 37) acredita que essa contradição só teria sido resolvida com a rejeição do axioma euclidiano dos ângulos, o que parece ter sido possível com a introdução da noção de infinito no Renascimento, implicando uma nova noção de espaço.

De fato, nos séculos XV e XVI, houve um caloroso debate acerca das discrepâncias entre a óptica euclidiana, com sua noção de tamanho angular, e a perspectiva linear, com seu conceito de tamanho projetado. Entretanto, como bem observa Veltman (1980), o resultado final foi de

aceitação geral de um conceito mais livre de perspectiva que admitia os métodos de ajuste óptico. Assim, ao contrário do que prescrevia Panofsky, não houve uma rejeição do axioma euclidiano do ângulo. Além disso, Veltman observa que, mesmo depois do final do século XVII, a teoria euclidiana da visão não foi revisada de acordo com os cânones da perspectiva linear.¹⁸

Podemos dizer que, embora a perspectiva, dita artificial, dos pintores e arquitetos lidasse apenas com a representação geométrica das coisas, ela, entretanto, estava estreitamente conectada a questões ligadas à visão. Assim, como já sugerimos, não seria forçado estabelecer uma clara fronteira entre *perspectiva artificialis* e *naturalis*, visto que esses dois aspectos, representação e visão, relacionavam-se de diversas maneiras num amplo espectro de possibilidades.

Mas, também, à medida que avançamos do século XV ao XVII, notamos uma gradativa separação entre essas duas expressões da óptica. Embora aspectos ligados à visão ainda continuem a fazer parte dos tratados de perspectiva linear, outros, ligados à fisiologia e à anatomia, são deixados de lado. Além disso, os tratados de óptica parecem, aos poucos, dar importância maior à luz, e o mesmo parece ocorrer no caso da perspectiva linear que passa a agregar outras questões ligadas ao traçado da sombra. Soma-se ainda a isso, o fato de que as questões de natureza anatômica e fisiológica do olho parecem ir gradativamente desaparecendo dos tratados de óptica, migrando para outros, relacionados à medicina ou à física. Assim, à medida que avançamos em direção ao século XVII, constatamos o surgimento de tratados específicos de perspectiva geométrica em que considerações fisiológicas, anatômicas e ópticas são deixadas de lado e um tratamento mais matemático é apresentado.

De fato, *La pratica della perspettiva* de Daniele Barbaro (1514-1570), por exemplo, traz vários elementos encontrados em tratados de óptica tradicional. Nela, há referências aos raios visuais e a outras propriedades da visão. Entretanto, algumas outras considerações de caráter puramente óptico, tais como o estudo anatômico e fisiológico do olho, são eliminadas (Barbaro, 1596). Além disso, Barbaro considerou irrelevante para seus

18 Sobre os métodos de ajuste óptico, as proposições 9 e 10 do quinto livro de *De refractione* em Della Porta (1593, pp. 119-122) e Dürer (1987, pp. 158-160); estudos a respeito do ajuste óptico nos séculos XV e XVI podem ser consultados em Docci e Maestri (1986); Frangenberg (1992 e 1993).

objetivos discutir se o olho recebia ou emitia raios, pois tanto num caso quanto no outro as relações geométricas permaneciam as mesmas (ibid., p. 6). Por outro lado, o *Livre de perspective* de Cousin, lida apenas com traçados geométricos e não faz menção a outros aspectos ligados à visão, tal como fez Barbaro (Cousin, 1560). Nesse sentido, é interessante o caso de *La perspective* de Salomon de Caus (1576-1626) que, além de tomar partido da teoria “recepcionista” da visão, tece algumas considerações sobre a anatomia do olho (principalmente no que se refere a sua forma) ligada ao alcance da visão. Segundo Caus, dependendo da profundidade do nervo óptico em relação à superfície do olho, o objeto visto poderia ser maior ou menor. Assim, cada pessoa perceberia o mesmo objeto com tamanhos diferentes. Essa seria uma das razões pela qual algumas pessoas precisariam usar óculos (Caus, 1611).¹⁹

Podemos dizer que, com o advento da perspectiva linear, as condições de observação deixaram de ser espontâneas, visto que o cone visual passava a requisitar apenas um único olho, imóvel e a uma distância fixa do observador. Além disso, a relação entre o olho e a coisa vista foi gradativamente substituída pela relação entre o olho e a representação. Esse descolamento implicou na separação de duas dimensões da óptica, tal como era conhecida naquela época: uma, que procurava resolver problemas da representação em perspectiva e, outra, que se ocupava dos estudos ligados ao funcionamento e às propriedades da visão.

Há vários casos exemplares que ilustram a separação entre essas duas expressões de óptica que mencionamos acima. Apresentamos, em

19 Além desses tratados, encontramos muitos outros como a *Perspectivae libri sex* de Guidobaldo Del Monte (1600), que traz várias considerações de natureza mais teórica ligada à perspectiva. Encontramos também tratados de arquitetura que fazem menção ou dedicam parte deles à teoria da perspectiva, tais como *La tres-noble perspective* de Jean Vedreman Frisius (1619) e *L'Architettura* de Pietrus Cataneus (1567), que dedica o oitavo livro à perspectiva linear. Vide, ainda, Dubreuil (1672), que traz interessantes considerações a respeito do raio e o cone visual e por que razões a perspectiva se baseia apenas em um só olho e não em dois; vide também, Moxon (1670) e Powell (1651), onde encontramos ainda alguns elementos relacionados à fisiologia e anatomia do olho; e Scheiner (1652) que ainda se dedica ao estudo do olho e à teoria da visão; vide ainda Aguilonius (1613), que segue ainda a ordem das matérias de um tratado de óptica medieval, porém, acrescenta outras questões de natureza mais matemática no final da obra; vide também Acquapendente (1600).

seguida, um destes casos, a fim de ilustrar dois modos diferentes de conceber a percepção do espaço, a saber, segundo a perspectiva geométrica de Euclides e a óptica de Giambattista della Porta (1535-1615).

A óptica e a geometria: reconsiderando os "postulados" da *perspectiva euclidiana*

Convém observar que o que é quantificado na perspectiva linear não é o espaço, mas a percepção deste. Tal como observou Barbaro, para a construção em perspectiva, não importava se a visão se dava por "emissão" de raios visuais ou "recepção" de simulacros, pois, na sua construção, bastaria apenas considerar o traçado do cone visual. Isso sugere que o cone e o véu foram os dois únicos aspectos que permaneceram em comum entre a *perspectiva naturalis* e a *perspectiva artificialis*. Porém, no que diz respeito ao cone, devemos sublinhar uma profunda modificação: a sua construção, segundo a *perspectiva artificialis*, não era mais resultado do olhar espontâneo.

Com efeito, um dos estudiosos no século XVI que constatou essa mudança foi Della Porta que, em seu tratado de óptica, *De refractione optices parte libri novem*, publicado em 1593, observou a artificialidade por trás da explicação matemática da visão. Della Porta sugeria que a geometria e a perspectiva linear eram recursos úteis para demonstrar as propriedades da visão. Elas, entretanto, não seriam apropriadas para explicar fisiologicamente o processo visual, na medida em que não esclareciam como as qualidades visíveis, tal como as cores dos corpos, eram comunicadas ao órgão da visão (Saito, 2008, pp. 100-105).

Della Porta, assim, dirigiu uma série de críticas a algumas proposições apresentadas por Euclides em seu tratado de óptica. Tais críticas, entretanto, não estavam relacionadas diretamente ao tratamento geométrico dado por Euclides ao processo visual, mas a sua interpretação da percepção visual, que desconsiderava aspectos ligados ao fenômeno da refração.

Convém aqui observar que estudos sobre o fenômeno da refração não eram nenhuma novidade no século XVI. No que diz respeito aos antigos, Ptolomeu (87-150), por exemplo, já tinha se referido ao assunto e estudiosos medievais, tais como Roberto Grosseteste (1175-1253), John

Pecham (ca. 1240-1292) e Roger Bacon, já estavam familiarizados com o fenômeno e tinham se proposto a explicá-lo (Grosseteste, 1985, pp. 40-41 e pp. 47-48; Pecham, 1970, p. 212-239).

Desse modo, em linhas gerais, o *De refractione* certamente não era um tratado de óptica diferente de outros. Mas, apesar de a obra cobrir um rol de assuntos, cujos princípios já tinham sido tratados por outros estudiosos, esse tratado trazia novas questões e formulações que não eram encontrados em estudos de óptica anteriores. O ponto central de *De refractione* repousava na busca da compreensão de ilusões ópticas e na formulação de uma regra que abarcasse o fenômeno.

Um dos pontos interessantes dessa obra é a explicação dada por Della Porta da apreensão dos objetos da visão. No quinto livro de *De refractione*, ao tratar dos “acidentes da visão”, Della Porta procurou mostrar que os vários fenômenos ligados à aparência maior ou menor das coisas observadas na natureza estavam relacionados à visão que ocorria, em parte direta e, em parte, refratada. Desse modo, ao contrário do que sustentava Euclides em seu tratado de óptica, não era o raio visual que estimava a grandeza e a distância das coisas, mas o olho e a sua configuração anatômico-fisiológica, que refratava nele os simulacros que provinham dos objetos da visão.

De acordo com Euclides (1996, p. 101), o raio visual estimava a grandeza e a distância das coisas segundo a abertura do ângulo visual. Desse modo:

- a) aquelas coisas que eram vistas sob ângulos iguais pareciam iguais;
- b) aquelas coisas que eram vistas sob ângulos maiores pareciam maiores; e
- c) aquelas coisas que eram vistas sob ângulos menores pareciam menores.

No que tange a esses “postulados”, Della Porta parece não aceitar que o tamanho das coisas estava relacionado com a amplitude do ângulo visual. A fim de ilustrarmos e tornar compreensível tal fato, apresentamos, a seguir, duas proposições em que Della Porta dirige críticas aos pressupostos geométricos apresentados na *Óptica* de Euclides.

Na primeira proposição do quinto livro de *De refractione*, Della Porta apresenta as razões geométricas pelas quais: “as coisas mais próximas são

percebidas maiores e as mais afastadas, menores” (Della Porta, 1593, p. 108). Para tanto, o estudioso napolitano apresentou inicialmente como Euclides teria tratado do assunto. Assim, segundo Della Porta, Euclides teria colocado o seguinte “axioma” para explicar porque razão as coisas que são próximas se apresentariam maiores do que aquelas que estavam distantes:

As coisas vistas sob um ângulo maior parecem maiores; assim demonstra [Euclides]. Seja B o olho, CD a linha movida para mais perto, mas KL, mais longe, paralela e igual com a primeira; a linha KL chegue até o olho B pelo traço KB e a linha CD, por CB [e] CD. Acontece que o ângulo SBD^[20] é maior do que KBL, por conseguinte, CD será visto maior do que a própria KL (...). (Ibid., tradução nossa)

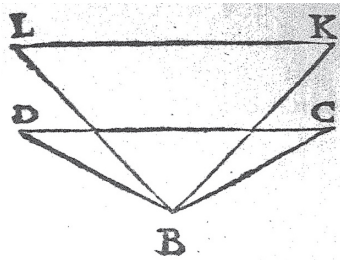


Figura 2

Fonte: Della Porta (1593, p. 108)

Ou seja, segundo Euclides, se for fixado o olho em B e dispostos dois segmentos CD e KL de mesmo tamanho, em lugares diferentes, de tal modo que CD esteja mais próximo do olho e KL mais distante, o segmento CD é percebido maior do que KL porque o ângulo visual CBD é maior do que KBL²¹. Assim, visto que o “postulado” IV afirma que “Que as coisas vistas sob ângulos maiores aparecem maiores; que aquelas vistas sob ângulos menores, menores; aquelas vistas sob ângulos iguais, iguais” (Euclides, 1996, p. 101), Euclides concluía que CD é visto maior do que KL.

Entretanto, Della Porta observa que a demonstração de Euclides se apoiava numa suposição que ele não acreditava ser verdadeira, pois:

20 Pela figura, CBD.

21 Vide teorema 2 e 5 em: Euclides (1996, pp. 105-107).

(...) se um objeto de vasto tamanho estiver fixado mais perto do olho, a maior parte dele o ocultará, porém, afastado um pouco mais [para] longe, [o olho] verá a parte mais larga [dele], pois, embora a espécie termine num cone, quanto mais a ponta do olho é estendida para mais longe, tanto mais os eixos laterais interceptam o tamanho mais largo. (Ibid., p. 108, tradução nossa)

Em outros termos, se um objeto visível de tamanho grande estiver muito próximo do olho, não seria possível vê-lo. Com base na Figura 2, apresentada por Della Porta em *De refractione*, seja CF o objeto que está próximo ao olho AB. Seja IO a abertura da pupila do olho AB e CIOF o cone visual formado pelo objeto CF, responsável pela visão do mesmo. Della Porta observa que o objeto CF não seria visto em sua totalidade porque a pupila só comportaria um cone de abertura dada por GH.

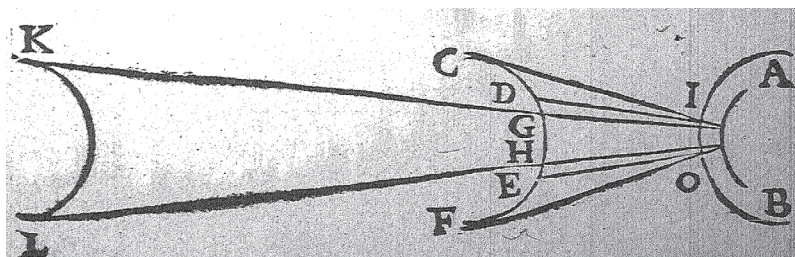


Figura 3

Fonte: Della Porta (1593, p. 108)

Mas, se o mesmo objeto CF fosse conduzido para mais longe, de modo a avançar continuamente até que o ângulo máximo do cone enchesse a pupila IO, a parte maior do próprio objeto seria visto como um todo em LK. Desse modo, Della Porta afirmava que a causa do aumento ou da diminuição do tamanho dos objetos, quando estes se aproximavam ou se afastavam do olho, deveria ser encontrada na refração e não na abertura maior ou menor do ângulo visual (ibid.). Assim, Della Porta prossegue, apresentando as razões geométricas, segundo os princípios da refração:

Seja AB o tamanho igual e de ambos os lados paralelos, e o ponto B vá ao encontro do olho no ponto E; a partir da doutrina do terceiro corolário da primeira proposição do nosso livro, seja encontrado o diâmetro IF; e porque a parte do círculo IE é a sexta [parte] de toda

a circunferência, a linha BE declinará até a extremidade do diâmetro F, EF seja estendida e vá ao encontro do cateto, do centro H do olho pelo ponto B, seja estendido o cateto até que se encontre com a linha FE no ponto G, por conseguinte, o ponto B refratado para G será visto muito remotamente. Porém, ocorrerá de outro modo com o ponto mais distante D, pois também o próprio se encontrará com o olho em O, o diâmetro encontrado será QR^[22], portanto, a linha DG perto de R^[23] será refratada e será OL, seja prolongada para mais longe em direção de M e seja levado o cateto do centro H por D até aquele lugar onde cruzará a linha de refração em M, enfim, o ponto D será visto em M mais perto da linha paralela BM do que do [ponto] G. Donde quanto mais os raios são inclinados vão ao encontro do olho, em qualquer lugar a partir da parte, tanto mais a linha de refração até que junte com o cateto, sairá para mais longe e a coisa vista atirar-se-á para mais longe: porque se fizeres a mesma coisa na outra parte, A para P, também C será visto em N. Por conseguinte, PQ^[24] é maior do que a própria MN. (Ibid., pp. 109-10, tradução nossa)

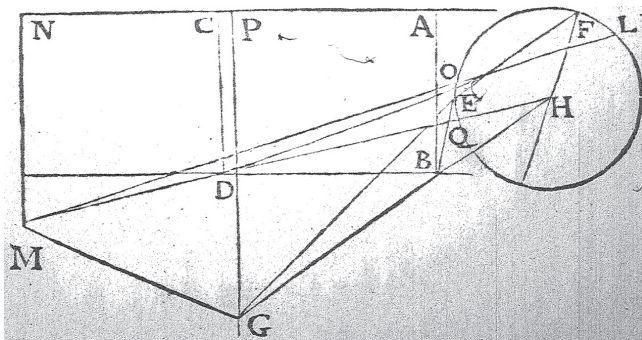


Figura 4

Fonte: Della Porta (1593, p. 109)

Sem entrarmos em pormenores a respeito dessa demonstração que, além de ser de difícil compreensão, requer conhecimento dos princípios e dos procedimentos da óptica que era praticada no século XVI, queremos apenas observar que Della Porta, por meio de traçados, tal como era comum realizar

22 Pela figura, QP

23 Pela figura, P

24 Isto é, PG.

em óptica para localizar as imagens de objetos através de meios refratores naquela época, procurou dar a razão geométrica e óptica do aumento de tamanho dos objetos quando estes se aproximavam do olho.²⁵

Seguindo a Figura 4, Della Porta procura mostrar que o segmento AB, próximo do olho LOQ é visto como se estivesse em PG por causa da refração do segmento AB no olho LOQ. Em outros termos, visto que o olho é um meio refrator, pois ele é formado de várias túnicas e de líquidos diferentes, o segmento AB seria refratado pela córnea e outras túnicas até atingir o cristalino.²⁶ Nesse sentido, o segmento AB teria a sua imagem formada em PG e ela seria maior em virtude do fenômeno da refração. Por outro lado, se o segmento AB fosse afastado até CD, portanto, para mais longe do olho, pela mesma razão anterior, a sua imagem seria formada em MN. Desse modo, comparando as duas imagens, traçando as linhas proporcionalmente, MN seria menor do que PQ.

Da mesma maneira, na proposição seguinte, Della Porta observa que duas retas paralelas, que estão em um plano, parecem se cruzar a uma grande distância. Aqui, novamente, criticando os “postulados” da *Óptica* de Euclides, Della Porta procura mostrar que isso ocorreria por causa do fenômeno da refração no olho.

Segundo Della Porta, Euclides teria provado da seguinte maneira:

Sejam AB [e] CD as linhas paralelas conduzidas de ambos os lados, E o olho e sejam três intervalos, GH, IF, BD, também paralelos, colocados entre elas, sejam puxadas das extremidades dos intervalos as linhas GE, HE, IE, FE, BE, DE para o olho, e o olho veja o intervalo GH com o ângulo GEH, e o ângulo IEF, o intervalo IF e com o ângulo BED, o intervalo DB. Porque o ângulo GEH é maior do que o ângulo IEF, porque contém dentro dele, assim como tudo com sua parte, GH será vista maior do que a própria IF e, do mesmo modo, IF do que a própria BD. (Ibid., pp. 110-111, tradução nossa)

25 Para detalhes a respeito da teoria de refração naquela época, vide Saito (2008, pp 72-89).

26 Sobre o mecanismo de funcionamento do olho naquela época, vide Saito (2008, pp. 89-122).

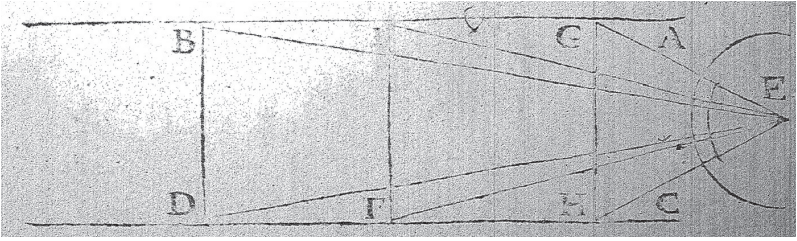


Figura 5

Fonte: Della Porta (1593, p. 110)

Por outras palavras, segundo Euclides, duas linhas retas AB e CD parecem se encontrar ao longe porque o ângulo visual diminui de amplitude à medida que as linhas retas se afastam do olho. Seguindo a Figura 5, Euclides afirmava que, dado o olho E e duas retas paralelas AB e CD, se a cada intervalo de AB e CD traçássemos pequenos segmentos GH, IF, BD, observaríamos que o ângulo visual diminuiria continuamente, isto é, teríamos o ângulo BED menor do que IEF que, por sua vez, seria menor do que o ângulo GEH e, assim, sucessivamente.²⁷ Isso significava que quanto maior fosse a distância, menor seria o ângulo visual formado e, assim, menor o objeto, de modo que, conseqüentemente, as duas linhas retas paralelas pareceriam se encontrar ao longe.

Em contrapartida, Della Porta propôs outra solução:

Mas nós assim resolvemos. As paralelas conduzidas de ambos os lados são GA [e] FB, ON o olho, para que o ponto K se volte diretamente ao olho; a linha RV muito perto chegará obliquamente até olho, mas, menos, e mais perto IL [e] MC a mais afastada. Seja VO o segmento inclinado da linha que se encontra com a pupila; será refratado para V, seja conduzido para X e seja levantado o cateto pelo centro do olho S e o ponto O da coisa vista e se reunirá com a linha visual OX em X. Por conseguinte, o ponto V será visto em X. Do mesmo modo, o ponto L para Y e o ponto X para Z e tendo sido conduzida a linha delgada pelos pontos XYZ, sempre será estreitada até tornar-se uma única com a linha FB e então a vista não é desviada mais amplamente, mas a pupila percebe, na verdade, tudo aquilo que é colocado em linha reta. Donde as linhas

²⁷ Vide teorema 6 em Euclides (1996, pp. 108-109).

iguais serão vistas se encontrarem de ambos os lados. Do mesmo modo, as linhas devem ser conduzidas para a esquerda. Assim, uma rua será vista larguíssima perto do olho e estreitíssima no fim MN, mas o espaço AB que vai para a extremidade da ponta nunca será visto se encontrar. (Ibid., p. 111, tradução nossa)

Seguindo os princípios da refração, Della Porta sugere que os segmentos RV, IL, MC, compreendidos entre as linhas paralelas definidas pelos segmentos MR e VC, tal como na figura abaixo, parecem se encontrar ao longe por causa da imagem dos mesmos que seriam formadas, sucessivamente em X, Y e Z. Ou seja, por causa do fenômeno da refração, o ponto V seria visto em X, o L em Y e C em Z. Desse modo, a imagem do segmento VC seria XZ. Pela mesma razão, os pontos R, I e M teriam suas imagens formadas da mesma maneira que V, L e C. Assim, por causa da refração, as linhas paralelas definidas por V, L, C e R, I, M, pareceriam se encontrar ao longe.

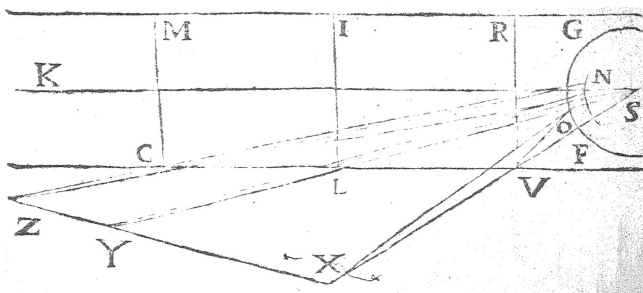


Figura 6

Fonte: Della Porta (1593, p. 111)

Do mesmo modo, nas proposições III e VI, Della Porta observa que Euclides estaria equivocado, em sua *Óptica*, ao demonstrar que “As linhas paralelas estando acima e abaixo do olho parecem se encontrar, entretanto, nunca se encontram” e que “As paralelas estendidas para baixo ou para cima parecem se encontrar”.²⁸ As outras 22 proposições do quinto livro de

28 A terceira proposição de *De refractione* (Della Porta, 1593, pp. 112-113) é uma variação da proposição II e refere-se ao teorema 8 da *Óptica* de Euclides (1996, p. 110). Na sexta proposição, Della Porta procura demonstrar geometricamente porque as paredes paralelas de um poço são mais largas no topo do que no fundo (Della Porta, 1593, pp. 115-117).

De *refractione*, igualmente, procuram criticar outras proposições da *Óptica* de Euclides, apresentando outras soluções considerando o fenômeno da refração. Essas considerações, que estavam alicerçadas em outra referência de *perspectiva*, sugerem que os princípios da óptica geométrica de Euclides teriam se deslocado para outra área de conhecimento, convertendo-se em técnicas de representação pictórica. Diferentemente do tratado de óptica de Della Porta, esses novos tratados de *perspectiva* seriam fundamentados na *Óptica* de Euclides, mobilizando, dessa maneira, dois quadros teóricos distintos para explicar a percepção do mesmo objeto da visão.

Considerações finais

A idéia de que a óptica é uma área de conhecimento estreitamente relacionada com a matemática é, decerto, verdadeira. Entretanto, devemos nos perguntar sobre a natureza dessa relação. As críticas arroladas por Della Porta às proposições da *Óptica* de Euclides apontam para a importância de reconsiderarmos alguns aspectos ligados à geometria, de modo a colocarmos questões mais pontuais a respeito da relação entre ela e a óptica. Como vimos, a experiência ocular, isto é, a percepção dos objetos da visão, podia estar fundamentada não só em uma óptica, tal como a de Della Porta, mas também na *perspectiva* euclidiana assimilada pela perspectiva linear, tal como naquela de Alberti e de Barbaro, por exemplo. Essas duas expressões de perspectiva (entenda-se óptica), que começaram a se separar a partir de finais do século XVI, influenciaram futuros desenvolvimentos, não só em diversos ramos da filosofia natural, mas também na matemática, abrindo espaço para novas discussões, não só a respeito da noção de espaço, mas também de sua percepção.

Especificamente, no que diz respeito à geometria, as discrepâncias entre a óptica euclidiana e a perspectiva linear mostram-nos que a construção em perspectiva, desenvolvida a partir do século XV, prescindiu dos mecanismos da visão e não se ocupou mais de reconstruir a visão binocular e a curvatura da imagem vista. Isso sugere um rompimento entre as teorias de visão e as teorias de representação que eram aceitas naquela época. Tal rompimento, entretanto, parece ter conduzido a novos desenvolvimentos na geometria, que passaria a se dedicar com mais ênfase às questões ligadas à representação.

A outra contraparte, entretanto, parece ter buscado harmonizar as teorias de visão e as de representação, agora alicerçadas sobre novas

bases. De fato, se considerarmos os desenvolvimentos da óptica a partir do século XVII, notaremos uma ênfase maior nos aspectos matemáticos ao tratar dos objetos de investigação da óptica. Entretanto, deve-se ressaltar que tal enfoque mais geométrico esteve ligado à redefinição do objeto da óptica, que deixou de ser uma ciência da visão e se transformou em uma ciência da luz.

Enfim, podemos dizer que a matemática, juntamente com outros ramos de conhecimento (notadamente a óptica neste estudo), passou por mudanças que alteraram não só os objetivos, mas também o domínio de seu objeto de investigação. O estudo das interfaces que a matemática estabeleceu (e que ainda estabelece em vários graus) com outras áreas do conhecimento pode lançar luz sobre a natureza dos objetos de investigação da matemática e, dessa maneira, contribuir para uma melhor articulação entre a matemática e seu ensino. A análise do processo histórico que conduziu à organização das várias áreas do saber, com as quais a matemática manteve e mantém relações, pode nos ajudar a compreender os vários modelos de conhecimento e a repensar o ensino de matemática em geral. O processo histórico da constituição do conhecimento matemático abre, assim, espaço para refletirmos sobre o objeto e as metas de investigação do ensino da matemática.

Referências

- ACQUAPENDENTE, H. F. de (1600). *De visione voce auditu*. Veneza, Franciscum Bolzettam.
- AGUILONIUS, F. (1613). *Francisci Aguilonii e Societate Iesu opti corum libri sex. Philosophis iuxtà ac Mathematicis utiles*. Antuérpia, Officina Plantiniana.
- ALBERTI, L. B. (1989). *Da pintura*. Trad. de A. da S. Mendonça. Campinas, Editora da Unicamp.
- ALHAZEN (1972). “Alhazen opticae”. In: LINDBERG, D. C. (org.). *Opticae thesaurus* Nova York/Londres, Johnson Reprint Corporation.
- BARBARO, D. (1569). *La pratica della prospettiva di monsignor Daniel Barbaro...: opera molto vtile a pittori, a scultori & ad architetti: con due tauole, vna de' capitoli principali, l'altra delle cose piu notabili contenute nella presente opera*. Veneza, Camillo & Rutilio Borgominieri Fratelli. Disponível em: <http://fermi.imss.fi.it/rd/bd>. Acesso em: 22 jun. 2006.

- BAXANDALL, M. (1988). *Painting and Experience in Fifteenth-Century Italy*. 2 ed. Oxford/Nova York, Oxford University Press.
- BERETTA, M. (2004). "From the Eye to the Eye-Glass. A Pre-History of Spectacles". In: BERETTA, M. (org.). *When Glass Matters: Studies in the History of Science and Art from Graeco-Roman Antiquity to Early Modern Era*. Florença, Leo S. Olschki.
- BULMER-THOMAS, I. (1981). "Euclid". In: GILLISPIE, C. C. (org.). *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York, Charles Scribner's Son.
- CABRERA, E. S. (1949). *Los elementos de Euclides como exponente del "milagro griego"*. *Ensayo sobre las relaciones de la matematica con la filosofia griegas*. Buenos Aires, Libreria del Colegio.
- CAMÊLO, M. H. (2005). *Leon Batista Alberti e a matematização do olhar*. Dissertação de Mestrado em História da Ciência. São Paulo, PEPG em História da Ciência, PUC- SP.
- CAMEROTA, F. (1998). "Misurare 'per prospettiva': Geometria pratica e Prospettiva Pingendi". In: SINISGALLI, R. (org.). *La prospettiva: Fondamenti teorici ed esperienze figurative dall'antichità al mondo moderno*. Florença, Edizioni Cadmo.
- (2004). Galileo's Eye: Linear Perspective and Visual Astronomy. *Galilaeana*, v. I, pp. 143-170.
- CATANEO, P. (1567). *L'Architettura di Pietro Cataneo Senese. Alla quale oltre all'essere stati dall'istesso Autore rivisti, meglio ordinati, e di diversi disegni, e discorsi arricchiti i primi quattro libri per l'aietro stampati sono aggiunti di piu il Quinto, Sesto, Settimo, e Ottavo libros. Nel quinto si tratta di quel che s'aspetta all'ornato per le fabbriche. Nel sesto si mostrano le buone qualità dell'acque per l'uso del vivere: e cosi similmente dell'acque de i bagni, con alcuni loro disegni. Nel settimo s'adducono quelle cose di Geometria, & degli elementi suoi, che piu all'Architetto faccino di bisogno: con un nuovo, & facil modo di pigliare in propria forma qualunche fabbrica, sito, o luogo. Nell'ottavo s'insegna a operar praticamente nelle cose di Prospettiva, cominciando da i primi principii, & elementi di quella*. Veneza, [s.l.].
- CAUS, S. de (1611). *La perspective avec la raison des ombres et miroirs. Par Salomon de Caus ingenieur du serenissime Prince de Galles, dedie a son altesse*. Londres/Bruxelas, Richard Field/J. Mommart.

- COUSIN, J. (1560). *Livre de perspective de Jehan Cousin, senenois, maistre painctre à Paris*. Paris, Jean le Royer. Disponível em <http://gallica.bnf.fr>. Acesso em: 22 jun. 2006.
- CROSBY, A. W. (1999). *A mensuração da realidade: a quantificação e a sociedade ocidental, 1250-1600*. Trad. de V. Ribeiro. São Paulo, Editora da Unesp.
- DEAR, P. (1995). *Discipline & Experience: The Mathematical Way in the Scientific Revolution*. Chicago/Londres, University of Chicago Press.
- DEBUS, A. G. (1996). *El hombre y la naturaleza en el Renacimiento*. México, Fondo de Cultura Económica.
- DEL MONTE, G. (1600). *Guidubaldi è Marchionibus Montis Perspectivae libri sex*. Pisa, Hieronymum Concordima.
- DELLA PORTA, G. (1593). *De refractione optices parte libri novem*. Nápoles, Io. Iacobum Carlinum & Antonio Pacem. Disponível em microforma digitalizada em Cesima/PUC-SP.
- DOCCI, M. e MAESTRI, R. (1986). Il rilevamento dell'correzioni ottiche e delle proporzioni in architettura. *Ricerche di Storia dell'Arte*, v. 27, pp. 36-47.
- DUBREUIL, J. (1672). *Perspective practical or a plain and easie method of true and lively representing all things to the eye at a distance, by the exact rules of art as landskips, towns, streets, palaces, churches, castles, fortifications, houses, gardens and walks, with their parts as walls, doors, windows, stairs, chimneys, chambers, and shops, with their ornaments and furniture, as beds, tables, chests, cupboards, couches, chairs, stools, and other moveables, regular or irregular, in several postures. Likewise for placing all sorts of figures with their several postures, situation and rules horizon, also a treatise of shadows natural by the sun, torch, candle, and lamp, very useful and necessary for all painters, engravers, architects...* Londres, H. Lloyd. Disponível em <http://gallica.fr>. Acesso em: 12 jan. 2007.
- DUPRÉ, S. (2003). The Dioptrics of Refractive Dials in the Sixteenth-Century. *Nuncius*, v. XVIII, n. 1, pp. 40-67.
- DÜRER, A. (1987). *Instituciones de Geometría*. Trad. de J. Y. Cabrera. México, Universidad Nacional Autónoma de México.

- EDGERTON, S. Y. ([s.d.]). "The Renaissance Development of the Scientific Illustration". In: SHIRLEY, J. W. e HOENIGER, F. D.. (orgs.). *Science and Arts in the Renaissance*. Washington/Londres/Toronto, Folger Books.
- EDGERTON JR., S. Y. (1975). *The Renaissance Rediscovery of Linear Perspective*. Nova York, Basic Books.
- (1991). *The heritage of Giotto's geometry: art and science on the eve of the scientific revolution*. Ithaca, Cornell University Press.
- ([s.d.]). "The Renaissance Development of the Scientific Illustration". In: SHIRLEY, J. W. e HOENIGER, F. D. (orgs.). *Science and Arts in the Renaissance*. Washington/Londres/Toronto, Folger Books.
- EUCLIDES. (1952). "Elements". In: EUCLIDES et alii. *Euclid. Archimedes. Apollonius of Perga. Nicomachus*. Chicago/Londres/Toronto, Encyclopaedia Britannica (Col. Great Books of the Western World, v. 11).
- (1996). *Ottica*. Trad. de F. Incardona. Roma, Di Renzo Editore.
- FRANGENBERG, T. (1986). The Image and the Moving Eye: Jean Pélerin (Viator) to Guidobaldo del Monte. *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*, v. 49, pp. 150-171.
- (1988). Egnatio Danti's Optics. Cinquecento Aristotelism and the Medieval Tradition. *Nuncius*, v. III, n. 1, pp. 3-38.
- (1991). Perspective Aristotelianism: three case-studies of Cinquecento visual theory. *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*, v. 54, pp. 150-158.
- (1992). The Angle of Vision: problems of perspectival representation in the fifteenth and sixteenth centuries". *Renaissance Studies*, v. 6, n. 1, pp. 1-45.
- (1993). Optical correction in sixteenth-century theory and practice. *Renaissance Studies*, v. 7, n. 2, pp. 205-228.
- GAGNÉ, J. (1969). "Du *Quadrivium* aux *Scientiae Mediae*". In: INSTITUTE D'ÉTUDE MIEVEAL. *Arts Liberaux et Philosophie au Moyen Age. Actes du IV^e Congrès International de Philosophie Médiévale*. Univ. de Montréal, 27/08-02/09, 1967, *Inst. d'Étude Medieval*. Montreal/Paris, J. Vrin.

- HAMOU, P. (1995). "Introduction". In: HAMOU, P. *La vision perspective (1435-1740): L'art et la science du regard, de la Renaissance à l'âge classique*. Paris, Payot & Rivages.
- INCARDONA, F. (1996). "Introdução". In: EUCLIDES, *Ottica*. Trad. de F. Incardona. Roma, Di Renzo Editore.
- GROSSETESTE, R. (1985). "Líneas, Ángulos y Figuras, o Refracción y Reflexión de Rayos". In: GROSSETESTE, R. *Optica*. Trad. de C. A. Lértora Mendoza. Buenos Aires, Ediciones Del Rey.
- JONES, A. (1994). Peripatetic and Euclidean Theories of the Visual Ray. *Physis*, v. XXXI, pp. 47-76.
- KEMP, M. (1990). *The Science of Art: Optical Themes in Western Art from Brunelleschi to Seurat*. New Haven/Londres, Yale University Press.
- LINDBERG, D. C. (1968). The Cause of Refraction in Medieval Optics. *The British Journal for the History of Science*, v. 4, n. 13, pp. 23-38.
- (1972). "Introduction to the Reprint Edition". In: LINDBERG, D. C. (org.). *Opticae thesaurus* Nova York/Londres, Johnson Reprint Corporation.
- (1975). *A Catalogue of Medieval and Renaissance Optical Manuscripts*. Toronto, The Pontifical Institute of Medieval Studies.
- (1976). *Theories of Vision from Al-Kindi to Kepler*. Chicago, The University of Chicago Press.
- MOXON, J. (1670). *Practical perspective, or, Perspective made easie teaching by the opticks, how to delineate all bodies, buildings, or landskip &c. by the catoptricks, how to delineate confused appearances, so as when seen in a mirror, or polliht body of any intended shape, the reflection shall shew a designe, by the dioptricks, how to draw parts of many figures into one, when seen through a glass or chrystal cut into many faces: usefull for all painters, engravers, architects &c, and all others that are any waies inclined to speculatory ingenuity*. Londres, Joseph Moxon. Disponível em microforma digitalizada em Cesima/PUC-SP.
- NASCIMENTO, C. A. R. do (1998). *De Tomás de Aquino a Galileu*. Campinas, Unicamp/IFCH. (Col. Trajetória, v. 2).
- PANOFSKY, E. (1999). *A perspectiva como forma simbólica*. Lisboa, Edições 70.

- PECHAM, J. (1970). *John Pecham and the Science of Optics: Perspectiva communis*. Trad. de D. C. Lindberg. Madison/Milwaukee/Londres, The University of Wisconsin Press.
- POWEL, T. (1651). *Elementa opticae nova, facili, 7c; compediosâ methodo explicata: cum schematibus aliquot I(ad pleniorum elucidationem) in calce annexis*. Londres, J. Grismond.
- RONCHI, V. (1991). *Optics: The Science of Vision*. Nova York, Dover.
- SABRA, A. I. (1989) "Introduction". In: Ibn Al-HAYTHAM. *The Optics of Ibn Al-Haytham. Books I-III: On Direct Vision*. Trad. de A. I. Sabra. Londres, The Warburg Institute/University of London, v. II.
- SAITO, F. (2008). *Instrumentos de magia e de ciência: a observação mediada em De telescopio segundo a perspectiva de Giambattista della Porta*. Tese de doutorado em História da Ciência, São Paulo, PEPG em História da Ciência, PUC-SP.
- SALVEMINI, F. (1990). *La visione e il suo doppio: La prospettiva tra arte e scienza*. Roma/Bari, Laterza.
- SCHEINER, C. (1652). *Oculus, hoc est: Fundamentum opticum in quo ex accurata oculi anatome, abstrusarum experientiarum sedula peruestigatione, ex invisibilibus specierum visibilium tam inverso quam erecto situ spectaculis, nec non soliditatis rationum momentis, radius visualis eruitur; sua visioni in oculo sedes decernitur; anguli visorii ingenium aperitur; difficultates veteres, novae, innumerae expediuntur, abstrusa, obscura, curioso plurima inmedium proferuntur; plura depromendi occasio harum rerum studiosis datur; opus multorum votis diu expetitu; philosophis omnibus, praesertim qui naturae vim in medicina, physica aut mathesis addiscenda rimantur, neque inutile neque ingratum, imo necessarium futurum*. Londres, J. Flesher. Disponível em microforma digitalizada em Cesima/PUC-SP.
- SIMON, G. (1988). *Le regard, l'être et l'apparence dans l'optique de l'antiquité*. Paris, Seuil.
- (1994). La notion de rayon visuel et ses conséquences sur l'optique géométrique grecque. *Physis*, v. XXXI, pp. 77-112.
- (2003). *Archéologie de la vision: l'optique, le corps, la peinture*. Paris, Seuil.
- SPINOSA, G. (1997). Visione sensibile e intellettuale: convergenze gnoseologiche e linguistiche nella semantica della visione medievale. *Micrologus: Natura, scienze e società*, v. V, pp. 119-134.

- VEDREMAN FRISIUS, J. (1619). *La tres-noble perspective. A sçavoir, la theorie pratique et instruction fondamentale d'icelle: illustree de plusieurs belles ordonances d'Architecture, comme de Temples, Palais, Galeries, Iardins, Marchez et Rues à l'antique ou moderne clairement expliquee par descriptions, fort utiles pour tous Architectes, Ingenieurs & tous Amateurs des arts: Inventee par Iean Vredeman Frison, & de nouveau augmentee & corrigee par Samuel Marolois*. Amsterdam, Jean [...].
- VELTMAN, K. H. (1980). "Panofsky's Perspective: a Half Century Later". In: EMILIANI, M. D. (org.). *Atti del convegno internazionale di studi: la prospettiva rinascimentale, Milan 1977*. Florença, Centro Di.
- (1986). Perspective, Anamorphosis and Vision. *Marburger Jahrbuch*, v. 21, pp. 93-117.
- VESCOVINI, G. F. (1997). Vision et réalité dans la perspective au XIVe siècle. *Micrologus: Natura, scienze e società*, v. V, pp. 161-180.

Recebido em nov./2008; aprovado em dez./2008