Os conceitos de divisão e multiplicação nas proposições de ensino elaboradas por Davydov e seus colaboradores[1]

The concept of division and multiplication in the propositions of teaching by Davidov and his co-workers

JOSÉLIA EUZÉBIO DA ROSA[2]
ADEMIR DAMAZIO[3]
SANDRA CRESTANI[4]

Resumo

Este artigo consiste na análise do movimento conceitual adotado por Davydov e seus colaboradores ao proporem o ensino do conceito de multiplicação e divisão no segundo ano do Ensino Fundamental. Os dados foram coletados nos livros didáticos e livros de orientações aos professores publicados pelo mencionado grupo. As significações conceituais são reveladas durante o desenvolvimento das tarefas. A introdução do conceito de divisão e multiplicação em Davydov ocorre a partir da reta numérica. Durante o processo de análise das proposições davydovianas, constatamos que os conceitos de multiplicação e divisão estão fortemente fundamentados, cientificamente, nas propriedades fundamentais da matemática.
Palavras-chave: *Davydov; divisão; multiplicação.*

Abstract

This article presents an analysis of the conceptual movement adopted by Davydov and his co-workers when they have purposed the teaching of multiplication and division concepts in the second grade of Elementary School. The data has been collected in textbooks and guidance to teachers published by the group mentioned before. Conceptual significances are revealed during the development of tasks. The introduction of multiplication and division concepts is performed from the geometric representation that is fundamental in Mathematics, the number line. By the analysis of Davydov's propositions, it was observed that multiplication and division concepts are strongly based scientifically in the Mathematics properties.
Keywords: *Davydov; Division; multiplication.*

[1] A investigação que gerou este artigo faz parte de um projeto maior desenvolvido por integrantes de dois grupos de pesquisa, o GPEMAHC (Grupo de Pesquisa em Educação Matemática: uma Abordagem Histórico-Cultural) e o GEPAPe (Grupo de Estudos e Pesquisa Sobre Atividades Pedagógicas).

[2] Doutora em Educação pela Universidade Federal do Paraná - UFPR. Professora do programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Sul de Santa Catarina - UNISUL, e-mail: joselia.rosa@unisul.br.

[3] Doutor em Educação pela Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC. Professor da Universidade do Extremo Sul Catarinense - UNESC, e-mail: add@unesc.net.

[4] Mestranda em Educação UNISUL - Tubarão, e-mail: sandra_crestani@hotmail.com.

Introdução

No presente artigo apresentamos os resultados de uma investigação sobre as proposições elaboradas por Davydov (Давыдов) e seus colaboradores, tais como Gorbov (Горбов), Mikulina (Микулина) e Savieliev (Савельева) para o ensino dos conceitos de divisão e multiplicação em suas primeiras manifestações conceituais.

Davydov, seguidor de Vygotski, coordenou, na Rússia, o processo de elaboração e desenvolvimento de uma proposta para o ensino de Matemática com base na Teoria Histórico-Cultural. Tal proposta consiste em uma expressão fiel dos fundamentos da filosofia marxista e da psicologia vygotskiana (ROSA, 2012; MADEIRA, 2012; ROSA, DAMAZIO, ALVES, 2013; CRESTANI, 2013; DORIGON, 2013; MATOS, 2013; SILVEIRA, 2013).

As proposições davydovianas foram elaboradas, desenvolvidas em sala de aula, reelaboradas e publicadas por meio de livros didáticos e de orientações ao professor. Esse processo foi coordenado por Davydov durante vinte e cinco anos. Com sua morte, em 1998, os seguidores deram continuidade ao trabalho iniciado por ele. Atualmente, os livros didáticos e de orientação ao professor são reelaborados anualmente, com base em novos resultados de investigação.

Na especificidade da presente pesquisa, de natureza teórica, os dados foram extraídos do livro didático de Matemática desenvolvido por Davydov e seus colaboradores para o 2º ano do Ensino Fundamental (ДАВЫДОВ *et al.* 2012), além do livro de orientação ao professor para utilização do referido livro didático (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Essas duas obras constituem a fonte de dados referentes às proposições davydovianas. Ambas escritas originalmente em russo e apenas a segunda foi traduzido para a Língua Portuguesa por Elvira Kim (professora de Língua Russa do Centro de Línguas e Interculturalidade da Universidade Federal do Paraná). Nosso objetivo consistiu em investigar o movimento conceitual adotado por Davydov e seus colaboradores ao proporem o ensino do conceito de multiplicação e divisão dos números naturais no segundo ano do Ensino Fundamental.

O livro didático davydoviano é organizado por meio de tarefas correspondentes aos exercícios ou atividades no ensino brasileiro. No livro de orientação ao professor, por sua vez, são apresentadas as orientações teórico-metodológicas para o processo de desenvolvimento das tarefas em sala de aula.

Entre as tarefas apresentadas, selecionamos aquelas que dão ideia da totalidade das proposições davydovianas para o processo de introdução aos conceitos de multiplicação e divisão no segundo ano do Ensino Fundamental. Para o processo de apresentação dos dados, adotamos o princípio de explicação (VIGOTSKI, 2000) em detrimento da descrição. Deste modo, em vez de descrever cada tarefa, elas são explicadas com base no livro de orientações ao professor.

Durante a análise, estabelecemos um diálogo com os Fundamentos da Matemática, referentes ao conceito de divisão e multiplicação (CARAÇA, 2002, BÉZOUT, 1849) e com os Fundamentos Lógicos, Psicológicos e Didáticos (DAVYDOV, 1982; DAVÍDOV E SLOBÓDCHIKOV, 1991; DAVÍDOV, 1987 e DAVYDOV, 1998).

As questões que nortearam o processo de análise foram: qual o ponto de partida das proposições davydovianas para introdução dos conceitos de multiplicação e divisão? Os campos aritméticos, algébricos e geométricos são contemplados? Os conceitos de multiplicação e divisão são apresentados de modo inter-relacionado? A relação inversa entre a multiplicação e a divisão é considerada? Qual é o elo que interconecta esses dois conceitos? Quais significações científicas são consideradas?

De acordo com Davydov (1982), faz-se necessário antecipar o ensino dos conceitos científicos para os primeiros anos do Ensino Fundamental. O autor em referência defende a formação nas crianças, desde os primeiros anos escolares, do pensamento teórico por meio da apropriação dos conhecimentos científicos. Além disso, alerta que a educação escolar atual não acompanha o desenvolvimento científico contemporâneo. Nas escolas não se tem dado a devida importância à apropriação, pelos estudantes, do conhecimento científico sistematizado e, consequentemente, não há formação humana adequada para suprir as necessidades requeridas pelo atual estágio de desenvolvimento atingido pela humanidade.

Com base nesses e em outros princípios, as proposições davydovianas foram elaboradas. Vale antecipar que no processo de análise, explicitaremos que a introdução do conceito de divisão e multiplicação, em Davydov, é realizada a partir de uma representação fundamental do conceito de número, a reta numérica. É nesse contexto matemático, que as tarefas revelam o movimento interno e as relações entre os conceitos de divisão e multiplicação.

A seguir, procedemos à análise das sete tarefas davydovianas referentes à introdução da operacionalização dos referidos conceitos matemáticos, objeto do presente estudo.

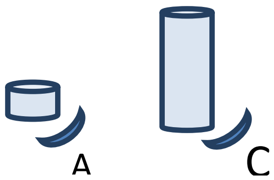
TAREFA 1: O professor apresenta dois recipientes de mesma forma e tamanho, um com líquido (volume K) e outro vazio (figura 1). Ambos estão sobre duas mesas distantes uma da outra. A tarefa consiste em transferir o líquido de um recipiente ao outro (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Figura 1: Recipientes.

Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

Para realização da tarefa, são apresentados outros dois recipientes vazios (Figura 2). Estes são de mesma forma que os anteriores, porém menores e com capacidades distintas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Figura 2: Unidades de medidas básica e intermediária



Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

O professor relata aos estudantes que uma criança, ao fazer a transferência do líquido, utilizou o recipiente de volume A e precisou repetir o procedimento por 24 vezes. Enquanto expõe, faz o seguinte registro no quadro (figura 3):

Figura 3: Representação das unidades básicas no esquema.

Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

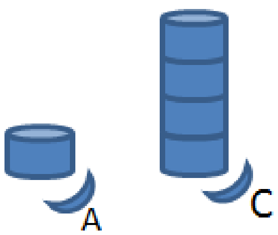
O esquema (Figura 3) representa o movimento da transferência de líquido e possibilita a conclusão acerca de sua medida, ou seja, o volume A cabe 24 vezes no volume K. Mas é mesmo necessário repetir por 24 vezes o movimento de transferência até atingir todo o líquido? Ou existe outro modo de desenvolver a mesma tarefa mais rapidamente? Cabe ao professor direcionar as discussões para a conclusão de que a utilização de um recipiente de volume maior facilita o processo de transferência e, consequentemente, de medição (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

A tarefa prevê que os dois recipientes menores (volumes A e C) sejam tomados como unidade para medir o volume de medida K. Consideradas, respectivamente, de unidade de medida básica e intermediária. A partir disso, o professor apresenta o seguinte questionamento: quantas unidades de medidas intermediárias cabem no volume K? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

A tarefa não explicita a quantidade de vezes que será necessário fazer a transferência do líquido com a unidade de medida intermediária. O professor inicia um diálogo com as crianças por meio de questionamentos e as instiga na busca por soluções. Se nenhuma criança apresentar a solução correta, o professor sugere encontrá-la a partir da comparação entre os volumes A e C (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

A relação quantitativa entre as duas unidades de medida possibilita a resolução da tarefa no plano teórico, ou seja, não será necessária a transferência de líquido novamente. Surge, então, um novo questionamento: quantas vezes o volume da unidade de medida básica (A) cabe na unidade de medida intermediária (C)? O professor solicita ajuda aos estudantes que realizem o procedimento, constatando que, no volume C (Figura 4), cabe quatro vezes o volume A (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Figura 4: Relação quantitativa entre as unidades básica e intermediária.

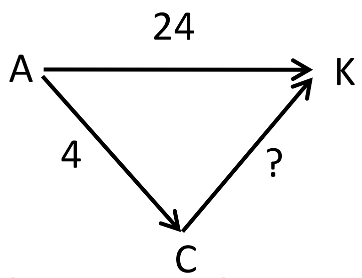


Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

A constatação de que o volume de medida C é igual a quatro vezes o volume de medida A (C = 4A) possibilita a determinação da relação quantitativa entre os volumes K e C. E agora, quantas vezes o volume de medida C cabe no volume de medida K? Sabe-se o total de medidas básicas (24A) e o valor da medida intermediária (4A). Mas, como determinar a quantidade de medidas intermediárias que compõem o volume K?

A partir do esquema inicial (Figura 3), que representava a quantidade de medidas básicas, o professor traça uma seta da esquerda para baixo, e coloca o número 4 (Figura 5), que representa o valor da medida intermediária. Na sequência, acrescenta uma seta à esquerda do esquema, e escreve um ponto de interrogação, que representa o valor desconhecido, referente ao total de medidas intermediárias (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

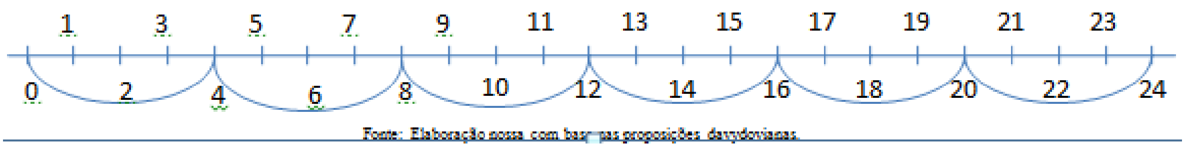
Figura 5: Operação de divisão no esquema.



Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

Novamente o professor questiona: quantas medidas C serão colocadas no recipiente para concluirmos a medida do volume de líquido K? As crianças expressam suas opiniões e o professor sugere representar esse movimento operacional na reta numérica, conforme a figura 6 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Figura 6: Tarefa 1 – Operação de divisão na reta numérica



Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

No procedimento com a reta, a questão norteadora das reflexões será em relação ao total de medidas intermediárias. Como o valor de cada medida intermediária é *quatro* (4) unidades básicas, os agrupamentos (delimitados pelos arcos) serão compostos, na reta, por quatro unidades cada, até atingir o total de 24 unidades de medidas básicas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Em seguida, verifica-se a quantidade de arcos que se formaram. A conclusão a ser obtida é que são 24 unidades básicas ao todo, agrupadas de quatro em quatro, por seis vezes (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

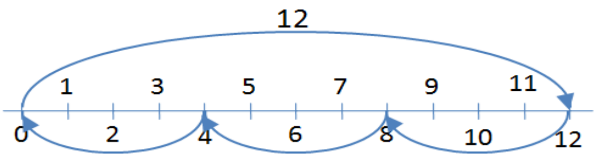
Deste modo, a tarefa é resolvida, teoricamente, na reta numérica. Este foi o contexto que possibilitou a determinação de quantas medidas intermediárias (6) havia no total de medidas básicas (24). Para finalizar, o professor informa que o procedimento de determinar a quantidade de unidades de medidas intermediárias chama-se divisão. Dividiram-se *vinte e quatro* (24) por *quatro* (4), obteve-se *seis* (6) como resultado, ou seja, 24 ÷ 4 = 6 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Na tarefa em análise, o conceito de divisão é introduzido por meio de situações que possibilitam a revelação de seu conteúdo, por conseguinte, não há apresentação por meio de definições formais, pois, para Davydov (1982), se os conceitos forem restritos a algumas definições verbais, haverá limitações no processo de apropriação dos mesmos. Tal atitude é insuficiente e insatisfatória à luz dos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, pois atende somente às exigências formais da própria definição, em vez de seu conteúdo teórico, pois possibilita apenas uma vaga ideia sobre o conceito em estudo. De acordo com Kopnin (1960, p. 321), "[...] se a profunda análise da essência dos fenômenos é substituída por magras definições, estas deixam de ser um meio para o conhecimento da realidade".

A abordagem proposta por Davydov e seus colaboradores se diferencia das proposições brasileiras, neste aspecto, pelo fato de que as definições são reproduzidas pelas crianças em seus detalhes essenciais durante o desenvolvimento das tarefas. Não há apresentação de sua forma pronta. Estas são ponto de chegada, em Davydov, apesar de ser o verdadeiro ponto de partida, mas não em forma de síntese. O desenvolvimento das tarefas davydovianas possibilita a revelação dos aspectos internos do conceito em nível teórico.

TAREFA 2: O professor propõe aos estudantes que efetuem, na reta numérica (Figura 7), a operação 12 ÷ 4 =____ (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

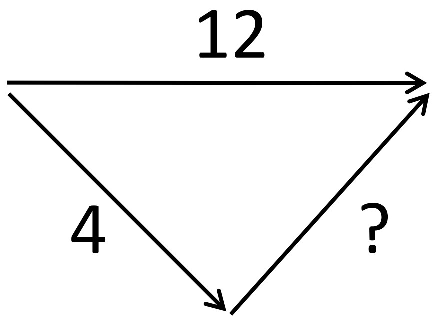
Figura 7: Operação da divisão na reta numérica.



Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

O procedimento na reta (Figura 7) foi realizado a partir do produto (12), seguido de arcos compostos por quatro unidades cada, até atingir o número zero. O professor apresenta o esquema (Figura 8) com um valor desconhecido para ser determinado (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

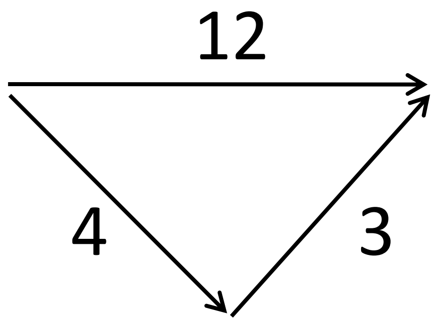
Figura 8: Operação da divisão no esquema.



Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

O esquema representa o seguinte questionamento: quantas unidades de medidas intermediárias (compostas por quatro unidades básicas) existem em doze unidades de medidas básicas? Com base no procedimento realizado na reta numérica, é possível concluir que são *três* (3) medidas intermediárias que compõe o todo (12), ou seja, quatro cabe três vezes em doze. A tarefa é concluída com o registro no esquema, conforme figura 9 (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Figura 9: Resultado da operação de divisão no esquema.

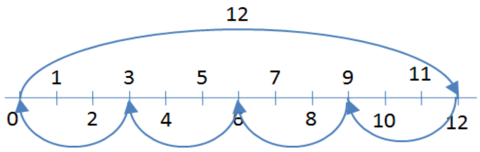


Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

Em Davydov (1982), é indispensável que os fundamentos dos conhecimentos científicos sejam contemplados desde os anos iniciais, por meio de tarefas que possibilitem o desenvolvimento do pensamento teórico. Cabe ao professor organizar, dirigir e criar as condições para o desenvolvimento da capacidade de pensar, dos estudantes, no plano teórico (DAVÍDOV, 1987). Isso significa que a divisão empírica de 12 objetos (balas, bolas, dedos, traços...) por quatro, como comumente é realizada no ensino brasileiro, é insuficiente.

TAREFA 3: O professor disponibiliza algumas retas para que as crianças realizem as seguintes operações: 12 ÷ 3; 18 ÷ 3; 12 ÷ 4; 16 ÷ 4. Para a primeira operação (12 ÷ 3) temos a seguinte representação na reta numérica (Figura 10):

Figura 10: Operação da divisão 12 ÷ 3 na reta numérica



Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

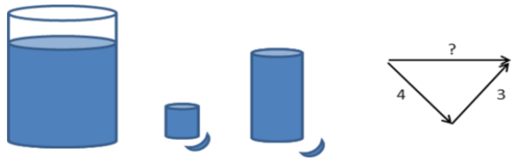
Como *doze* (12) é o total de medidas básicas, foram marcadas 12 unidades de medidas na reta. A partir do ponto da reta representado pelo número doze, formaram-se agrupamentos compostos por três (3) unidades básicas cada, até atingir o ponto referente ao número zero. Os agrupamentos, unidades de medida intermediária, são representados por meio de arcos. O resultado da divisão, o quociente, será *quatro* (4). Portanto, nas 12 unidades de medidas básicas foram formadas *quatro* (4) unidades de medidas intermediárias (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009). Do mesmo modo se procede com as demais operações apresentadas na tarefa. Ao dividir o dividendo pelo divisor, o objetivo é determinar quantas vezes o divisor cabe no dividendo. Conforme Bézout (1849, p. 45):

> Repartir ou dividir um número por outro, não é outra coisa mais do que buscar quantas vezes o primeiro deles contém o segundo; e a operação com que se busca chama-se [...] divisão. Assim, repartir 12 por 4 é o mesmo que buscar em 12 quantas vezes há 4, que será três vezes.
> O número que se toma para se dividir chama-se dividendo [...]; o número pelo qual se divide, chama-se divisor [...]; e o número que mostra quantas vezes o dividendo contém o divisor, chama-se quociente.

A operação da divisão, nas tarefas davydovianas, é realizada a partir de uma representação geométrica fundamental em Matemática, a reta numérica. Assim, o quociente é determinado a partir da inter-relação entre as significações aritméticas e geométricas, e propicia a revelação do conceito científico de divisão mencionado por Bézout (1849).

TAREFA 4: O professor apresenta alguns recipientes com líquido e um esquema abstrato (Figura 11). Sugere, então, que as crianças estabeleçam relações entre a representação objetal (na especificidade da presente tarefa, por meio de líquidos) e a representação abstrata (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Figura 11: recipientes com líquido e esquema.

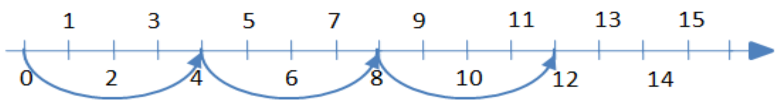


Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

A partir da análise, os estudantes deverão concluir, com a orientação do professor, que há *quatro* (4) medidas básicas (unidade de medida menor) em uma unidade de medida intermediária, e esta cabe *três* (3) vezes no total de medidas básicas colocadas no recipiente maior. A questão norteadora para continuidade do desenvolvimento da tarefa é: qual o total de unidades de medida básicas do recipiente maior? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Para a resolução, o professor sugere a utilização da reta numérica (Figura 12). Contudo, antes que os agrupamentos de medidas intermediárias sejam representados na reta, os estudantes são questionados por onde iniciar o registro dos arcos. Esta pergunta é relevante para que eles reflitam sobre o movimento inverso inerente ao processo de desenvolvimento da tarefa, quando comparado com as tarefas anteriores. Desta forma, envolve a operação inversa da divisão, a multiplicação e, por se tratar de operações inversas, o movimento, pela reta numérica, também é inverso.

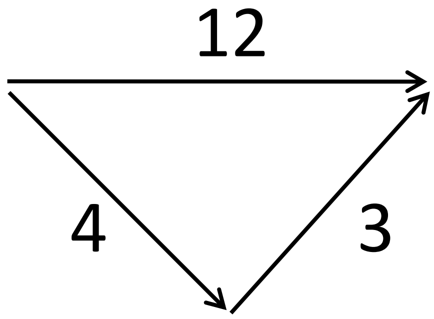
Figura 12: Operação da multiplicação na reta numérica.



Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

Foram formados, na reta numérica (figura 12), agrupamentos compostos por *quatro* (4) unidades básicas, representados pelos arcos. Estes se repetem por *três* (3) vezes, a partir do número zero. O ponto de partida para a operação de multiplicação foi o *zero* (0), porque o valor do todo, que na operação da divisão era ponto de partida, agora é desconhecido. Após a realização do procedimento na reta numérica, as crianças completam o número *doze* (12) no esquema (Figura 13) - total de unidades de medidas básicas (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Figura 13: Resultado da operação da multiplicação no esquema.



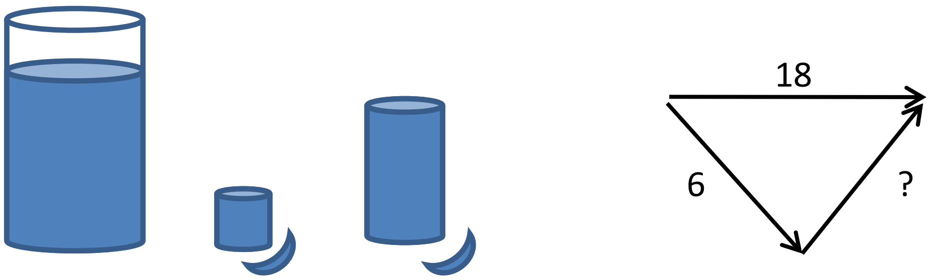
Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

Para finalizar, o professor informa que, o valor desconhecido, refere-se à quantidade de medidas básicas, ou seja, o *produto*. E, também, que a operação pela qual se determina o produto é a *multiplicação* (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Deste modo, o movimento interno entre as operações de divisão e multiplicação é revelado. Vale ressaltar que o conceito de multiplicação já havia sido objeto de estudo nas tarefas precedentes do livro didático davydoviano. A análise, no presente artigo, incide nas relações entre ambas. Aos leitores interessados na introdução do conceito de multiplicação em Davydov, indicamos a dissertação de mestrado desenvolvida por Madeira (2012).

TAREFA 5: Por meio do esquema (Figura 14), as crianças deverão determinar o valor desconhecido relativo ao total de medidas intermediárias. Sabe-se, a partir do esquema, que são *dezoito* (18) unidades de medidas básicas e *seis* (6) unidades de medida intermediária (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

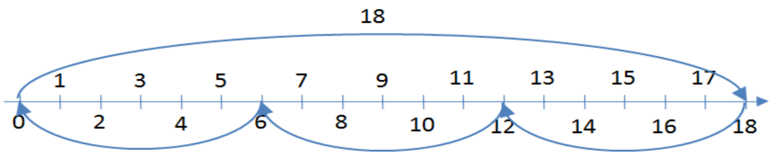
Figura 14: Representação do volume no esquema.



Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

Na tarefa anterior, tínhamos a unidade de medida intermediária e a quantidade de vezes que esta se repetia. Os estudantes deveriam determinar o total de unidades de medidas básicas, ou seja, o produto (resultado da operação 4 x 3 = 12). Na presente tarefa, o movimento é inverso. São apresentados o total de medidas básicas e a medida intermediária. A questão norteadora para o desenvolvimento da tarefa é: quantas vezes a medida intermediária cabe no total de medidas básicas (volume maior de líquido)? Ou seja, qual é o valor do quociente? Por meio da reta numérica (Figura 15) é possível determinar o valor desconhecido (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009):

Figura 15: Operação da divisão na reta numérica.

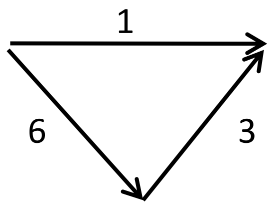


Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

Na reta, foram compostos grupos de *seis* (6) unidades. Como o valor do todo é conhecido, este, na representação geométrica da operação, constitui o ponto de partida. Portanto, o início do processo na reta numérica é o número *dezoito* (18) em direção ao *zero*. A constatação é de que havia *três* (3) unidades de medidas intermediárias em *dezoito* (18) unidades de medida básica (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

A tarefa é finalizada com o registro do resultado obtido no esquema (Figura 16), logo, com o registro do valor *três* (3), que representa o total de unidades de medidas intermediárias ou quociente (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

Figura 16: Resultado da operação da divisão no esquema.



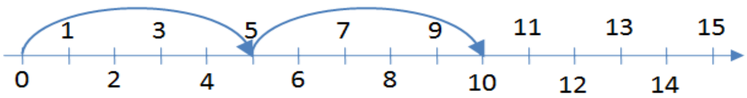
Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

Asseveramos que as tarefas em análise são complexas e as crianças não conseguiriam resolvê-las. Entretanto, vale ressaltar que, nas tarefas davydovianas, o professor orienta cada ação dos estudantes. Assim, ele "é o agente de integração social, é responsável pela aprendizagem dos conceitos científicos" dos seus estudantes (ROSA, 2006, p. 27), além de organizador e o orientador durante a execução das tarefas (ROSA, 2012). É importante salientar que as pesquisas desenvolvidas por Davydov e seus colaboradores, durante vinte e cinco anos, creditam a possibilidade de desenvolvimento das tarefas por parte dos estudantes com orientação do professor (DAVYDOV, 1982).

TAREFA 6: Nos registros 5 x 2 e 8 ÷ 2, é para determinar o produto ou quociente? (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).

No registro 5 x 2, o número *cinco* (5) representa a medida intermediária e o número *dois* (2), quantas vezes a medida intermediária se repete. Na reta numérica (Figura 17), as crianças deverão agrupar as unidades básicas, de cinco em cinco, por meio dos arcos. Assim, serão formados *dois* (2) agrupamentos (arcos). O procedimento é iniciado a partir do ponto zero na reta. O ponto de chegada do último arco representa o valor total de unidades de medidas básicas, ou seja, o produto. Deste modo, 5 x 2 = 10:

Figura 17: Operação da multiplicação na reta numérica.

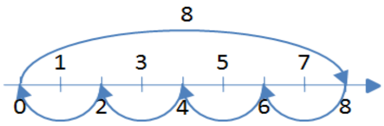


Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

E o registro 8 ÷ 2, permite determinar o produto ou quociente? O número *oito* (8) representa o total de unidades de medidas básicas, e o número *dois* (2), o valor da medida intermediária. As crianças deverão concluir, com orientação do professor, que conhecem o valor do todo, e sendo necessário encontrar uma das partes, o quociente. O professor também propõe o desenvolvimento da tarefa na reta numérica, a partir da seguinte questão norteadora: quantas vezes *dois* (2) cabem em *oito* (8)?

Como o valor *oito* (8) representa o total de unidades de medidas básicas (todo), serão formados, a partir do número oito, agrupamentos (unidade de medida intermediária) compostos por *duas* (2) unidades básicas, até atingir o ponto da reta referente ao número zero (Figura 18):

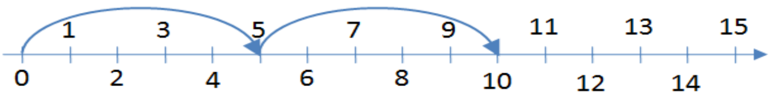
Figura 18: Operação da divisão na reta numérica.



Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

A constatação, a partir do procedimento desenvolvido na reta numérica, será que a unidade de medida intermediária *dois* (2) cabe *quatro* (4) vezes nas *oito* (8) unidades de medidas básicas. A operação a ser realizada para determinar o valor desconhecido é a divisão, cujo resultado é o quociente (ГОРБОВ, МИКУЛИНА e САВЕЛЬЕВА, 2009).
A tarefa tem como finalidade, a sistematização do conceito de divisão e multiplicação e a inter-relação entre ambos. A evidência é para o significado do conceito de divisão como operação inversa da multiplicação e suas representações.
As tarefas propostas por Davydov e seus colaboradores permitem a constatação, a partir das significações geométricas, que multiplicação e divisão apresentam um movimento interno inverso entre si. Por exemplo, no primeiro registro da tarefa (5 x 2), é a unidade de medida intermediária (*cinco*) que se repete duas vezes, no movimento orientado da esquerda para a direita, até atingir o número 10 na reta numérica (5 x 2 = 10), figura 19:

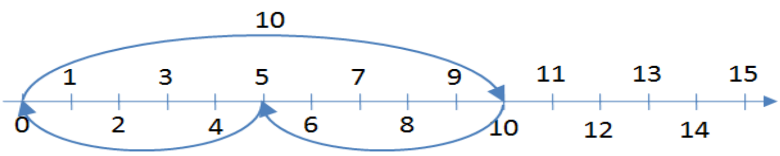
Figura 19: Operação da multiplicação na reta numérica.



Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

O movimento inverso ocorre na operação de divisão de *dez* (10) por *cinco* (5). O todo (10) é conhecido e, a partir deste, são formados agrupamentos compostos por *cinco* (5) unidades básicas cada, até atingir o número zero. O resultado será dois agrupamentos, ou seja: 10 ÷ 5 = 2 (Figura 20):

Figura 20: Operação da divisão na reta numérica.

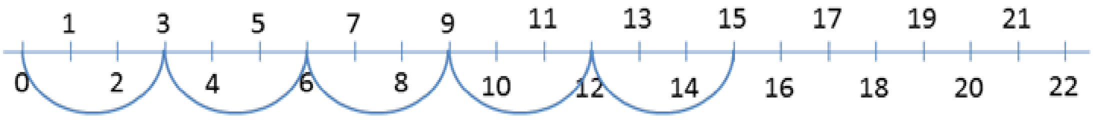


Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

Em síntese, na operação de multiplicação, os agrupamentos são formados a partir do ponto *zero* (0) em direção ao total, em outras palavras, o produto. Na divisão ocorre o inverso: os agrupamentos iniciam do total de unidades de medidas básicas (produto) em direção ao ponto *zero* (0). Esta última possibilita a determinação da quantidade de unidades de medidas intermediárias, o quociente.

TAREFA 7: O professor expõe uma reta numérica (Figura 21) e questiona as crianças sobre qual operação foi realizada.

Figura 21: Operação da multiplicação e divisão na reta numérica

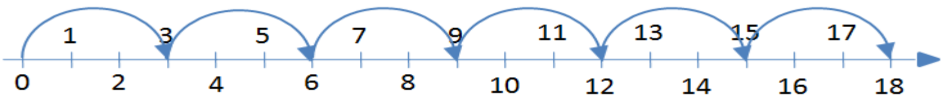


Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas.

Para a finalização da tarefa, o professor faz dois registros no quadro e solicita que as crianças completem, conforme segue: 3 x 5 = 15 e 15 ÷ 3 = 5. Deste modo, conclui-se que a operação poderia ser, tanto de multiplicação, quanto de divisão. Mas, por que isso ocorre? A conclusão, após as reflexões com base na reta numérica, é de que, em ambos os casos, trata-se da mesma quantidade de unidades de medidas básicas e intermediárias.

Por outro lado, a maioria das proposições brasileiras não contempla o movimento que inter-relaciona as operações de multiplicação e divisão. Geralmente, a operação 6 x 3 é representada do seguinte modo: 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18. Ou seja, *seis* (6) vezes o número *três* (3), significando que o *três* (3) repete-se por *seis* (6) vezes (figura 22):

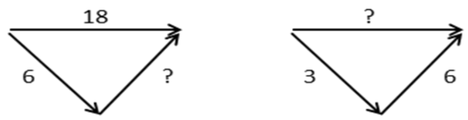
Figura 22: Operação da multiplicação e divisão na reta numérica.



Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições brasileiras.

A representação, no esquema abstrato, das operações de divisão e multiplicação com base na interpretação apresentada na reta anterior pode ser verificada na figura 23:

Figura 23: Operação da multiplicação e divisão na reta numérica

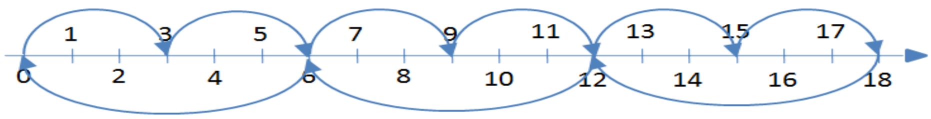


Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições brasileiras e davydovianas.

Assim, a medida intermediária seria *seis* (6), porém, diferentemente das proposições davydovianas, o mesmo não ocorre na multiplicação. Nesta, a medida intermediária a ser considerada seria o número 3. Desta forma, perde-se de vista a condição para que as operações de multiplicação e divisão sejam inversas entre si: que a unidade de medida intermediária coincida.

Ao considerar a divisão como inversa da multiplicação, as proposições brasileiras geralmente apresentam exemplos como: 6 x 3 = 18, então 18 ÷ 3 = 6. Tais operações seriam assim representadas na reta numérica (Figura 24):

Figura 24: Operação de multiplicação e divisão na reta numérica



Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições brasileiras.

Os arcos compostos por *três* (3) unidades cada, sobre a reta, representam a operação de multiplicação, e os arcos que representam agrupamentos com *seis* (6) unidades, localizados abaixo da reta, representam a divisão. A análise da representação anterior (figura 24) leva à elaboração dos seguintes questionamentos: Tal representação é expressão do movimento entre duas operações inversas entre si? Por que os arcos são compostos por quantidade de unidades diferentes, um com *três* (3) e outro com *seis* (6)?

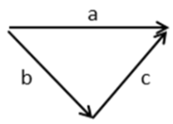
Caraça (2002) apresenta alguns apontamentos que possibilitam refletir sobre as questões apresentadas anteriormente, ao conceber a divisão como operação inversa da multiplicação:

$$a : b = c \Longleftarrow b \,.\, c = a$$

> Ao número *a* chama-se *dividendo*; ao número *b*, *divisor*; ao número *c*, *quociente;* a divisão é, portanto, a operação pela qual, dados o dividendo e o divisor, se determina um terceiro número, *quociente*, que multiplicado pelo divisor dá o dividendo (CARAÇA, 2002, p. 22).

Para explicitar a relação entre a definição anterior e as proposições davydovianas, apresentamos o seguinte esquema abstrato (Figura 25):

Figura 25: Operação de multiplicação e divisão no esquema abstrato.



Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas e em Caraça.

Segundo Caraça (2002, p. 18), "a multiplicação define-se como uma soma de parcelas iguais". A representação apresentada na figura anterior (25) consiste na seguinte ideia: o número *b*, que se repete, chama-se *multiplicando* (unidade de medida intermediária); o número *c*, que representa a quantidade de vezes que b se repete, chama-se *multiplicador*, e o resultado (a) é chamado produto (total de unidades básicas), conforme a figura 26:

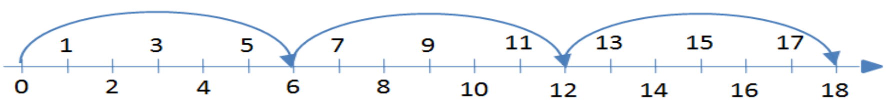
Figura 26: Representação algébrica da multiplicação.

$$b \, . \, c = \overbrace{\mathrm{b} + \mathrm{b} + \ldots + \mathrm{b}}^{(\mathrm{c})}$$

Fonte: Elaboração nossa com base em Caraça (2002).

As definições apresentadas por Caraça (2002) levam a questionar o modo pelo qual as proposições brasileiras apresentam o conceito de multiplicação e divisão. Como vimos, de acordo com o autor, o multiplicando (a) cumpre um papel passivo, é o número que se repete, e a quantidade de vezes que o multiplicando sofre repetição é determinada pelo multiplicador (b). Portanto, a operação 6 x 3, em concernência com as proposições davydovianas e os Fundamentos da Matemática apresentados por Caraça, seria assim representada na reta numérica (figura 27):

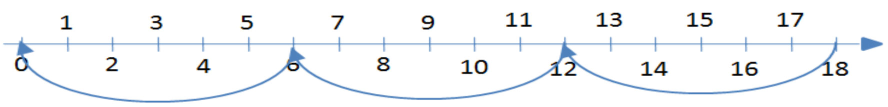
Figura 27: Operação da multiplicação na reta numérica.



Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas e em Caraça.

Por conseguinte, diferentemente da representação elaborada com base em algumas proposições brasileiras (figura 22), o número 6, multiplicando, é o número que se repete; e o número 3, multiplicador, determina quantas vezes o multiplicando se repete: 6 x 3 = 6 + 6 + 6 = 18. Sua operação inversa é 18 ÷ 6, e nela, o todo (18) é agrupado de 6 em 6 unidades. O total de vezes que *seis* (6) se repete determina o quociente da operação, o resultado (figura 28):

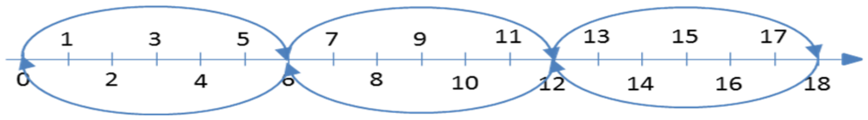
Figura 28: Operação de divisão na reta numérica.



Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas e em Caraça.

De maneira distinta da representação elaborada com base nas proposições brasileiras (figura 24), a representação geométrica das operações 6 x 3 e 18 ÷ 6, em uma única reta, consiste em (figura 29):

Figura 29: Operação da multiplicação e divisão na reta numérica.



Fonte: Elaboração nossa com base nas proposições davydovianas e em Caraça.

Diante do exposto, surgem os seguintes questionamentos: a representação apresentada na figura 29 é expressão do movimento entre duas operações inversas entre si? Por que os arcos são compostos pela mesma quantidade de unidades? Qual a diferença entre a representação apresentada nas figuras 24 e 29?

A figura 29 consiste na representação da divisão como operação inversa da multiplicação. O inverso, aqui, consiste em dois movimentos orientados em sentidos opostos, porém, com o mesmo intervalo entre eles.

De acordo com a propriedade comutativa da multiplicação, temos:

A comutativa de a x b = c consiste em b x a = c

A operação inversa de a x b = c consiste em $c \div a = b$

A operação inversa de b x a = c consiste em $c \div b = a$

As proposições brasileiras, comumente, não consideram a inversão da operação, mas de sua comutativa. Por exemplo, a comutativa da operação a x b = c é b x a = c. As operações inversas são, respectivamente, $c \div a = b$ e $c \div b = a$.

À primeira vista, podem parecer irrelevantes as reflexões aqui apresentadas sobre proposições brasileiras. Porém, esta adquire sua importância em função do que alerta Caraça (2002, p. 25), quando afirma que, no cálculo aritmético e algébrico, as propriedades matemáticas são aplicadas constantemente, e quem as conhecer bem "tem a chave do cálculo algébrico".

Considerações finais

Investigamos o movimento conceitual adotado por Davydov e seus colaboradores ao proporem o ensino do conceito de multiplicação e divisão dos números naturais no segundo ano do Ensino Fundamental. Durante a investigação, constatamos que o ponto de partida, no desenvolvimento de cada tarefa, é a relação entre grandezas (volumes com volumes e comprimentos com comprimentos).

A abordagem dos conceitos não ocorre de forma linear, mas trata-se de um movimento marcado por avanços e retrocessos de modo interconectado. Por meio do esquema abstrato, Davydov e seus colaboradores introduzem o conceito da divisão como inverso do conceito de multiplicação. Para tanto, adotam a mesma unidade de medida intermediária para ambos, o que possibilita a representação, na reta numérica, do segmento com agrupamentos idênticos. Tais agrupamentos apresentam o mesmo número de unidades, porém, com movimentos de sentidos contrários, que expressam a relação inversa que há entre os dois conceitos. Ao partirem do esquema e atentarem para as posições ocupadas pelas unidades de medidas, que se repetem em ambas as operações, as tarefas possibilitam as representações geométricas do elo que sustenta o movimento interno de inversibilidade.

O estudo dos Fundamentos da Matemática (CARAÇA, 2002) atrelado ao material didático davydoviano, possibilitou a apreensão do significado do esquema genérico como representação das propriedades matemáticas inerentes aos conceitos de multiplicação e divisão, por meio da reta numérica. Assim, ao propor o esquema em suas proposições de ensino, Davydov e seus colaboradores introduzem, significativamente, as primeiras noções das propriedades teóricas da Matemática.

Os conceitos de divisão e multiplicação são apresentados a partir da inter-relação entre os campos aritmético (operações numéricas), geométrico (reta numérica, esquema abstrato, volume, comprimento) e algébrico (relação genérica entre as grandezas representadas por meio de letras).

Ressaltamos que o trabalho apresentado no decorrer deste artigo é resultante de uma pesquisa de natureza teórica. Davydov e seus colaboradores elaboraram, desenvolveram e suas proposições de ensino são reelaboradas com base em investigações desenvolvidas com estudantes, nas escolas russas, durante muitos anos. Porém, ainda não há investigações sobre os resultados do desenvolvimento das proposições davydovianas para o ensino de multiplicação e divisão com estudantes brasileiros. Tal objeto integra nossas intenções de futuras pesquisas.

Referências

BÉZOUT, E. M. Elementos de arithmetica. Coimbra: Livraria Portuguesa, 1849.

Disponível em:

<http://almamater.uc.pt/wrapper.asp?t=Elementos+de+aritm%E9tica&d=http%3A%2F%2Fbdigital%2Esib%2Euc%2Ept%2Fbduc%2FBiblioteca%5FDigital%5FUCBG%2Fdigicult%2FUCBG%2D4A%2D16%2D12%2D10%2FglobalItems%2Ehtml>. Acesso em: 25 ago. 2012.

CARAÇA, B. J. Conceitos Fundamentais da Matemática. Lisboa: Gradiva, 2002.

CRESTANI, S. Análise conceitual das proposições de Davydov e seus colaboradores para o ensino do conceito de divisão. 2012. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

DAVÍDOV, V. V. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In: SHUARE, M. La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS. Moscú: Progreso, p. 143-155, 1987.

DAVYDOV, V.V. La renovación de la educación y el desarrollo mental de los alumnos. Revista de Pedagogía. Santiago: N. 403, p. 197 - 199, jun. 1998.

DAVYDOV, V. V. Tipos de generalización en la enseñanza. 3ª ed. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982. 485p

DAVÍDOV, V. V.; SLOBÓDCHIKOV, V. I. La enseñanza que desarrolla en la escuela del desarrollo; en La educación y la enseñanza: una mirada al futuro. Progreso, Moscú, p. 118-144, 1991.

DORIGON, J. C. G. Proposições de Davydov para introdução ao conceito de equação. 2012. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

KOPNIN, P. V. LO ABSTRATO Y LO CONCRETO. In: ROSENTAL, M. M,; STRAKS, G. M. Categorías del Materialismo Dialéctico. Tradução de Adolfo Sanchez Vazquez e Wenceslao Roces. México: Grijalbo. 1960.

MADEIRA, S. “Prática”: uma leitura histórico-crítica e proposições davydovianas para o conceito de multiplicação. Dissertação (Mestrado em Educação). UNIVERSIDADE DO EXTREMO SUL CATARINENSE, CRICIÚMA, 2012.

MATOS, C. F. Resolução de problemas davydovianos sobre adição e subtração por estudantes brasileiros do sexto ano do ensino fundamental. 2012. Monografia

(Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

ROSA, J. E.; DAMAZIO, A.; ALVES, E. S. B. Adição e subtração em Davydov. *Boletim GEPEM / Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática*, Rio de Janeiro, n. 63, p. 61-75, Jul./Dez. 2013.

ROSA, J. E. O desenvolvimento de conceitos na proposta curricular de matemática do Estado de Santa Catarina e na abordagem Histórico-Cultural. Dissertação (Mestrado e Educação: linha de pesquisa Educação Matemática). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2006.

______. Proposições de Davydovy para o ensino de Matemática no primeiro ano escolar: inter-relações dos sistemas de significações numéricas. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná, 2012.

SILVEIRA, G. M. Proposições para o ensino do sistema de numeração em Davydov. 2012. Monografia (Especialização em Educação Matemática) - Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma.

VIGOTSKI, L. S. A construção do pensamento e da linguagem**.** Trad. Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

ГОРБОВ, С. Ф. МИКУЛИНА Г. Г.; САВЕЛЬЕВА О. В. . Обучение математике. 2 класс: Пособие для учителей начальной школы (Система Д.Б.Эльконина – В.В. Давыдова). 2-е ида. перераб. - М.:ВИТА-ПРЕССб, 2009. [Ensino de Matemática. 2 ano: livro do professor do ensino fundamental (sistema do D.B.Elkonin – V.V. Davydov)/ S.F.Gorbov, G.G.Mikulina, O.V.Savieliev – 3-a edição, - Moscou, VITA-PRESS, 2009.

Recebido: 08/07/2013
Aceito: 24/02/2014