Geometrias não Euclidianas: ainda desconhecidas por muitos

Non-Euclidean Geometries: still unknown for several

JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS[1]

Resumo

O artigo trata de uma pesquisa qualitativa, cujo objetivo foi investigar o conhecimento sobre Geometrias Não-Euclidianas de noventa alunos de graduação, dezessete de mestrado e um de doutorado, todos estudantes de instituições gaúchas que oferecem Licenciatura em Matemática, mestrado e doutorado na área de ensino. Por meio de questionário, foram propostas sete sentenças envolvendo conteúdos de Geometria Euclidiana, Hiperbólica e Elíptica. Deveriam atribuir valor verdade ou falso a cada uma, justificando respostas. Os resultados mostraram que a grande maioria respondeu com base em Geometria Euclidiana e, dos que justificaram as respostas, poucos fizeram alusão às outras. Concluímos ser necessário incluir tópicos dessas geometrias na formação inicial dos futuros professores, bem como nos cursos de ação continuada.
Palavras chave*: Geometrias Não-Euclidianas; formação de professores; ensino e aprendizagem.*

Abstract

The article presents results of a qualitative research, which aimed to investigate the knowledge of Non-Euclidean Geometries ninety undergraduate students, seventeen masters and one PhD, some teachers working in brazilian elementary school, all belonging to Universities that offer studies in the area of education. Through a questionnaire, we proposed seven sentences involving contents of Euclidean, Hyperbolic and Elliptic Geometry. They should assign value true or false to each and justify. The results showed that the great majority answered based on knowledge of Euclidean Geometry and of justifying their answers, few have made some allusion to the other two. We conclude need to include topics such geometries in the initial or future training of mathematics teachers as well as courses in continuing action.
Keywords*: Non-Euclidian Geometries; teacher training; teaching and learning.*

INTRODUÇÃO

Na Matemática e no seu ensino, frequentemente fala-se em descobertas. Ao estudar Geometria, na História da Matemática, em geral, somos remetidos a Euclides e seus seguidores. Alguns atribuem a categoria de gênio a um ser humano, denominado Euclides, enquanto outros contestam sua existência física. O certo é que o livro denominado Os Elementos (2009), atribuído a Euclides, é o segundo livro no mundo em tiragem, só perdendo para a Bíblia sagrada. Nele, consta um tratado de Matemática, de

[1] Prof. do Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática da UNIFRA. leivasjc@unifra.br

forma organizada, especialmente da Geometria, que permeou o conhecimento por mais de dois mil anos. “Este livro é para todos os amantes da matemática. É uma tentativa de entender a natureza da matemática do ponto de vista da sua fonte antiga mais importante” (p.15).

Crises ocorreram em tempos passados, em todas as áreas do conhecimento humano, e continuam ocorrendo em tempos atuais. Segundo Struik (1997), no século XIX, houve grande turbulência na atividade matemática, fundamentalmente, pela industrialização e a pesquisa teve grande progresso nesse período: “O tempo era favorável aos ‘físicos matemáticos’ ou de ‘lógica matemática’” (p.227). Na interface entre a Matemática do século XVIII e a do XIX, segundo o mesmo autor, há a dominância da genialidade de Carl Friedrich Gauss, o qual, com vinte e dois anos, já doutor, publicou sobre a geometria intrínseca de uma superfície. Por meio dos diários deixados por Gauss,

> sabemos agora que em 1800 Gauss tinha descoberto as funções elípticas e por volta de 1816 estava na posse da geometria não euclidiana. Nunca publicou nada sobre estes assuntos; na realidade, apenas nalgumas cartas a amigos divulga o axioma das paralelas de Euclides. Gauss parece não ter estado disposto a aventurar-se publicamente em qualquer assunto controverso.
> [...] Duvidou, para si próprio, da validade da doutrina kantiana, então aceite, segundo a qual a concepção de espaço é euclidiana a *priori*; para ele, a verdadeira geometria do espaço era um facto físico para ser descoberto pela experimentação. (Idem, p. 232)

O quinto postulado de Euclides, conhecido como o das paralelas, já causava incômodo e controvérsia desde seu tempo. Ele mesmo evitava empregá-lo, enquanto outros tentaram, ao longo dos séculos, eliminá-lo do sistema axiomático criado. Alguns acreditavam que não seria um postulado e poderia ser demonstrado, como um teorema, a partir dos quatro primeiros. Outros acreditavam que poderiam substituí-lo por algum princípio mais claro e evidente e passaria a ser o quinto postulado, com o qual poderiam demonstrar o antigo.

Matemáticos do século XIX perceberam que esse postulado era independente dos quatro primeiros e que havia sistemas geométricos em que ele, da forma como enunciado por Euclides, não se coadunava, sendo substituído por outro, o qual possibilitava criar um sistema geométrico consistente e perfeitamente compatível. Isso fazia parte da denominada crise dos Fundamentos da Matemática, pois a concepção de mundo não era mais a euclidiana. Além da Geometria, a crise também envolvia mudanças nos fundamentos da Análise. Segundo Brito (1995,p.78),

> no século XVIII, ocorreu uma crise na análise matemática, devido à imprecisão dos conceitos que sustentavam o cálculo infinitesimal, ou seja, exatamente no ramo da matemática que se mostrava mais fecundo para resolver vários problemas colocados pela física. Assim, iniciou-se na matemática um movimento de busca por seus próprios fundamentos.

Lobachevski e Bolyai, independentemente, criaram versões de uma geometria logicamente consistente, cujos princípios eram diferentes dos euclidianos, tais como: a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre menor do que 180º; dada uma reta e um ponto fora dela, existe mais do que uma paralela passando pelo ponto e que não a intersecciona. É a chamada Geometria Hiperbólica.

Durante o século XIX, Riemann criou uma nova estrutura geométrica, perfeitamente consistente e sem contradições, a qual apresenta princípios diferentes da geometria euclidiana e também da criada por Lobachevski e Bolyai. Nessa estrutura, a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre maior do que 180º, em contrapartida à anterior. Dados dois pontos distintos, é possível obter mais do que uma reta distinta unindo-os. Também, dada uma reta e um ponto fora dela, não existe paralela a ela passando pelo ponto. É a chamada Geometria Elíptica para uns e de Riemann para outros.

Essas duas construções foram denominadas por Gauss de Geometrias Não-Euclidianas. Nelas, as geodésicas são as curvas que desempenham o papel da reta no plano euclidiano. Um espaço geométrico, no qual se podem visualizar essas geometrias: a superfície esférica (elíptica) e a pseudo-esfera (hiperbólica). Ele desenvolveu o conceito de curvatura gaussiana de superfícies, segundo o qual, é possível elaborar classificação dessas geometrias.

Não é objetivo deste artigo tratar, explicitamente, sobre tais geometrias ou outras não euclidianas que surgiram posteriormente. Pretende-se, sim, trazer à tona resultados de uma pesquisa que comprova, ainda, serem desconhecidas, tanto por alunos ao final da Licenciatura em Matemática, quanto por alunos de cursos de pós-graduação no estado do Rio Grande do Sul. Segundo Brito (1995), os fatos históricos e filosóficos relativos ao conhecimento geométrico são importantes para quem deseja ser um professor, ou seja, ele deve ser um profundo conhecedor da área que irá ensinar.

ALGUNS ASPECTOS SOBRE GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS E SEU ENSINO

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, (Brasil, 1998), ao definir objetivos gerais para o ensino fundamental, selecionam, no bloco espaço e forma, o seguinte: “é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento” (p.51). Dessa forma, entende-se que atividades exploratórias, por exemplo, numa esfera, muito bem podem ser introduzidas nesse nível de escolaridade.

Além disso, é importante que se considere o princípio norteador indicado no mesmo documento de que “a atividade matemática escolar não é ‘olhar para as coisas prontas e definitivas’, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade” (Idem, p.56). Deve-se levar em conta que, no ensino fundamental, os alunos já trabalham na disciplina de Geografia com localização em mapas e coordenadas, podendo ser feito trabalho interdisciplinar, em termos de longitude e latitude, partindo de experimentação, como indicado no parágrafo anterior, o que é útil, tanto na navegação aérea, quanto na marítima.

Assim, por meio da exploração de atividades de resolução de problemas, é possível que, já no terceiro e quarto ciclos, se introduzam algumas noções não euclidianas, mesmo que de forma superficial o que, provavelmente, despertará o interesse dos estudantes pela aprendizagem matemática. Portanto, na formação do professor de Matemática cabe conhecer e aprofundar o conhecimento geométrico, até mesmo para poder cumprir aquilo que é previsto, quanto a conceitos e procedimentos, para a Matemática, no mesmo bloco do PCN: “distinção, em contextos variados, de figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria; verificação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º” (p.72-73), para citar algumas.

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática – DNE, (Paraná, 2008) orientam o conteúdo estruturante Geometrias para o Ensino Fundamental e Médio no seguinte desdobramento: geometria plana; geometria espacial; geometria analítica; noções básicas de geometrias não-euclidianas, sendo que nessa última incluem-se a geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte), a geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e a noção de geometria dos fractais.

Cavichiolo (2011), preocupada em entender como ocorre a inclusão de Geometrias Não-Euclidianas no currículo da formação do professor de Matemática, a partir das orientações emanadas das DNE, investigou o que diziam os professores do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná, durante a reformulação de seu currículo, sobre as razões que os levaram a incluir tais conteúdos. Obteve duas categorias de razões: uma relacionada aos fundamentos e aspectos histórico-epistemológicos desse conhecimento matemático e outra relacionada aos aspectos didático-conceituais na difusão desse conhecimento.

Camargo (2012), em seus estudos sobre o ensino de geometrias não euclidianas apontou a Expressão Gráfica como sendo um possível facilitador para a aquisição de "novos conceitos". Utiliza a história da geometria e explora recursos visuais, espaciais e imagéticos. Sugere atividades que podem ser desenvolvidas, em particular, utilizando tecnologias computacionais. Outros trabalhos, ainda em função das DNE, foram desenvolvidos naquele estado, em sua quase totalidade, voltados ao ensino fundamental e médio, o que se justifica em função do Plano de Desenvolvimento Educacional, segundo o qual os professores buscaram novos conhecimentos e formas de inovações curriculares.

No estado do Rio Grande do Sul pouco se tem a respeito da inclusão de Geometrias Não-Euclidianas e outras, tanto na escola básica, quanto na formação de professores de Matemática. Leivas (2009) fez uma investigação, no ano de 2007, em oito cursos de Licenciatura em Matemática. No levantamento sobre a oferta de alguma disciplina que aborde geometrias não euclidianas, concluiu que, em apenas dois projetos desses cursos, o tema é contemplado minimamente.

Utiliza-se, no artigo, a notação Geometrias Não-Euclidianas, quando se faz referência à Geometria de Lobachevsky e à Geometria de Riemann e a notação geometrias não euclidianas, às outras.

A partir dessas considerações, julga-se pertinente mapear, com maior amplitude, esse conhecimento, a fim de que possam ser sugeridas novas ações, tanto para os currículos da formação do professor, quanto para ações continuadas. Nesse sentido, justifica-se o presente artigo, no qual consta pesquisa realizada em instituições gaúchas, com alunos de graduação e pós-graduação, bem como com professores em exercício, como se vê a seguir.

A PESQUISA

Ao finalizar o ano letivo de 2012, encaminhou-se, a professores que atuam em treze instituições superiores no RS, as quais possuem graduação e pós-graduação em ensino de Matemática, um pedido para aplicação de um instrumento de coleta de dados, com a finalidade de produzir um artigo envolvendo o conhecimento geométrico, preferentemente de alunos de final de graduação e, de pós-graduação. Poderiam responder, também, professores que se encontrassem em ação continuada ou aqueles que se dispunham a tal. Retornaram os instrumentos de três instituições federais e três privadas.

O instrumento consistiu de um questionário estruturado. No primeiro item, solicitou-se que o respondente assinalasse o tipo de formação: aluno de graduação, especialização, mestrado, doutorado ou professor atuante. Pediu-se que incluísse o período/ano em curso ou de conclusão. Além disso, solicitou-se, também, que indicassem se a instituição a qual pertenciam era pública, privada, presencial ou à distância e se a formação era em Licenciatura ou em Bacharelado.

No segundo item do instrumento, caracterizou-se o problema-objeto **espaço ambiente** como sendo o espaço geométrico no qual entes geométricos e axiomas são bem definidos e relações estabelecidas e demonstradas, de modo que os participantes não se limitassem a pensar, exclusivamente, em geometria plana e espacial, como é usual na formação inicial e, até mesmo, continuada de professores de Matemática.

A partir do problema-objeto, partiu-se para o terceiro item do instrumento, que consistiu de sete sentenças a), b), c), d), e), f), g), as quais serão enunciadas e analisadas com as respectivas respostas na sequência do artigo. Tinham elas a seguinte orientação: dado um triângulo em um espaço geométrico qualquer, atribua valor V para a afirmação que for verdadeira ou F para a falsa. Se julgar conveniente, argumente sua resposta.

Para analisar os dados coletados e manter o sigilo das instituições que contribuíram para a pesquisa, nomeou-se da seguinte forma: a primeira letra, em maiúscula,G, indica aluno de graduação; M, aluno de mestrado, D, para o de doutorado e P_a, para professores atuantes. A segunda letra, também maiúscula, identifica com F instituição pública e P, privada, ou seja, FG, FP, FR, PU, PV e PF, tendo uma terceira letra para distingui-las entre si. Seguindo-as, um índice numérico indica cada um dos respondentes. Por exemplo:

GPU_1: significa aluno 1, de graduação, da instituição privada U.
GFP_{10}: significa aluno 10, de graduação, da instituição pública P.
MFG_1: significa aluno 1, de mestrado, da instituição pública G.
DFG_1: significa aluno 1, de doutorado, da instituição pública G.

P_aPU_1: significa professor atuante 1 da instituição privada U.
MFR_{15}: significa aluno 15, de mestrado, da instituição pública R.
GPV_3: significa aluno 3, de graduação, da instituição privada V.
GPF_{12} significa aluno 12, de graduação, da instituição privada F.

A distribuição dos respondentes, por nível de formação, instituição e ano de conclusão ou em curso, está na tabela 1, a seguir.

Tabela 1- Distribuição dos participantes investigados.

Instituição	Graduação	Mestrado	Doutorado	P. atuante	Conclusão	Período
FG	10	2*	1*	3	2004-2010	5º e 8º
FP	36	--	--	--	--	1º,2º,4º,5º,6º
FR	08	15*	--	3	1983-2008	5º,8º,9º
PU	17*	--	--	2	1980; 2008	2º,4º,5º,6º
PV	3	--	--	--	--	8º
PF	16	--	--	--	--	6º

Nota: nos dados em que consta *, os indivíduos estão enquadrados também como professores atuantes.

A amostra da pesquisa, de acordo com os dados da tabela 1, permite verificar um período bem abrangente quanto ao ano de formação daqueles que estão cursando mestrado e doutorado. A formação desses indivíduos vai do ano de 1980 até o ano de 2010, portanto, a pesquisa envolveu professores com formação nas três últimas décadas.

Quanto ao período em que se encontram os graduandos, esse varia do primeiro ao último semestre do curso, uma vez que a aplicação do instrumento dependeu da atuação do professor que se disponibilizou a aplicá-lo. Por exemplo, nas instituições PV e PF, os aplicadores estavam atuando na Licenciatura, naquele momento, em apenas uma disciplina. Por isso, houve a concentração em um semestre do currículo. Já a aplicação na instituição FP ocorreu em duas disciplinas, uma do segundo semestre, com alguns remanescentes do primeiro, e a outra, envolvendo alunos de semestres mais adiantados na grade curricular do curso, que possui dez semestres letivos e funciona durante o período da noite.

Optou-se, embora trazendo alguns dados quantitativos, por uma pesquisa qualitativa, no sentido indicado por Denzin e Lincoln (1994), uma vez que ela descreve uma rotina na vida do pesquisador e momentos problemáticos durante definição de currículos para a formação de professores. Além disso, tende a produzir significados para quem se dedica ao estudo desses currículos, especialmente em termos de atualizações curriculares. Por sua vez, “a pesquisa qualitativa, como um conjunto de práticas interpretativas, não privilegia nenhuma metodologia sobre qualquer outra" (p.3).

Ao tratar sobre a pesquisa qualitativa, Moreira (2011) afirma: "Os fenômenos de interesse da pesquisa qualitativa em ensino têm também a ver com ensino propriamente dito, aprendizagem, currículo, avaliação e contexto, mas são analisados sob outros pontos de vista" (p. 49). Diz, ainda, o autor que, sob essa ótica, em estudos interpretativos, o investigador busca analisar criticamente os significados em cada contexto, não somente testar hipóteses, mas desenvolvê-las.

Muito embora a gestão, a análise e a interpretação em pesquisas qualitativas constituam um processo complexo e difícil, entende-se que o questionário, devidamente estruturado, deve estar muito próximo do discurso do pesquisador, pois exige uma interpretação contextualizada. Assim, ao elaborar as questões a serem aplicadas, o investigador deve ter, muito precisos, os objetivos de cada uma delas, em conexão com o problema-objeto proposto para a investigação. Para Fiorentini e Lorenzato (2006), o questionário tem a função de coletar informações sobre um indivíduo ou grupo, relacionadas a um determinado fato, situação e fenômeno. É um instrumento que reúne perguntas que podem ser do tipo "aberto" ou "fechado", para serem respondidas pelos participantes da pesquisa.

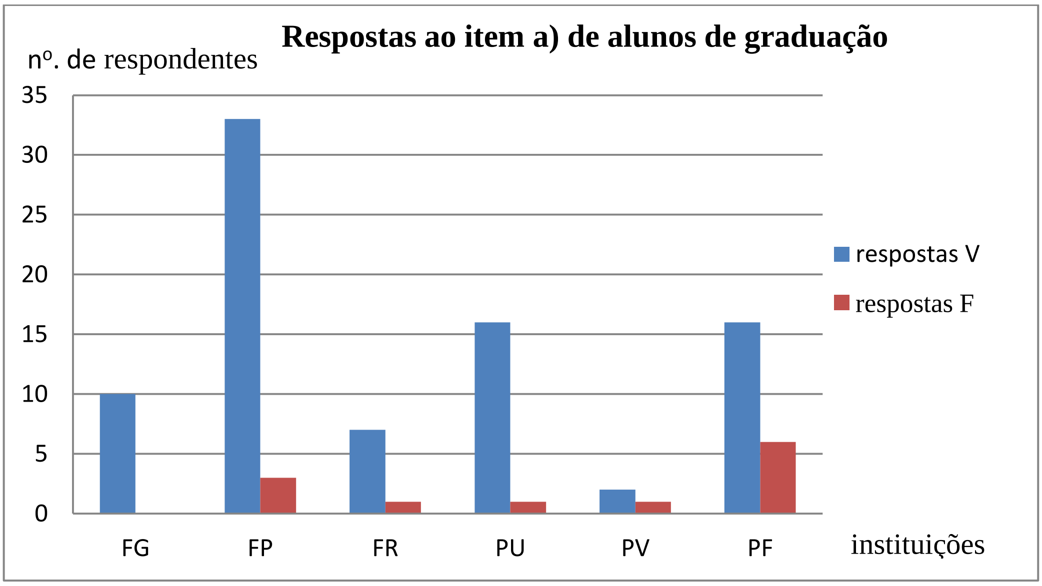
Por sua vez, o pesquisador encontra facilidade para a observação e consequente análise dos dados coletados, pois pode entrar várias vezes na configuração daquilo que é respondido. O investigador atua discretamente, não havendo interação direta com os participantes envolvidos. Sendo o aplicador do questionário um professor, o qual já possui contato com os seus alunos, as respostas poderão ter um grau de fidedignidade muito bom para o investigador que não se encontra presente.

A seguir, realizar-se-á a análise e discussão sobre as questões da pesquisa, a partir das quais acredita-se poder confirmar a hipótese de que Geometrias Não-Euclidianas, ou são muito pouco estudadas na formação de professores de Matemática nos cursos investigados, ou nem sequer são abordadas.

ANÁLISE DA INVESTIGAÇÃO COM ALUNOS DE GRADUAÇÃO

O gráfico 1, a seguir, ilustra as respostas dos alunos de graduação ao item a) do questionário: **a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre igual a 180º**.

Gráfico 1- Respostas dos alunos de graduação ao item a).



Nota: foram computados, como alunos de graduação, dois professores atuantes em PU.

Um dos principais assuntos estudados em Geometria, no ensino fundamental, está relacionado a triângulos. Pode-se observar dos dados levantados que, nem no ensino médio, ao estudar Geometria Analítica ou mesmo na Licenciatura, o assunto é retomado, ampliando-se o espaço geométrico no qual a relação entre os ângulos internos de um triângulo pode ser menor, maior ou igual a 180º, ou seja, num modelo hiperbólico, elíptico ou plano, respectivamente. Os dados do gráfico mostram que uma minoria atribuiu corretamente a letra F para esse item.

Quanto às justificativas ao item a): nenhum aluno de FG justificou; 3 de FP e 5 de FR justificaram. Dentre os que assinalaram corretamente F, encontrou-se, na resposta de GFP_{33}, um indício de seu conhecimento de outras geometrias, ao responder "Não, se considerarmos um espaço curvo"[2], o que já não ocorre com a justificativa de GFP_{36} "Os triângulos quaisquer é menor que 180º", demonstrando não estar se relacionando às Geometrias Não-Euclidianas e sim a triângulos planos. Já o aluno GFR_2 respondeu que suas respostas referiam-se à Geometria Euclidiana e não justificou os demais itens. Expressou para o item a) a seguinte justificativa: "Ouvimos falar de geometria esférica, em que essas respostas não valeriam". Chama atenção a justificativa de GFR_4: "Por exemplo, trabalhando-se com Geometria Esférica, a soma dos ângulos internos pode ser maior do que 180º".

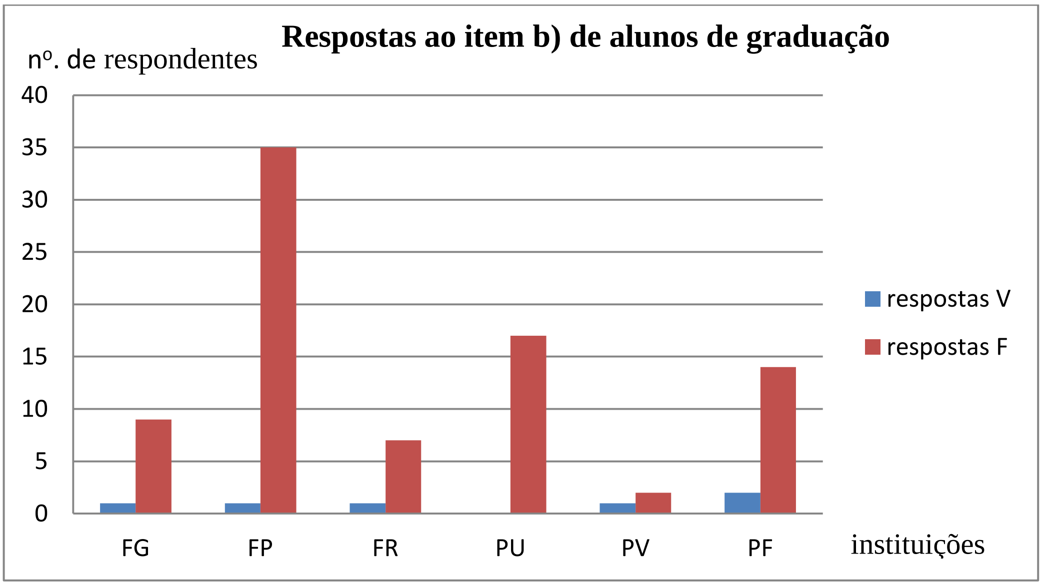
Apenas um aluno de PU justificou sua resposta correta, sendo que, em nota de rodapé, GPU_7 informou que levou em consideração um espaço 2D para dar suas respostas, o que não deixa de ser uma boa alternativa de solução. O aluno GPU_5 ao

[2] Todas as citações dos investigados foram transcritas literalmente, sem modificação do pesquisador.

argumentar: “Falso. Se um triângulo for desenhado em uma esfera, pode ter 360º a soma dos ângulos internos”, mostra ter algum conhecimento sobre a Geometria de Riemann. Nenhum aluno de PV justificou e todos optaram pela alternativa V, da mesma forma que os alunos de PF. Já o aluno GPF_{15}, único a justificar sua resposta como verdadeira, na instituição, assim argumentou: “Se alinhamos os ângulos internos sobre uma reta, o ângulo formado é de exatamente 180º, independente da classificação do triângulo”, não fazendo sentido sua justificativa para dar alguma noção de Geometrias Não-Euclidianas.

O gráfico 2, a seguir, ilustra as respostas dos alunos de graduação ao item b) do questionário: **existe triângulo cuja soma dos ângulos internos é menor do que 180º**. A resposta correta deveria ser V, considerando-se a existência de triângulos hiperbólicos. Todos os alunos responderam a essa questão. Quase a totalidade indicou F, coerentemente com o que haviam assinalado no item a), salvo aqueles que justificaram estar respondendo com base na Geometria Plana.

Gráfico 2 - Respostas dos alunos de graduação ao item b).



Assim, os dados do gráfico 2, juntamente com as justificativas apresentadas a seguir, permitem inferir, similarmente ao que ocorreu no item anterior, que a maioria absoluta não tem conhecimento elementar sobre Geometria Hiperbólica.

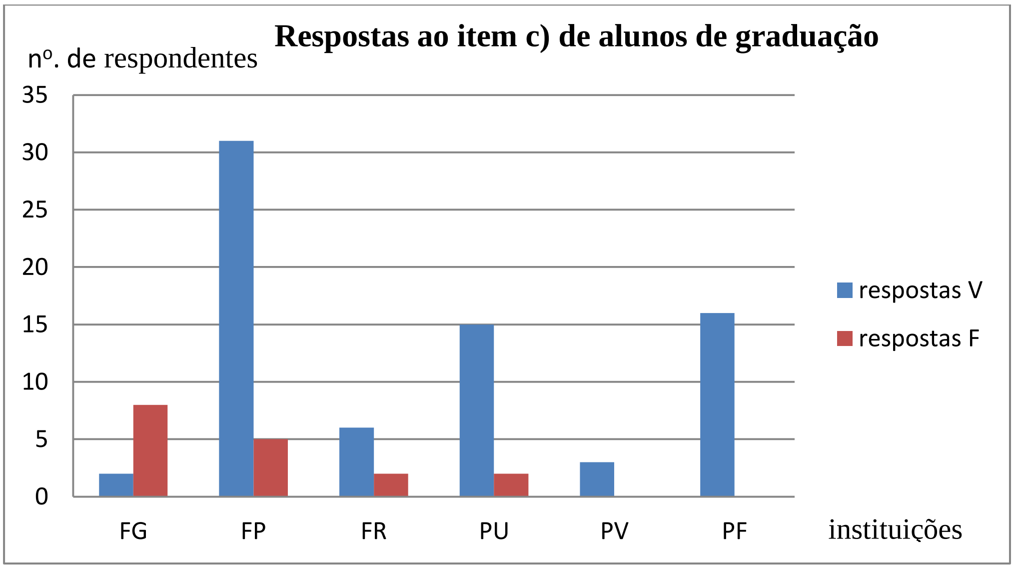
> GFG_4: Não existe, pois a soma é sempre 180º.
> GFG_7: A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180º.
> GFG_8: É falso, pois qualquer triângulo, a soma dos ângulos internos é sempre igual a 180º.
> GFP_{11}: Não. A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180º.
> GFP_{36}: É impossível qualquer forma geométrica a qual a soma de seus ângulos internos somar mais ou menos de 180º, forma um triângulo.
> GFR_1: Demonstrado em (a) que não é possível isto.

> GFR_6: Idem resposta letra (a).
> GPF_9: É a negação da primeira. Todo triângulo a soma dos ângulos internos é 180º.
> GPF_{15}: Não, conforme explicação do item a.

Nenhum aluno de PU e de PV justificou a alternativa escolhida.

O terceiro item da investigação consistiu na solicitação para assinalar V ou F: **Não existe triângulo cuja soma dos ângulos internos seja exatamente igual 270º**. A resposta correta deveria ser F. Em Leivas e Soares (2011), há uma possibilidade de obter triângulos geodésicos trirretângulos, em superfícies esféricas, segundo os autores, como possibilidade de geometrizar o currículo da Licenciatura. Utilizam derivadas parciais e ângulos entre vetores e exemplificam que é possível nova abordagem de conteúdos envolvendo Geometria. Acredita-se que essa possa ser uma forma de fornecer a futuros professores alguma noção de uma das Geometrias Não-Euclidianas, nesse caso, a Geometria Elíptica. As respostas de alunos de graduação são ilustradas no gráfico 3, a seguir.

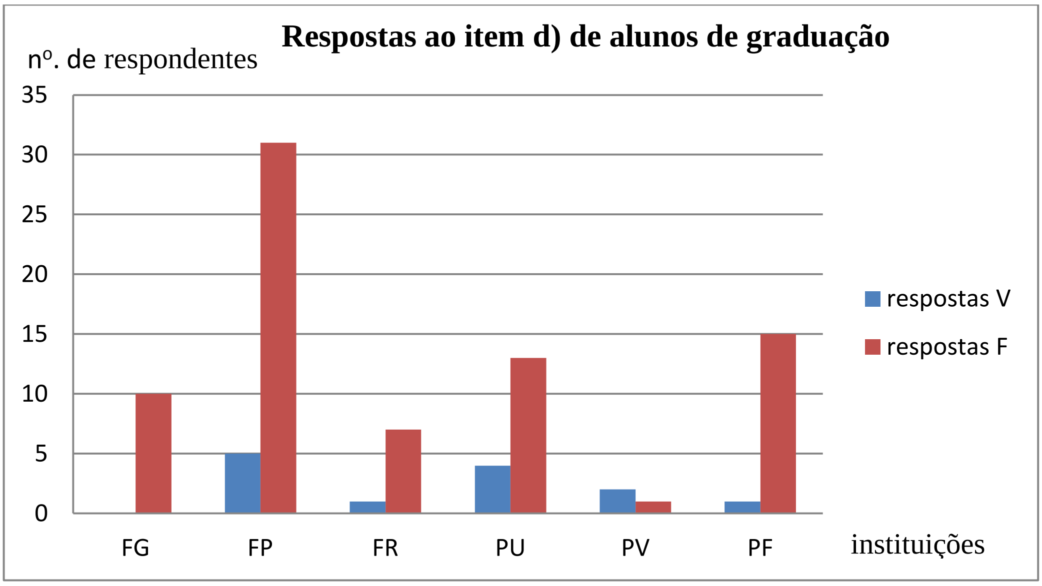
Gráfico 3-Respostas dos alunos de graduação ao item c).



Percebe-se, a partir do fato de alguns alunos indicarem como falsa a afirmação, que é possível não terem compreendido a forma negativa com que a sentença foi enunciada. Nenhum dos alunos das instituições FG, FE, PU e PV justificou sua resposta, enquanto que GPF_{15}, ao atribuir o valor V, afirma que sua justificativa é a mesma dada em a). A justificativa de GFR_4 é: *novamente, na Geometria Esférica, podemos ter três ângulos com 90º cada (verso)*. O aluno ensaiou uma representação esférica, sendo uma exceção dentre as respostas apresentadas.

Os dados do gráfico 4, a seguir, ilustram as respostas, dos alunos de graduação, ao item 4 do questionário: **dada uma reta r e um ponto P, que não pertence a r, por P pode passar mais de uma reta paralela a r**. Nele, pode-se observar que a maioria absoluta indicou a proposição como falsa, quando, na realidade, ela é uma sentença verdadeira.

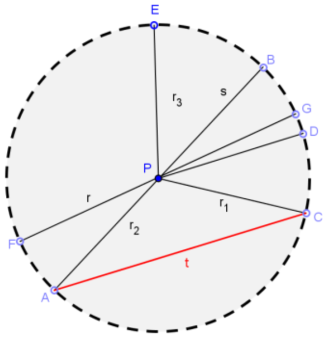
Gráfico 4 - Respostas dos alunos de graduação ao item d).



O famoso quinto postulado de Euclides que, segundo a história, desencadeou os processos de construção de novas geometrias, se apresenta aqui de uma forma modificada no sentido de que a palavra “pode”, no enunciado da sentença, não restringe a exigência de uma única, como no caso da Geometria Euclidiana.

Num dos modelos de Geometria Hiperbólica, o modelo de Lobachevsky, o espaço geométrico é uma região circular sem fronteira. Pontos são como na Geometria Euclidiana e retas são, também, como nessa geometria, porém limitadas ao interior do disco aberto, logo, diâmetros, raios e cordas. A figura 1 ilustra o modelo no qual as retas estão todas passando pelo ponto P, com exceção da reta t. Como os pontos da fronteira do disco não pertencem a esse espaço geométrico, então os pontos A e C, por exemplo, não pertencem a t, nem a r_1 e r_2. Portanto, todas as retas aqui representadas não têm ponto comum com a reta t, sendo-lhes, pois, paralelas. Nesse modelo, há uma infinidade de retas paralelas a uma reta dada, passando por um ponto que não lhe pertence. Na representação, as retas r_1 e r_2 são limítrofes para a identificação das que são paralelas e das que não são paralelas.

Figura 1 - Modelo de Poincaré para Geometria Hiperbólica.



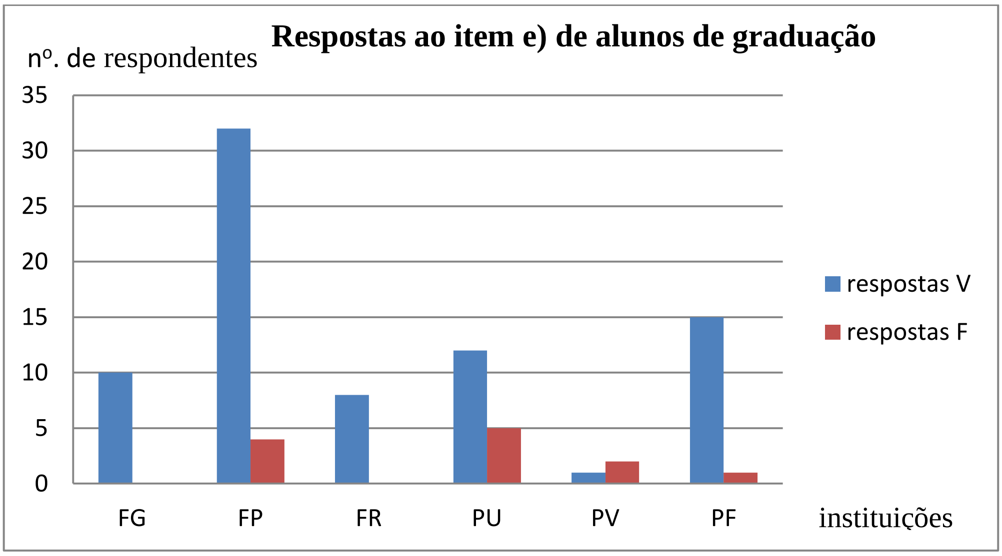
Fonte: construção própria.

Considera-se, nas justificativas dos alunos, a forte conotação de conceitos euclidianos, na medida em que argumentam terem levado em consideração o fato de que retas coincidentes são representadas por uma única reta, logo apenas uma é paralela à reta dada. GPF_{15} utilizou-se do argumento para atribuir valor F, enquanto GPV_1 e GFP_{34} para o valor V. GFR_6 atribuiu valor F e argumentou: *verdadeiro se considerarmos retas coincidentes como sendo retas diferentes?*

Por sua vez, GFR_4 argumentou corretamente: *pela Geometria Riemanniana, existem infinitas retas passando por P paralelas a r*. Na argumentação de GFR_5: *por um ponto passam infinitas retas, porém apenas uma será paralela a dada reta r, pode-se concluir por absurdo a unicidade dessa reta que passa por P, sendo paralela a r*. Nota-se que o aluno tentou argumentar pelo método do absurdo, mas o fez de forma incorreta.

No quinto item do questionário, solicitou-se aos alunos que atribuissem V ou F e se, o desejassem, justificassem a alternativa escolhida: **dada uma reta r e um ponto P, que não pertence a r, por P passa uma única reta paralela a r.** A afirmação apresenta a forma de enunciado frequentemente utilizada nos cursos de Geometria, nos diversos níveis, sem, entretanto, ponderar que é válida para o modelo euclidiano. Acredita-se que, em função disso, as respostas V, as quais predominaram para a maioria absoluta, demonstram que não houve maior reflexão ou faltou conhecimento de outras axiomáticas para a Geometria em outros espaços geométricos.

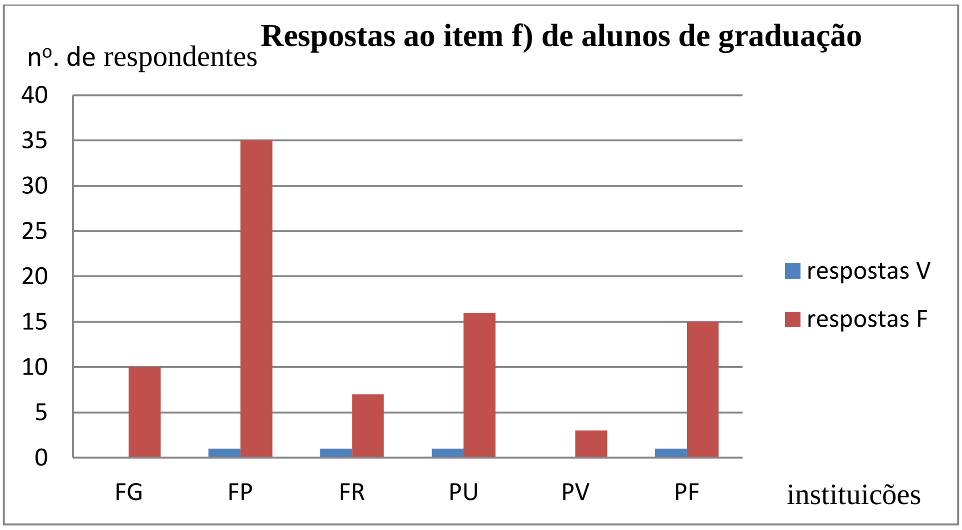
Gráfico 5-Respostas dos alunos de graduação ao item e).



Das poucas justificativas apresentadas, destaca-se a de GFR_4: *pela Geometria Euclidiana, isso é verdadeiro. No entanto, é um caso particular da alternativa (d).* O aluno demonstrou ter adquirido conhecimentos de Geometrias Não-Euclidianas em sua formação. Ele se encontrava nos semestres finais da Licenciatura em Matemática. Da mesma instituição, porém um semestre mais adiantado do que o anterior, o aluno GFR_5 argumentou: *dado um ponto e uma reta, já existem condições suficientes para definir uma reta paralela à reta inicial*. A justificativa para ter atribuído valor V à afirmação aparentou não ter significado e não permitiu ao investigador verificar seu conhecimento a respeito de Geometrias Não-Euclidianas.

O gráfico 6, a seguir, ilustra as respostas dos alunos ao item f): **dada uma reta r e um ponto P que não pertence a r, por P não existe reta paralela a r**. Com essa afirmação pretendeu-se investigar se os alunos apresentavam alguma informação a respeito do axioma de paralelas na Geometria de Riemann.

Gráfico 6-Respostas dos alunos de graduação ao item f).



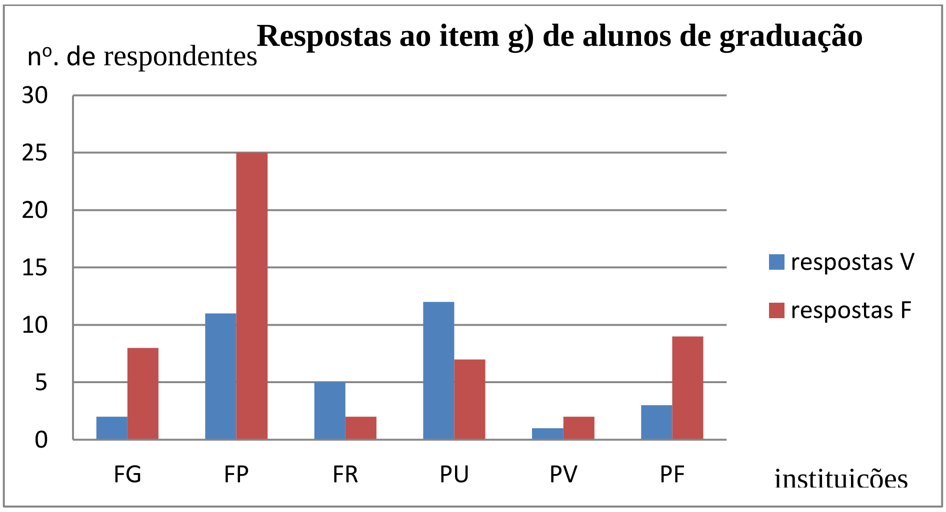
Através das justificativas apresentadas, verifica-se que quase a totalidade dos respondentes, ao escolherem a alternativa F para a sentença, não demonstram ter conhecimento do correspondente axioma das paralelas da Geometria Euclidiana na Geometria de Riemann:

> GFG_7: F. Uma única reta paralela a r passando por P.
> GFP_{11}: F. Existe ao menos uma reta paralela a r.
> GFP_{19}: F. Faz um rascunho de uma reta e um ponto fora dela e diz: existe uma apenas.
> GFR_4: Penso que basta pegar o total de retas que passam por P e excluir o total de retas paralelas por r.
> GFR_6: Como assim por P não existe reta? Nas seria por P não passa nenhuma reta paralela a r? Aí então considero falso F.

O último item do questionário apresentou a seguinte sentença: **há espaço geométrico em que não existem nem quadrados e nem retângulos**. Com ela, esperava-se comprovar que os currículos da Licenciatura em Matemática pouco ou nada oferecem aos futuros professores sobre conhecimentos básicos das Geometrias Não-Euclidianas. O gráfico 7, a seguir, apresenta os dados das alternativas dadas pelos alunos de graduação ao item.

Chama a atenção que, na instituição PF, quatro alunos não responderam por não entenderem a sentença. Por exemplo, o aluno GPF_{16}: *não sei responder, pois não entendi a afirmação,* bem como o aluno na FR. Isso corrobora a hipótese inicial sobre a falta de conhecimento sobre Geometrias Não-Euclidianas na formação do professor de Matemática em instituições do RS. Essas argumentações mostram, até certo ponto, o espanto dos alunos a respeito. É possível identificar, no gráfico 7, uma certa distribuição entre as respostas V e F, dando indícios de que, de fato, não houve maior compreensão do que fora anunciado, por tal desconhecimento.

Gráfico 7- Respostas dos alunos de graduação ao item g).



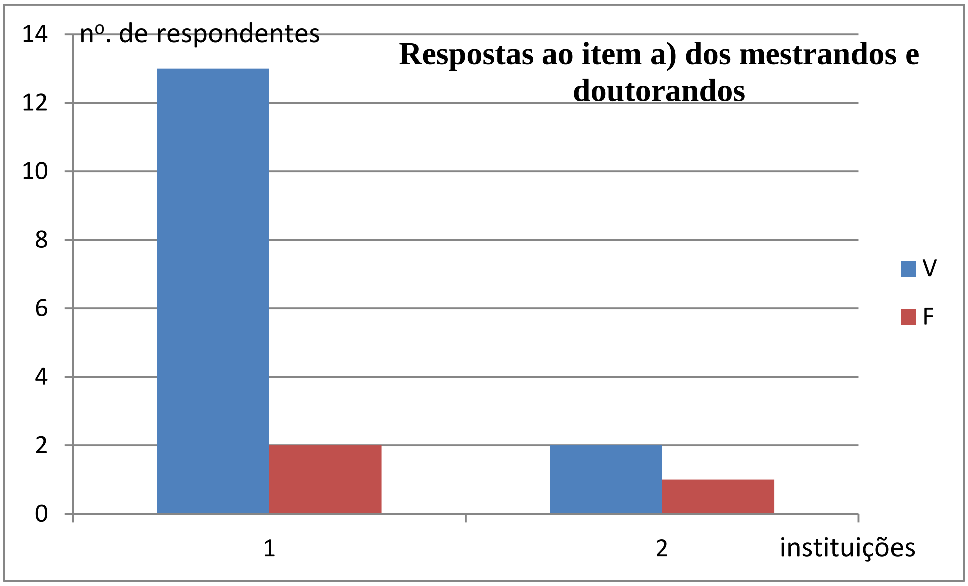
> GFP_{25}: *F: Não sei direito o que se define como espaço geométrico, mas se definir um espaço com figuras geométricas, vão existir triângulos, quadrados e retângulos e todo tipo de figura.*
> GFR_3: *Nega três vezes. Desconsiderei a dupla negação e considerei apenas uma negação para quadrados e 1 para retângulos (desconsiderei o 1º nem e o e). Considerei verdadeiro por considerar as outras formas como triângulos e círculos.*
> GFR_7: *Se, dados 2 pontos, considerarmos o segmento que os une como sendo espaço geométrico, eu diria verdadeiro. Caso contrário, diria que não. Mas confesso que não tenho conhecimento desse conceito.*
> GFR_8: *Um espaço geométrico pode ser representado por um ponto. Ou seja, como é preciso pelo menos 4 pontos para definir um quadrado ou um retângulo, eles não pertencem a esse espaço geométrico.*
> GPU_5: *Verdadeiro. Sim, em um espaço geométrico pode haver apenas ponto, segmento de reta ou reta.*
> GPV_1: *Para mim não está bem clara essa questão, não possuo conhecimento suficiente para responder a essa questão.*

Análise da investigação com alunos de mestrado e doutorado

No que segue, serão analisadas as respostas de dezessete alunos de mestrado e um de doutorado. Todos têm formação em Licenciatura em Matemática, com graduação concluída em instituições públicas e privadas, com conclusão variando de 1983 a 2010. DFG_1; MFG_1; MFG_2; MFR_{12}; MFR_8 e MFR_{13} são professores atuantes e os dois últimos são, também, especialistas.

As duas instituições foram nomeadas como 1 e 2 para evitar algum tipo de identificação.O gráfico 8 ilustra as respostas ao item a), fornecidas pelos mestrandos e doutorandos. Comparando aos resultados obtidos para o mesmo item com os alunos de graduação, não há mudanças consubstancias, uma vez que a grande maioria assinala a sentença como V, sem levar em conta a existência de outros espaços geométricos, além do euclidiano. Justificativas apresentadas mostram terem levado em conta tratar-se de Geometria Euclidiana, algumas delas transcritas a seguir.

Gráfico 8 - Respostas de mestrandos e doutorandos ao item a).



MFR$_1$: *Na Geometria Esférica, a soma dos ângulos internos de um triângulo pode assumir valores diferentes de 180º). Geometria Esférica: G.E.*
MFR$_2$: *Na Geometria Euclidiana é V; na Geometria Não Euclidiana é F. Vou considerar a Geometria Euclidiana, pois é com base nela que trabalho com os alunos na Educação Básica.*

Na última escrita, percebe-se, claramente, a não-inclusão de Geometrias Não-Euclidianas na escola básica. Mesmo a mestranda tendo demonstrado ter algum conhecimento dessas geometrias, não a incorpora em suas aulas como professora atuante.

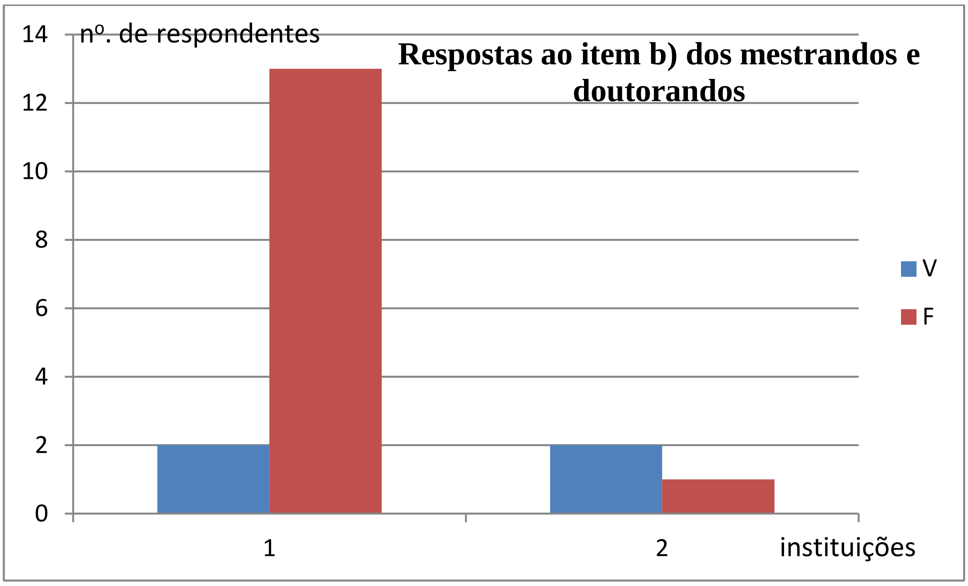
MFR$_5$: *Dado um triângulo equilátero,*[faz um rascunho indicando o ângulo externo α] *o ângulo externo α é 360:3=120. Então, o ângulo interno é 60. Para um triângulo qualquer, o argumento é similar.*

MFG$_1$: *Se estivermos levando em consideração outras geometrias que não a Euclidiana.*

Esse aluno não apresenta justificativa a nenhum outro item. DFG$_1$ não faz argumentação sobre nenhum dos itens.

As respostas dos mestrandos e doutorandos ao segundo item do questionário são ilustradas no gráfico 9, a seguir. Observa-se, novamente, que a maioria absoluta dos estudantes da instituição 1 pensam na Geometria Euclidiana e, por isso, assinalam como falsa a afirmação da existência de triângulos cuja soma dos ângulos internos é menor do que 180º. As justificativas ficam em torno dessa geometria. A de MFR$_5$: *a soma dos ângulos internos de um polígono é (n-2)180, então a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180,* parece confirmar esse fato.

Gráfico 9 - Respostas de mestrandos e doutorandos ao item b).



O gráfico 10, a seguir, fornece os dados relativos ao item c). Nele, observa-se que a maioria assinala como verdadeira a afirmação da não-inexistência de triângulos cuja soma dos ângulos internos é 270º. Nenhum deles se refere à Geometria de Riemann, na qual isso é possível. Alguns ensaios de justificativa fazem alusão somente à Geometria Euclidiana. A figura 2 ilustra um triângulo trirretângulo no espaço geométrico esfera, em que os lados do triângulo são partes de circunferências máximas, isto é, as geodésicas ou 'retas' desse espaço, as quais, sendo intersecção da superfície esférica com um plano coordenado, formam em cada ponto A, B e C, ângulo reto. Portanto, o triângulo esférico ABC tem por soma dos ângulos internos 270º.

Gráfico 10 - Respostas de mestrandos e doutorandos ao item c).

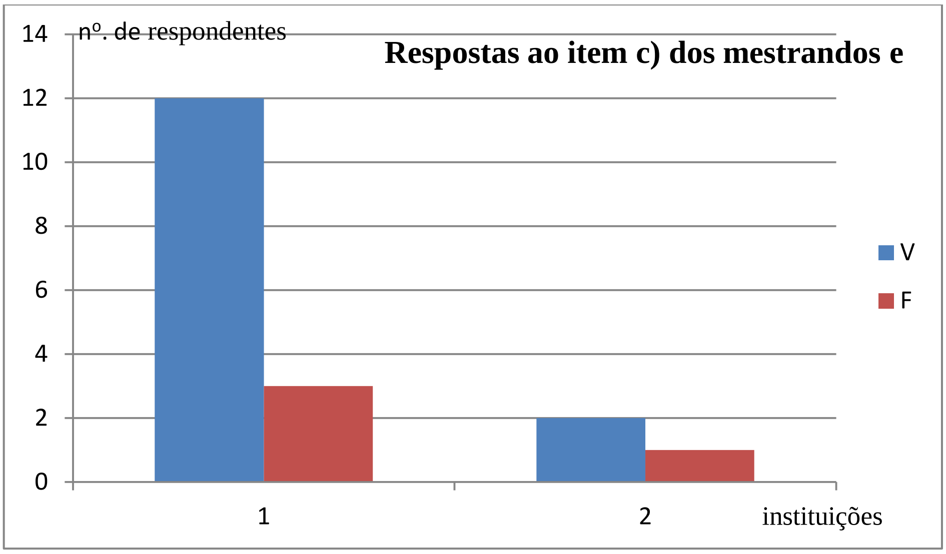
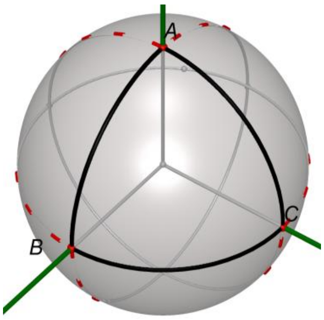


Figura 2 - Triângulo geodésico trirretângulo na esfera.



Fonte: autoria própria.

No gráfico 11, a seguir, um aluno da instituição 1 teve sua resposta anulada. Novamente, observa-se que os respondentes, em sua quase totalidade, só levaram em conta o axioma das paralelas na Geometria Euclidiana, uma vez que consideraram ser falsa a possibilidade de obter retas paralelas a uma reta dada passando por um ponto fora dela, como ocorre na Geometria Hiperbólica (figura 1). Isso é reforçado nos ensaios de justificativas que relacionam o fato à Geometria Euclidiana. A figura 3 fornece outro modelo para Geometria Hiperbólica, a pseudo-esfera, na qual se pode visualizar geodésicas e o axioma das paralelas nessa superfície.

Gráfico 11 - Respostas de mestrandos e doutorandos ao item d).

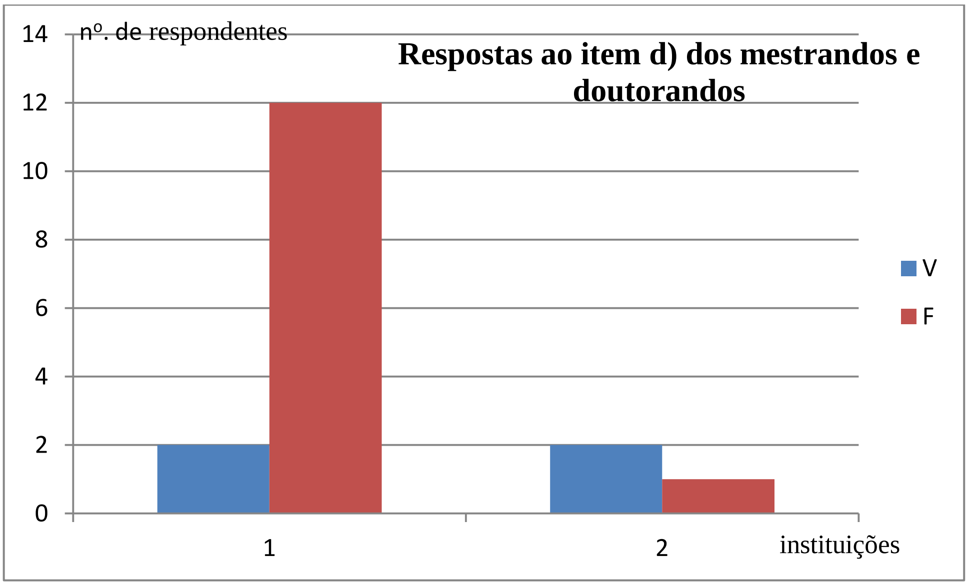
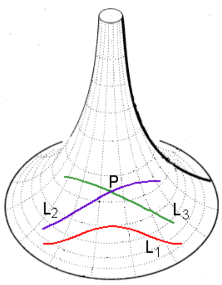


Figura 3. Pseudo-Esfera.



Fonte: capturado da internet:

<http://www.searadaciencia.ufc.br/donafifi/hiperbolica/hiperbolica5.htm> em 17mai2013.

Os dados do gráfico 12, a seguir, reforçam a ideia de certo desconhecimento dos estudantes, para abordar fatos de outras geometrias, a não ser a Euclidiana. Nele, verifica-se que apenas dois alunos de cada instituição consideram a sentença falsa. Os demais, ao considerá-la verdadeira, estão afetos à Geometria de Euclides. De forma similar, fornecem resposta falsa para a asserção feita na letra f) do questionário, como ilustrado no gráfico 13. Pretendia-se verificar algum conhecimento da Geometria de Riemann, mas apenas três alunos consideraram a sentença como verdadeira. Somente justificou a resposta o aluno MFR_1*: Se em tal espaço geométrico não valer o postulado das paralelas, enunciado por Euclides.* Dessa justificativa, pode-se intuir que o aluno tinha algum conhecimento dessa geometria, mas é impossível concluir se os outros o tinham.

Gráfico 12 - Respostas de mestrandos e doutorandos ao item e).

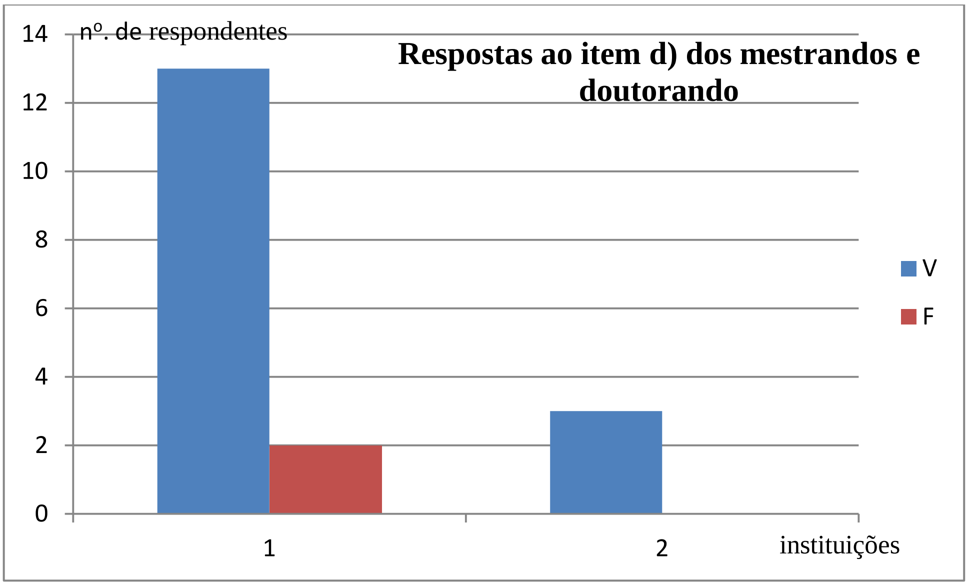
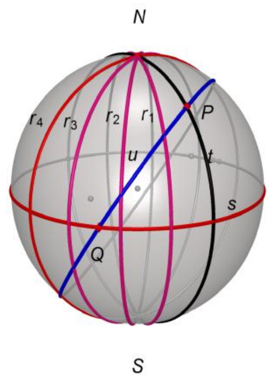


Figura 4 - Geodésicas na esfera.



Fonte: construção do autor.

A figura 4 ilustra um ponto P não pertencente às retas r_1, r_2, r_3, r_4 e s (circunferências máximas ou geodésicas). Qualquer geodésica, passando por P (t e u, por exemplo), é também uma circunferência máxima da esfera e, portanto, corta qualquer outra em dois pontos distintos de P.

Gráfico 13 - Respostas de mestrandos e doutorandos ao item f).

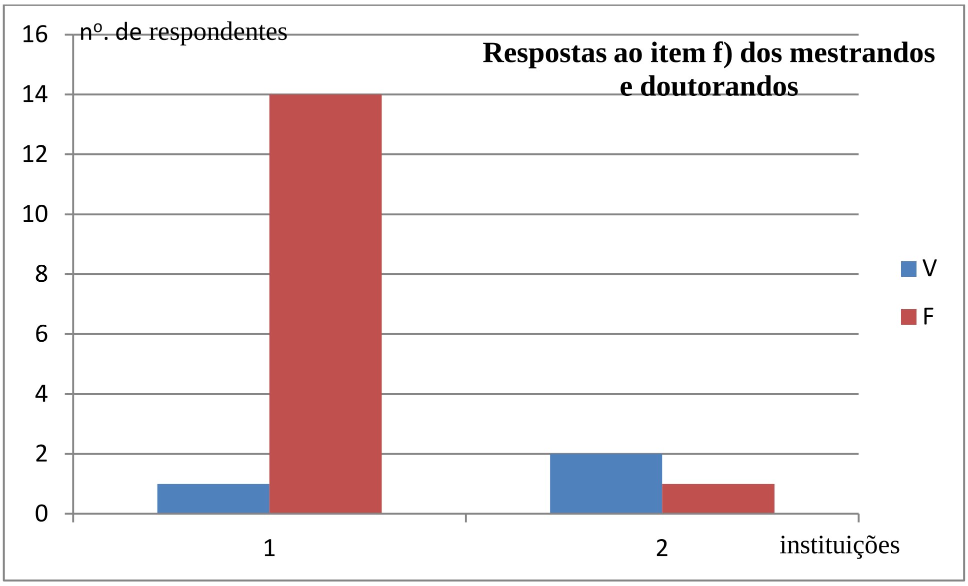
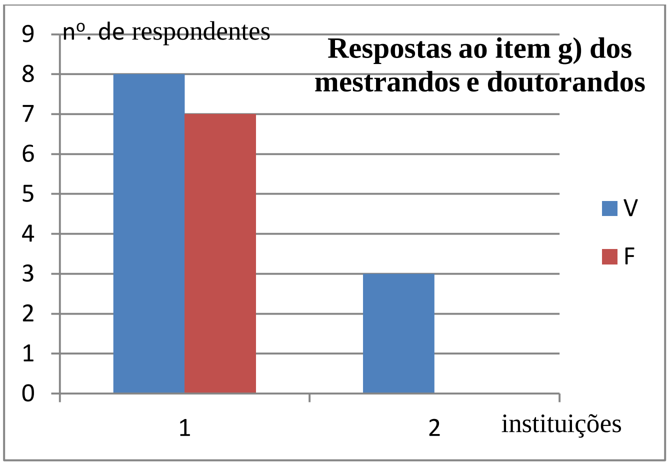


Gráfico 14 - Respostas de mestrandos e doutorandos ao item g).



Verificou-se que todos os alunos da instituição 2 consideraram verdadeira a afirmação de existirem espaços geométricos nos quais não há quadrados e nem retângulos. Quanto à instituição 1, as respostas ficaram divididas entre os que a consideram verdadeira e os que a consideram falsa. Pelas indicações dos estudantes, principalmente os da instituição 1 nas respostas anteriores, pode-se perceber que houve restrição das respostas à Geometria Euclidiana. Muito embora tenham demonstrado algum conhecimento de Geometrias Não-Euclidianas, pareceram inseguros quanto a relacionar seus conteúdos.

Isso fica evidente nas justificativas apresentadas por MFG_2. Em quase todas as alternativas, argumentou algo a respeito de suas respostas estarem considerando a Geometria Euclidiana, como pode ser observado a seguir.

a) MFG_2: V. *Se estivermos considerando a Geometria Euclidiana a afirmação é válida*.

b) MFG_2: V. *É possível, se falarmos em triângulos na geometria não-euclidiana*.

c) MFG_2: V. Não justifica.

d) MFG_2: F. *Geometria Euclidiana: dada uma reta r e um ponto P que não pertence a r, por P passa uma única reta paralela a r. Se consideramos a Geometria não-Euclidiana, a afirmação é válida.*

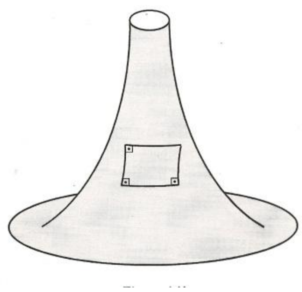
e) MFG_2: V. *Se considerarmos a Geometria hiperbólica.*

f) MFG_2: V. *Geometria hiperbólica.*

Ao atribuir valor V às asserções b), d), e) e f), dá indícios de algum conhecimento de Geometrias Não-Euclidianas, embora argumente de forma equivocada.

Nas tentativas de provar o quinto postulado de Euclides, foi criado o quadrilátero de Lambert, com três ângulos retos e um ângulo agudo. Nesse quadrilátero, por exemplo, o lado vertical adjacente ao ângulo agudo é maior do que o lado oposto, como pode ser observado na figura 5. A Geometria Hiperbólica pode ser aplicada à superfície da pseudo-esfera.

Figura 5 -Quadrilátero de Lambert na Pseudo-Esfera.



Fonte: Coutinho (2001, p.60).

CONCLUINDO

Neste artigo, apresentaram-se resultados de uma pesquisa envolvendo noventa alunos de graduação e dezoito de pós-graduação de seis instituições gaúchas, em nível de mestrado e doutorado. A formação dos indivíduos é de Licenciatura em Matemática e alguns são professores que atuam na escola básica gaúcha.

Por meio de um questionário, envolvendo sete sentenças afirmativas, abarcando conteúdos de Geometria Euclidiana, Geometria Elíptica e Geometria Hiperbólica, sem explicitar a qual se referiam, buscou-se verificar se os investigados apresentavam algum conhecimento que permitisse afirmar sobre a veracidade ou falsidade das mesmas. No espaço destinado à justificativa da escolha, esperava-se que as mesmas fossem apresentadas, mesmo que ingênua e superficialmente, demonstrando alguma informação a respeito do conhecimento dessas geometrias.

Como já obtido em outras pesquisas realizadas pelo pesquisador, foi possível comprovar a hipótese de que nos cursos de formação de professores, no RS, há pouca informação a respeito de Geometrias Não-Euclidianas. Dessa forma, o docente que atua na escola básica não incorpora à sua prática outras noções a menos das euclidianas, não adquirindo uma formação mais ampla para seu exercício profissional, como indicado por Brito (1995).

Com isso, torna-se impossível estimular os estudantes a novas aprendizagens de conteúdos que podem despertar para outros estudos ligados a diversas áreas do conhecimento humano e, portanto, prepará-los para o exercício da cidadania no sentido de formação em áreas onde a Matemática desempenha papel fundamental. Esse é o caso das Geometrias Não-Euclidianas, cujos conteúdos podem ser empregados em diversos referenciais, em coordenadas na superfície terrestre, na navegação aérea e na marítima, em distâncias não euclidianas, para citar algumas aplicações.

Espera-se que este trabalho possa ser útil para uma reflexão a respeito da inclusão do tema, nos currículos de formação de professores, no estado do RS, e que ações continuadas possam suprir as lacunas deixadas naqueles que já concluíram sua formação.

Salienta-se que proporcionar conhecimentos de outras geometrias, além da euclidiana, como a topológica e a fractal, além das aqui caracterizadas como Não-Euclidianas, pode ser útil para a aquisição de uma cultura geométrica pelo professor, como indicado em Leivas (2005/2006).

REFERÊNCIAS

BRASIL. (1998) Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 148 P.

BRITO, A. de J. (1995). **Geometrias não-euclidianas**: um estudo histórico-pedagógico. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Campinas, SP: [s.n.], 189p.

CAMARGO, K. C.A. (2012). **A expressão gráfica e o ensino de geometrias não euclidianas**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Paraná. Curitiba, PR:[s.n.], 144p.

CAVICHIOLO, C. V. (2011). **Geometrias Não Euclidianas na formação inicial do professor de Matemática**: o que dizem os formadores. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Paraná. Curitiba, PR:[s.n.], 162p.

COUTINHO, L. (2001). **Convite às geometrias não-euclidianas**. 2. ed.-Rio de Janeiro: Interciência.

DENZIN, N. K,; LINCOLN, Y. S. (1994). **Handbook of qualitative research**. Califórnia: Sage Publications, Califórnia.

EUCLIDES, **Os elementos**. (2009). Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora da UNESP.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. (2006). **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados.

LEIVAS, J.C.P. (2005/2006). Estimulando cultura geométrica para a escola básica. **In**: Educação Matemática em Revista – RS, Canoas, n. 7, pp.43-51, 2005/2006.

LEIVAS, J.C.P. (2009). **Imaginação, Intuição e Visualização**: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009, 294 p.

LEIVAS, J.C.P.; SOARES, M.T.C. (2011). Triângulos Diferentes: dos planos aos geodésicos. **In**: Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.13, n.1, pp.77-93, 2011.

MOREIRA, M.A. (2011). **Medodologias de Pesquisa em Ensino**. São Paulo: Editora Livraria da Física.

PARANÁ. (2008)Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**. Curitiba, PR. Disponível em: <http://www.diadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/diretrizes_2009/matematica>. Acesso em: 13/5/2013

STRUIK, D. J. (1997). **História concisa das matemáticas**. 3.ed. Lisboa: Gradiva.