A resolução de problemas em ciências com equações diferenciais ordinárias de 1ª e 2ª ordem usando análise gráfica.

Problem solving in sciences with first and second-order ordinary differential equations using graphical analysis.

ANÍBAL ATAIDES BARROS FILHO[1]

JOÃO BOSCO LAUDARES[2]

DIMAS FELIPE DE MIRANDA[3]

Resumo

Neste artigo são apresentados resultados de uma Pesquisa de Mestrado que objetivou buscar as contribuições das metodologias de Resolução de Problemas e Descoberta Guiada com situações problemas das Ciências, mediadas por Tecnologias de Informação e Comunicação, visando uma aprendizagem mais significativa de Equações Diferenciais Ordinárias - EDOs. Foram elaboradas cinco atividades com EDOs de 1ª e 2ª ordem, usando as abordagens analítica e geométrica com ênfase na análise gráfica apoiada pelo software Maple. Neste artigo é apresentada uma das atividades com sua estrutura e resolução. A análise dos dados permitiu inferir que o ambiente criado, as interações e as negociações de significados entre estudantes, bem como os recursos computacionais, proporcionaram uma aprendizagem mais efetiva de EDOs.

Palavras-chave: *Ensino e Aprendizagem de Equações Diferenciais; Problemas das Ciências; Análise Gráfica.*

Abstract

This article presents results of a master's degree research that aimed to gather the contributions of the methodologies of Problem Solving and Guided Discovery with Sciences problem situations, mediated by Information and Communication Technologies, aiming at a more significant Ordinary Differential Equations – ODEs learning. Five activities with first and second-order ODEs were prepared, using the analytical and geometrical approaches with emphasis on graphical analysis supported by the Maple software. This article presents one of the activities with its structure and resolution. The data analysis allowed us to infer that the environment that was created, the interactions and the negotiations of meanings among students, as well as computational resources, provided a more effective ODEs learning.

Keywords: *Teaching and Learning of Differential Equations; Sciences Problems; Graphical Analysis.*

[1] Mestre em Ensino de Ciências e Matemática - PUC Minas. Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Jataí. anibalabf@gmail.com

[2] Doutor em Educação: História e Filosofia da Educação – PUC SP. Professor Titular da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. jblaudades@terra.com.br

[3] Doutor em Tratamento da Informação Espacial – PUC MG. Professor Adjunto da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. dimasfm48@yahoo.com.br

INTRODUÇÃO

Neste artigo são apresentados resultados de uma Pesquisa de Mestrado na qual foram elaboradas e desenvolvidas atividades envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias - EDOs de primeira e segunda ordem, em problemas das Ciências com o apoio do *software* Maple.
O ensino de Equações Diferenciais Ordinárias vem tendo algumas transformações ao longo das últimas décadas. A forma tradicional de ensino, enfatizando a resolução das EDOs apenas, tem sido articulada com outras estratégias que visam dinâmicas diferentes nos processos de ensino e aprendizagem.

De acordo com Javaroni (2007) e Dullius (2009), estas mudanças podem contribuir para que o ensino das EDOs seja mais significativo para o aluno quando as três abordagens: analítica-algébrica, geométrica-gráfica, numérica podem ser trabalhadas com o auxílio das Tecnologias de Informação e Comunicação - TICs, especialmente os *softwares* matemáticos. O processo de visualização e o entendimento de derivada como taxa de variação são essenciais na análise gráfica das soluções das EDOs, especialmente quando se trabalha com modelos matemáticos.

Foram selecionadas duas abordagens de ensino para o desenvolvimento das atividades propostas na Pesquisa. A primeira consiste na Descoberta Guiada, na qual o estudante pode experimentar e fazer Matemática. A segunda trata da Resolução de Problemas, em que o problema é o ponto de partida das atividades matemáticas e provocador do processo de construção de conhecimentos. A visualização foi explorada a partir da construção e análise gráfica das equações que modelam o fenômeno estudado.

Para o embasamento teórico, realizou-se um levantamento bibliográfico da produção acadêmica do ensino das EDOs, constatando que esta é muito reduzida. Privilegiou-se também a análise da produção dos temas Descoberta Guiada, Resolução de Problemas e Visualização como referenciais teóricos da metodologia empregada.

Quanto a análise de Livros Didáticos, foram estudados os de ZILL (2003) e STUART (2007), entre outros, que enfatizam em suas obras a resolução de problemas com interpretação gráfica, evidenciando a análise das EDOs e de suas soluções com a mesma importância das técnicas de resolução.

1. Descoberta Guiada

Em 1959, na conferência de Woods Hole, em Massachussetts, cientistas, psicólogos e educadores discutiram como melhorar o ensino das ciências nas escolas. A conferência foi presidida pelo educador e psicólogo Jerome Seymour Bruner (Nova Iorque, 1915) da Universidade de Harvard. Bruner contribuiu para a apresentação de um modelo de ensino que se denominou de ensino “pela descoberta”. Neste modelo, os alunos descobrem suas próprias ideias e constroem seus próprios significados, é uma experiência de aprendizagem centrada no aluno.

Mayer (2004) estabelece uma crítica à aprendizagem direta e reforça que o aluno memoriza com maior facilidade pela abordagem não investigativa. O professor e o aluno devem envolver-se num diálogo ativo (aprendizagem socrática). A tarefa do professor é traduzir a informação a ser aprendida num formato apropriado para o estado de entendimento atual do aluno.

O mesmo autor apresenta resultados de testes de três linhas de pesquisa pedagógica: (i) o ensino por hipóteses e estratégias de descoberta para resolver problemas, (ii) aprendizagem de estratégias de conservação do tipo piagetiano e (iii) aprendizagem de estratégias de programação, usando o programa LOGO. Comparou os resultados com pesquisas de objetivos semelhantes e verificou que nos três conjuntos de casos, após várias comparações, em cada um, são favorecidas as abordagens de descoberta guiada, em detrimento de abordagens que estimulam uma exploração desestruturada, preconizadas pelos chamados modelos construtivistas. O suporte teórico do ensino pela descoberta guiada provém da Psicologia Cognitivista. O professor deve se portar como um guia e facilitador que conduz os alunos a pensar e a resolver problemas por si próprios, muito além da tradicional aula expositiva mesmo a dialogada.

Os modelos de ensino centrados no aluno se baseiam em pressupostos das teorias cognitivas e construtivistas. O papel do professor consiste em estabelecer condições para que os alunos adquiram conhecimentos, dando-lhes autonomia e opções de escolha. O aluno desenvolve um papel ativo na sua aprendizagem, participa de investigações e de resolução de problemas. O professor passa a ser um facilitador da relação entre o aluno e o conhecimento, planejando atividades que gerem ações e reflexões em relação ao tema estudado. Em vez de repassar ao aluno uma enorme quantidade de informações, cria estratégias que torna o aprendizado ativo.

O método da descoberta guiada assume várias formas: estudo de caso, resolução de problemas, experiência em laboratório, simulações, dentre outras. Paul Ernest (1996, p.32) faz uma comparação (quadro um autoexplicativo) entre os métodos pedagógicos baseados na inquirição para o ensino de matemática.

O aluno pode trabalhar em grupo ou individualmente, sempre com o intuito de atingir os objetivos traçados pelo professor e ou negociados.

A heurística da descoberta guiada proporciona motivação, autoconfiança, *feedback*, organização dos conhecimentos com a transferência na solução dos futuros problemas.

Quadro 1 - Comparação de Métodos Baseados na Inquirição para o Ensino da Matemática.

Método	Papel do Professor	Papel do Aluno
Descoberta Guiada	Formula o problema ou escolhe a situação com o objetivo em mente. Conduz o aluno para a solução ou objetivo.	Segue a orientação
Resolução de Problemas	Formula o problema. Deixa o método de solução em aberto.	Encontra o seu próprio caminho para resolver o problema.
Abordagem Investigativa	Escolhe uma situação de partida (ou aprova a escolha do aluno).	Define os seus próprios problemas dentro da situação. Tenta resolver pelo seu próprio caminho.

Fonte: Paul Ernest (1996, p.32).

As principais características do ensino baseado na descoberta guiada são:

a) sobressai o aspecto cognitivo;
b) o papel do professor é de incentivador, orientador. Faz a condução indireta ao conhecimento;
c) baseia-se no princípio da equilibração de Piaget;
d) engloba a auto avaliação/reflexão e reformulação da aprendizagem;
e) existe uma relação informal entre professor e aluno.

2. Resolução de Problemas

No início da década de setenta, os educadores matemáticos passaram a dar mais atenção à resolução de problemas. A prática, então utilizada, que levava o estudante ao domínio de procedimentos algorítmicos, adquiridos por meio de trabalhos de repetição e exercícios mentais, começava a ser questionada.

Em 1980, foi produzido nos Estados Unidos um documento (*An Agenda for Action*) pelo National Council of Teachers of Mathematics-Conselho Nacional de Professores de Matemática - NCTM, que enfatizava o uso da resolução de problemas, como metodologia para o Ensino da Matemática e a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, na aprendizagem da Matemática. Este documento recomendava aos professores a envidar esforços no sentido de estimular os alunos a adquirirem habilidades para resolver problemas. As ideias veiculadas nesse documento influenciaram reformas mundiais e algumas propostas elaboradas no Brasil, sofreram influências diretas deste documento.

Durante a década de oitenta, muitos recursos didáticos foram produzidos e utilizados para contribuir com os professores na perspectiva de tornar a resolução de problemas o foco da Matemática escolar, no entanto, devido a divergências de concepções de grupos e pesquisadores em relação à resolução de problemas, nesta década, a técnica não logrou muito êxito.

George Polya (1888-1985) no seu livro "*How do solve it"* lançado em 1945, traduzido para o português em 1978 com o título "A Arte de Resolver Problemas", contribuiu para que a resolução de problemas se fundamentasse como metodologia de ensino.

Polya (1966) defendia a ideia de que o principal objetivo da educação é o desenvolvimento da inteligência, isto é, ensinar o aluno a pensar. Para este autor:

> se a educação não contribui para o desenvolvimento da inteligência, ela está obviamente incompleta. Entretanto, a inteligência é essencialmente a habilidade para resolver problemas: problemas científicos, quebra-cabeças, toda sorte de problemas. O aluno desenvolve sua inteligência usando-a; ele aprende a resolver problemas resolvendo-os. (POLYA, 1966, p.137).

Para o mesmo autor, os alunos devem aprender Matemática com mais compreensão do que mecanicamente. Apesar deste objetivo ser audacioso, provoca resultados mais rápidos e permanentes com probabilidades maiores de sucesso na aprendizagem.

Segundo Pozo (1998), as pesquisas em resolução de problemas seguem duas tendências gerais de abordagem: a solução de problema como uma habilidade geral e a solução de problemas como processo específico.

A primeira abordagem tem

> [...] a idéia de que a solução de problemas se fundamenta na aquisição de estratégias gerais, de forma que uma vez adquiridas possam ser aplicadas com poucas restrições a qualquer tipo de problema. Com base nesse enfoque, ensinar a resolver problemas é proporcionar aos alunos essas estratégias gerais, para que eles as apliquem cada vez que se deparem com uma situação nova ou problemática (POZO, 1998, p.18).

Para Stanic & Kilpatrick (1990), três temas gerais caracterizam o papel da resolução de problemas nos currículos de Matemática das escolas: resolução de problemas, como contexto; resolução de problemas, como capacidade; resolução de problemas, como arte.

Para Gazire (1988) existem três perspectivas para a resolução de problemas:

a) Como um novo conteúdo: leva-se o aluno ao conhecimento de várias técnicas e estratégias de resolução de problemas contribuindo para o mesmo desenvolver habilidade em resolver problemas. Esse é o estudo do problema pelo problema, independentemente do conteúdo.
b) Como forma de ministrar um determinado conteúdo: aprende-se melhor um conteúdo quando ele é ministrado na resolução de problemas. É o estudo do conteúdo por meio de aplicações em problemas, ou seja, o exercício do conteúdo.
c) Como um meio de ensinar Matemática: todo o conteúdo a ser aprendido é iniciado por um problema-desafio, ocorrendo uma construção interiorizada do conhecimento a ser adquirido.

3. O processo de visualização

Nos dias atuais, os processos educativos exploram as imagens por meio dos livros, revistas, vídeos, filmes, fotografias, *softwares* matemáticos com grande aceitação pela comunidade acadêmica.

Para Couy e Frota,

> visualizar é um processo de criar e/ou interpretar e registrar idéias e imagens, que por sua vez podem desencadear novas idéias e imagens. Nessa perspectiva a visualização é parte do conjunto de processos de fazer Matemática, ao lado da intuição, criação, abstração, formalização, comunicação, entre outros, podendo ao mesmo tempo impulsionar o desenvolvimento de tais processos. (COUY; FROTA, 2009, p. 4).

As mesmas autoras destacam que foi a partir dos anos 90 que as pesquisas sobre visualização ganharam força e reconhecimento como campo significativo de pesquisa da educação matemática com diversas publicações em nível mundial.

Machado (2008) analisa o conhecimento trazido pelos estudantes de um Curso de Química na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, a influência que o uso do *software Mathematics Plotting Package* (MPP) exerce sobre a construção do conhecimento matemático com enfoque especial para as representações gráficas e para os processos de visualização. A pesquisadora ressalta que tais representações gráficas e visualizações dos conceitos matemáticos não são triviais, exigem de quem os utilize, uma atividade cognitiva. Para Machado,

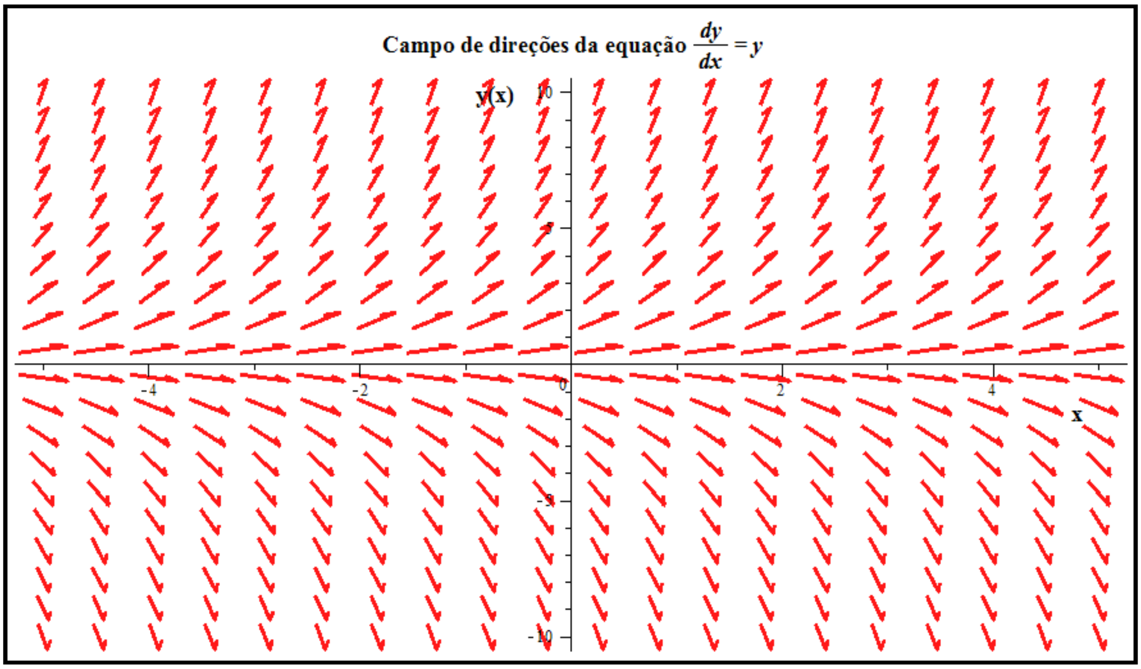
> visualizar não é o mesmo que ver. [...] visualizar é desenvolver uma habilidade para criar imagens mentais daquilo que o indivíduo manipula. Nisto estimula a sua mente para diferentes representações do conceito e, se necessário, utiliza papel e lápis, o visor da calculadora ou a tela do computador, para explorar, analisar e compreender a idéia matemática em questão. (MACHADO, 2008, P.10).

Por meio de *softwares* matemáticos, os estudantes podem visualizar na tela do computador os mais diversos gráficos, investigar, analisar, estabelecer proposições e conjecturas, validar resultados, relacionar variáveis e funções e construir várias representações da informação que auxiliam na resolução de problemas e na construção dos conceitos matemáticos.

No estudo das Equações Diferenciais de primeira ordem, a visualização do campo de direções de uma determinada equação é relevante, sugere a aparência ou forma de uma família de curvas integrais da equação, em que podemos vislumbrar aspectos qualitativos das soluções.

A visualização matemática, por meio da tela do computador, permite ao estudante enumerar várias conjecturas, aproximar soluções, interpretar gráficos, reconhecer as várias representações da informação, construir conceitos, dentre outras possibilidades. Por exemplo: a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = y$ apresenta o seguinte campo de direções:

Figura 1 - Campo de direções da equação $dy/dx = y$ gerado no Maple 14.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O campo de direções, visualizado em uma malha 20 X 20 na figura 01 mostra que em qualquer ponto ao longo do eixo $x(y = 0)$ as inclinações são $f(x, 0) = 0$, de tal forma que os elementos lineares (segmento de reta em um ponto é uma miniatura da reta tangente à curva integral que passa por esse ponto) são horizontais. Pode-se observar que nos dois primeiros quadrantes, que para um valor fixo de x, os valores de $f(x, y) = y$ crescem à medida que y cresce; da mesma forma, para um valor fixo de y, os valores de $f(x, y) = y$ aumentam à medida que x aumenta. Isso evidencia que, quando x e y aumentam, os elementos lineares ficam quase verticais e têm inclinação positiva $(f(x, y) = y > 0$ para $y > 0)$.

No terceiro e quarto quadrante a situação é inversa, uma curva integral sempre decresce à medida que se vai da esquerda para a direita, os elementos lineares novamente ficam quase verticais, mas tem inclinação negativa $(f(x, y) = y < 0$ para $y < 0)$. Observando da esquerda para a direita, acompanhando o fluxo dos elementos lineares, imagine uma curva integral que comece suavemente em um ponto no segundo quadrante e ao passar para o primeiro quadrante move-se abruptamente para cima. Que tipo de função geraria este gráfico? Esta situação só vai ocorrer se mudar de quadrante?

A análise, por meio de visualizações gráficas, revela características importantes na análise global de um fenômeno estudado.

A visualização do gráfico de uma função por um estudante poderá conduzi-lo a estabelecer conjecturas contribuindo para a formação de conceitos, bem como trabalhar com as formas simbólicas e sanar algumas dificuldades tais como: não reconhecimento das transformações implicadas nos diagramas, incapacidade de visualizar um diagrama de diferentes maneiras, incorrência de erros em unir as suas visualizações com o pensamento analítico. Machado (2008).

Algumas razões, para se investir no desenvolvimento do pensamento visual no ensino estão associadas às apresentações dos fenômenos que transformam as tabelas e fórmulas carregadas de números e símbolos em apresentações visuais dinâmicas na tela do computador, ao pensamento visual e a confiança nos poderes gráficos e dinâmicos das ferramentas tecnológicas, à visão da matemática como uma estrutura lógica na qual ela seja um processo de conjecturar, justificar ou refutar, em ambientes experimentais, envolvendo o uso de objetos visuais.

4. O ensino de equações diferenciais – produção acadêmica

Para Dullius (2009) e Javaroni (2007), a metodologia predominante usada no ensino de EDOs potencializa o enfoque algébrico (sobre o gráfico e o numérico), com ênfase nos métodos e técnicas de resolução analítica das EDOs, o que pode não ser suficiente para um aprendizado significativo.

Dentre os estudos realizados com objetivos de melhorar os processos de ensino e aprendizagem de EDOs destacam-se os trabalhos de Moreno e Azcárate (2003), Javaroni (2007) e Dullius (2009).

A partir dos resultados, os pesquisadores observaram que alunos que apresentavam bom rendimento na resolução analítica de EDOs, não significava que possuíam entendimento dos conceitos. Verificou-se que os alunos provavelmente tinham concepções corretas, no entanto, apresentavam deficiências no uso da linguagem, não conseguiam expressar corretamente o que haviam abstraído. Os alunos confundiam quantidade com taxa de variação da quantidade.

Os autores sentiram a necessidade de mudanças no modo de pensar dos alunos em relação à função que descreve "como a quantidade varia" para um pensamento à respeito da equação que descreve "como a taxa de variação da quantidade varia" (grifos do autor). Muitos estudantes interpretavam os termos de uma EDO como condição inicial, valor máximo ou valor de equilíbrio. Para muitos, as relações entre as variáveis dependentes e independentes estariam explícitas, parte dos estudantes não associavam unidades aos termos das EDOs e nem às constantes de proporcionalidade. Estas inconsistências refletem o fato de que o conhecimento de muitos dos estudantes apresentava-se fragmentado, dependentes do contexto.

Os mesmos autores da pesquisa sugeriram, como forma de melhorar o aprendizado de EDOs, que fossem incluídas mais perguntas conceituais e qualitativas, de forma que os alunos pudessem mudar seus interesses da simples manipulação para a compreensão, e que buscassem equilibradamente e simultaneamente as abordagens analítica, gráfica e numérica para análise de EDOs.

Dullius (2007) destaca situações, extremamente importantes que dificultam os processos de ensino e aprendizagem da matemática, em especial o de EDO: os estudantes não demonstram interesse pelo conteúdo, resolvem mecanicamente as atividades e participam das aulas sem motivação. Segundo os pesquisadores, os alunos não percebem a importância do conteúdo para o seu dia-a-dia e, conforme descrito anteriormente, o ensino de Equações Diferenciais é muito formal, os alunos não conseguem entender a conexão entre estas e a modelagem de um sistema, apresentam dificuldades para interpretar fisicamente os parâmetros de uma EDO.

Com os recursos computacionais disponíveis atualmente, o ensino de EDOs pode ir além do método tradicional de aplicações de técnicas e listas de exercícios desprovidos de significados, como afirmaram os autores Moreno e Azcárate (2003), Javaroni (2007), Dullius (2007), dando condições ao aluno de interpretar os diversos contextos em que podem estar inseridas as EDOs.

5. **Metodologia**

Optou-se por fazer um estudo pela metodologia qualitativa, com interesses em uma análise detalhada da situação investigada. As atividades foram desenvolvidas em sala de aula, em que o professor pesquisador esteve em contato direto com os sujeitos da pesquisa.

Construiu-se cinco atividades envolvendo problemas das Ciências (preferencialmente Física e Química) no contexto das EDOs de primeira e segunda ordem. As atividades eram entregues aos estudantes em forma impressa, a serem desenvolvidas em duplas, com uso exclusivo dos recursos computacionais, em especial o *software* Maple.

Na elaboração das atividades o pesquisador utilizou procedimentos que pudessem ser desenvolvidos por meio do *software* Maple, de tal forma que pudesse investigar se o ambiente criado propiciou condições aos alunos de produzirem conhecimentos acerca de EDOs a partir das abordagens gráfica e geométrica e, se permitiu aos estudantes explorar a interpretação gráfica de diversos modelos matemáticos que são característicos do ensino de EDOs e se configura como foco investigativo da pesquisa aqui analisada.

Assim partiu-se da premissa do estudo de fenômenos naturais e artificiais cujos modelos matemáticos são EDOs. Enfatizou-se a análise destes fenômenos pelos gráficos provocando o estudante para uma interpretação de cada gráfico e da relação entre os mesmos, visando uma compreensão mais relacional e interativa. O uso do software liberou o estudante dos cálculos e traçados dos gráficos incentivando-o a uma postura mais crítica e qualitativa dos fenômenos em estudo.

As atividades foram planejadas com o intuito de diagnosticar indícios de como a Resolução de Problemas e a Descoberta Guiada, com a utilização das TICs, podem contribuir para uma aprendizagem mais significativa do ensino de EDO e, nas suas aplicações em situações problemas das ciências.

Com o objetivo de familiarizar os estudantes com o s*oftware* Maple foi pensado um minicurso ministrado pelo pesquisador e elaborado um texto como material de apoio para uma preparação prévia dos alunos que participaram do desenvolvimento da proposta de ensino discutida neste artigo.

As atividades elaboradas consistiram em cinco problemas das Ciências envolvendo as EDOs Lineares de 1ª e 2ª ordem. O primeiro problema trata de queda livre, o segundo envolve a lei de resfriamento/aquecimento de Newton, o terceiro está relacionado a circuitos elétricos, o quarto aborda desintegração radioativa e o quinto descreve um sistema massa-mola.

As orientações de “ajuda” para os alunos foram confeccionadas em fichas, estavam distribuídas por perguntas e permaneciam à disposição dos mesmos durante todas as atividades, de tal forma que o pesquisador tinha o controle das dúvidas geradas nos diversos grupos, de forma independente, e o número de vezes que cada grupo utilizou as orientações.

A metodologia de desenvolvimento das atividades se baseou nas seguintes passos de Gazire, Laudares e Alves (2006):

a) Leitura do problema.
b) Verbalização do enunciado.
c) Declaração ou definição de variáveis.
d) Identificação da relação das variáveis (dependência e independência).
e) Identificação dos conceitos e modelos matemáticos adequados (leis físicas).
f) Montagem da equação diferencial.
g) Identificação das condições iniciais e de contorno.
h) Determinação do formato da solução (o que o problema pede).
i) Resolução da equação diferencial utilizando o *software* Maple.
j) Construção dos gráficos das leis do problema incluindo as funções derivadas e a função dada utilizando o *software* Maple.
k) Interpretação dos gráficos e das condições iniciais e de contorno, apontando as possíveis soluções.
l) Análise qualitativa e crítica da solução pela “lei” (fórmula matemática) ou pelo gráfico.

Todas as atividades construídas com a resolução das equações diferenciais, relativamente aos significados dos seus parâmetros, bem como a natureza das variáveis, foram situações exploradas analiticamente e graficamente. A construção (plotagem) e análise dos gráficos, inerentes a todas as atividades, foram predominantes na elaboração das mesmas.

Procurando adequar às metodologias da Resolução de Problemas e Descoberta Guiada, as atividades foram elaboradas observando três etapas de investigação:

a) a primeira que se refere à interpretação do enunciado,
b) a segunda à resolução do modelo das equações,
c) a terceira que consiste na análise gráfica dos modelos das equações.

Durante a elaboração das atividades uma preocupação constante permeou o trabalho. Pensou-se em situações que os estudantes estivessem sempre em condições de confrontar resultados por meio das abordagens analítica e geométrica.

6. *Design* da proposição dos problemas que definiram as atividades

A proposição dos Problemas teve um mesmo design de acordo com parâmetros da Metodologia proposta. A apresentação foi bem analítica para facilitar a interpretação dos estudantes. Definiu-se colocar cada etapa do Problema dentro de um Quadro a fim de distingui-las, assim oferecendo uma visualização para leitura e análise.

Esta disposição da apresentação do Problema, por esta estrutura, já define uma Metodologia para leitura compreensiva. Trata-se, então, de um desenho a conduzir o estudante ao adentramento da situação problematizadora. É também um exercício de aprendizagem de leitura de um problema numa abordagem analítica, por passos que, se realizados com reflexão pelo estudante, podem se constituir como elementos facilitadores para a eficaz leitura interpretadora e crítica.

Quadro 2 – Esquema representativo do padrão de apresentação dos problemas.

TEMA DO PROBLEMA
ENUNCIADO
1 – INTERPRETAÇÃO DO ENUNCIADO
VERBALIZAÇÃO **IDENTIFICAÇÃO DAS VARÁVEIS** **MODELO MATEMÁTICO - LEI FÍSICA** **CONDIÇÃO INICIAL OU DE CONTORNO** **O QUE SE PEDE**
2 – RESOLUÇÃO DO MODELO
3 – ANÁLISE GRÁFICA DO MODELO

Fonte: Elaborado pelo autor.

A seguir é apresentada e descrita analiticamente a resolução do problema quatro como exemplo de problema explorado nas atividades propostas.

7. Apresentação e descrição analítica da resolução do problema 4 (quatro) da pesquisa realizada

Neste problema procurou-se investigar por meio de equações diferenciais como determinar a meia-vida (tempo necessário para a metade dos átomos em uma quantidade inicial desintegrar-se ou transformar-se em átomos de outro elemento) do elemento químico *radium*.

Quadro 3 – Esquema representativo do enunciado do problema quatro.

PROBLEMA 04 – QUÍMICA: FÍSICO-QUÍMICA
ENUNCIADO
Sabendo-se que o *radium* se decompõe naturalmente em proporção direta à quantidade presente e que leva 250 anos para decompor 10% de certa quantidade, quantos anos levarão para decompor a metade da quantidade inicial?
Problema extraído do texto *Aplicações das Equações Diferenciais* (*Um enfoque Metodológico*) de João Bosco Laudares, 1992, página 25, problema 15.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 4 – Esquema representativo da interpretação do enunciado do problema quatro.

1 – INTERPRETAÇÃO DO ENUNCIADO
VERBALIZAÇÃO
a) Como você descreve este problema? Ajuda a
IDENTIFICAÇÃO DAS VARIÁVEIS
a) Qual a variável independente do problema? Ajuda a b) Qual a variável dependente do problema? Ajuda b c) Qual é o parâmetro do problema? Ajuda c
MODELO MATEMÁTICO - LEI FÍSICA
a) Qual a lei matemática que se aplica ao problema? Ajuda a
CONDIÇÃO INICIAL OU DE CONTORNO
a) Qual a condição inicial do problema? Ajuda a b) Qual a condição de contorno do problema? Ajuda b
O QUE SE PEDE
a) Expresse o que se pede. Ajuda a

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 5 – Esquema representativo da resolução do modelo do problema quatro.

2 – RESOLUÇÃO DO MODELO
Obs.: Todas as atividades solicitadas neste item devem ser desenvolvidas com o *software* MAPLE. a) Resolva a equação diferencial $\frac{dm}{dt} = k \cdot m$. Ajuda a b) Calcule os valores dos parâmetros *k* e *_C1*. Ajuda b c) Determinar a equação que permite calcular a massa em função do tempo. Ajuda c d) Calcule o tempo necessário à decomposição da metade da quantidade inicial de *radium*, $m(t) = 1/2$. Ajuda d

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 6 – Esquema representativo da análise gráfica do modelo do problema quatro.

3 – ANÁLISE GRÁFICA DOS MODELOS
a) Construa o campo de direções para a equação diferencial $\frac{dm}{dt} = k \cdot m$ Ajuda a b) Observando o campo de direções da equação $\frac{dm}{dt} = k \cdot m$, podemos dizer que se o tempo tende ao infinito, a massa tende a zero? Ajuda b c) Que tipo de função poderíamos aproximar observando o campo de direções? Ajuda c d) É possível definir o sinal de $\frac{dm}{dt}$ observando o campo de direções? Em caso afirmativo, estabeleça o valores de *m* para os quais $\frac{dm}{dt} > 0$, $\frac{dm}{dt} = 0$ e $\frac{dm}{dt} < 0$. Ajuda d e) Construa o gráfico de $\frac{dm}{dt}$ por *m*. Ajuda e

f) Comparar os valores obtidos no item **d** com o gráfico $\frac{dm}{dt}$ por m.

Ajuda f

g) É possível observar no campo de direções um valor aproximado de m que representa soluções de equilíbrio da equação diferencial?

Ajuda g

h) Construa o gráfico de $\frac{dm}{dt}$ por t.

Ajuda h

i) O que acontece com a taxa de variação da massa com o passar do tempo?

Ajuda i

j) Qual o período em que a taxa $\frac{dm}{dt}$ apresenta maior variação?

Ajuda j

k) Construa o gráfico de $m(t)$ por t.

Ajuda k

l) O que acontece com a massa quando o tempo é suficientemente grande?

Ajuda l

m) Qual o sinal de $\frac{dm}{dt}$? Ajuda m

n) Verifique se é coerente o valor de m para $t = 0$ no gráfico de $m(t)$ por t de acordo com o dado do problema.

Ajuda n

o) Resolva graficamente o Problema de Valor de Contorno (PVC): $\frac{dm}{dt} = k \cdot m$

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow m = 1\ (100\%) \\ t = 250 \Rightarrow m = 0.9\ (90\%) \end{cases}.$$

Ajuda o

p) Verifique se é coerente a solução gráfica do PVC com o gráfico obtido em **k**.

Ajuda p

Fonte: Elaborado pelo autor.

Além de exercitar a interpretação de texto, o estudante pode por meio deste problema:

a) diferenciar condição inicial de condição de contorno;
b) resolver equações diferenciais;

c) resolver sistemas lineares;
d) construir e interpretar campo de direções;
e) identificar o sinal da derivada observando o campo de direções;
f) construir e interpretar gráficos envolvendo derivadas;
g) comparar gráficos para confirmação de resultados;
h) identificar soluções de equilíbrio no campo de direções;
i) resolver problema de valor de contorno.

8. Análise do desenvolvimento das atividades

Para a coleta dos dados, utilizaram-se registros feitos pelo pesquisador em sua caderneta de campo, as *worksheets* dos estudantes com as resoluções das atividades, os vídeos gerados pelo *software* Camtasia com as gravações das ações dos estudantes no decorrer da realização das atividades e respostas dos questionários enviados aos estudantes com objetivo de buscar evidências de atuação dos mesmos, suas opiniões e percepções a respeito da proposta.

As atividades foram realizadas pela turma de Equações Diferenciais do 3º período do curso de Engenharia Elétrica do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás-Câmpus Jataí, no segundo semestre de 2011. A escolha da turma se deu em função da disposição do professor em apoiar a pesquisa, cedendo espaços durante o curso para o desenvolvimento das atividades, se inteirando das mesmas e em alguns momentos participando com os alunos. Todos os estudantes permitiram que seus nomes originais fossem utilizados. A turma era composta de quatorze estudantes. Foram formadas sete duplas. Todos os participantes já haviam cursado as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e II.

Como método de trabalho, ficou acordado entre pesquisador e participantes que após a realização das atividades diárias, seriam gerados dois arquivos, um pelo software Maple descrevendo as atividades desenvolvidas pelas duplas e outro pelo software Camtasia Studio com as imagens das ações realizadas pelos estudantes. O arquivo gerado pelo Maple poderia ser enviado via e-mail para o pesquisador e o arquivo gerado pelo Camtasia Studio seria repassado ao pesquisador via *pen-drive*, por se tratar de arquivos com armazenamento de muitos dados, inviável de ser enviado por e-mail.

A dupla Gabriel e Leonardo, após um breve diálogo com os participantes da pesquisa e professor pesquisador, descreveu, verbalmente o problema mostrando total compreensão do mesmo.

Todas as duplas identificaram corretamente as variáveis dependente e independente do sistema. A dupla Caio e Russyllianno apresentou a única resposta correta para identificação do parâmetro. Fica evidenciada a dificuldade dos estudantes na definição de parâmetro. Esta questão mostrou o maior número de erros dos estudantes na resolução deste problema, preponderantemente pelo fato da constante de proporcionalidade não estar explícita no enunciado do problema. Esta mesma dupla descreveu o modelo matemático em termos de decrescimento, não apresentando a equação matemática. As demais duplas apresentaram a EDO $dm(t)/dt = k \cdot m(t)$ como o modelo matemático que define o problema. As duplas identificaram o que foi solicitado no problema e, apresentaram corretamente as condições iniciais e de contorno.

A resolução do modelo sugere que os estudantes resolvam a EDO $dm(t)/dt = k \cdot m(t)$, determine os valores dos parâmetros k e $\_C1$ da solução geral da EDO, encontre a equação que permite calcular a massa em função do tempo e calcule a meia-vida do *radium*. Todas as duplas apresentaram respostas corretas.

A dupla Maick e Larissa, diferentemente das outras, ao substituir a condição inicial na solução geral da equação diferencial, encontrou de imediato o valor de $\_C1$, em seguida substituiu este valor com a condição de contorno novamente na solução geral da equação diferencial - ED e calculou o valor de k. As demais duplas montaram as duas equações com as condições iniciais e de contorno e resolveram o sistema. A figura 2 mostra a resolução da dupla Maick e Larissa.

A resolução deste modelo mostrou que os estudantes aprenderam os comandos do Maple para resolver uma EDO, um sistema de duas equações, uma equação a uma variável e mostraram habilidades com manipulações algébricas com o *software*.

Figura 2 - Resolução do modelo do problema 04 extraído da *worksheet* da dupla Maick e Larissa gerado no Maple 14.

2- RESOLUÇÃO DO MODELO

a)

> restart;

> with(DEtools) :

> eq1 := (diff(M(t), t) = k·M(t));

$$eq1 := \frac{d}{dt} M(t) = k\, M(t)$$

> ic := (M(0) = 1);

$$ic := M(0) = 1$$

> dsolve(eq1);

$$M(t) = \_C1\, e^{kt}$$

b)

> $1 = \_C1\, e^{k \cdot 0}$;

$$1 = \_C1$$

> k := solve(0.9 = exp(250·k));

$$k := -0.0004214420626$$

>

c)

> M(t) = 1·exp(k·t);

$$M(t) = e^{-0.0004214420626\, t}$$

>

d) Como a metade da massa inicial é igual a 0,5, substituimos M(t) por 0,5. O resultado é expressado em anos.

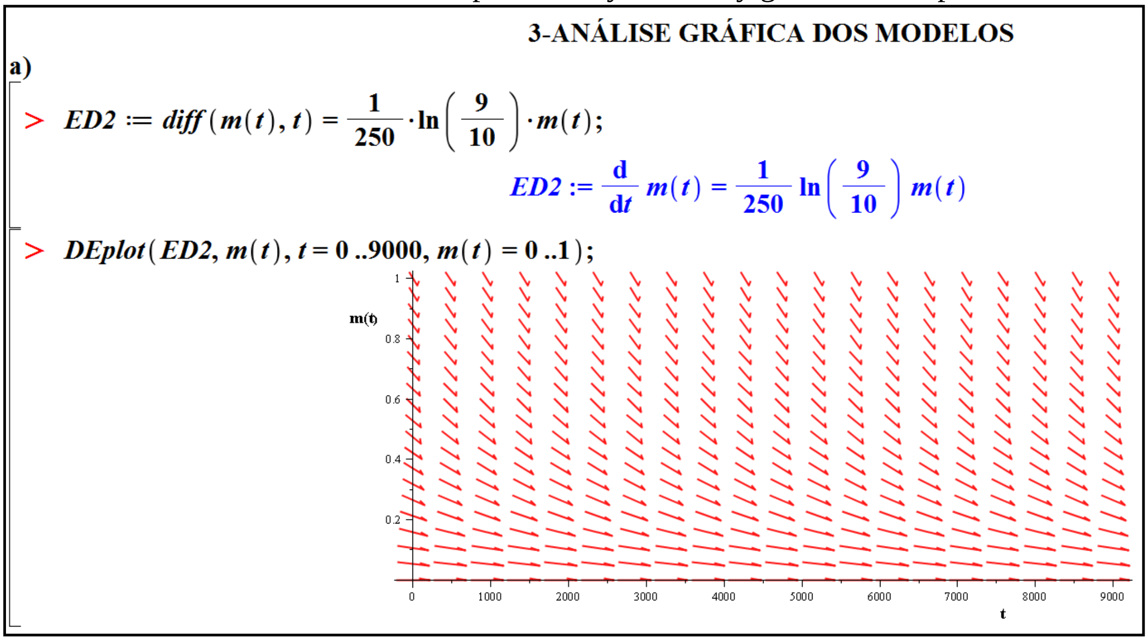
> $t_{\frac{M}{2}} := solve\left(0.5 = e^{-0.0004214420626\, t}\right)$;

$$t_{\frac{1}{2}M} := 1644.703370$$

Fonte: Dados da pesquisa.

A análise gráfica do modelo propõe inicialmente a construção do campo de direções da ED $dm(t)/dt = k \cdot m(t)$ e questiona se a massa tende a zero quando o tempo tende ao infinito. Todas as duplas construíram corretamente o campo de direções e após a análise, concordaram com o questionamento. A figura 3 mostra a construção do campo de direções da ED $dm(t)/dt = k \cdot m(t)$ realizada pela dupla Kalielly e Tatielly. Todos os estudantes afirmaram que a curva que mais se aproxima do campo de direções é a exponencial e estabeleceram corretamente, observando o campo de direções, os sinais de $dm(t)/dt$ em relação à m, mostrando habilidades de visualização e interpretação gráfica.

Figura 3 - Construção do campo de direções da Equação Diferencial $dm/dt = k \cdot m(t)$ extraído da *worksheet* da dupla Kalielly e Tatielly gerado no Maple 14.



Fonte: Dados da pesquisa.

A seguir foi solicitado a construção do gráfico dm/dt por m e que fosse comparado os sinais de dm/dt obtidos observando o campo de direções com o gráfico de dm/dt por m. Todas as duplas construíram corretamente o gráfico e por meio do confronto dos resultados, validaram suas respostas quando compararam os sinais de dm/dt obtidos observando o campo de direções com o gráfico de dm/dt por m.

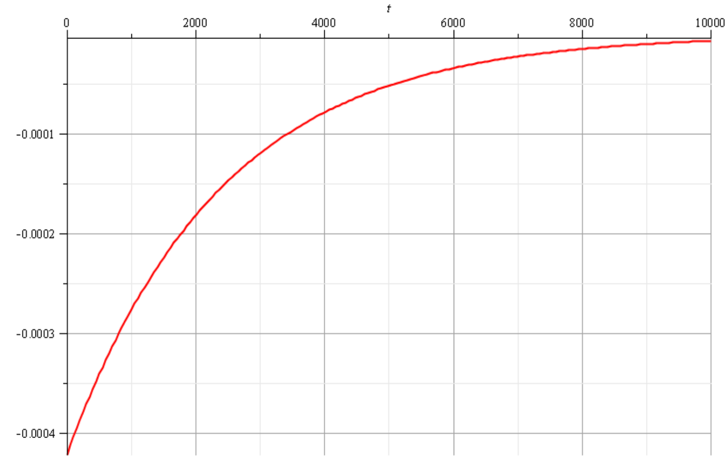
Ao serem questionados da possibilidade de obter um valor aproximado de m que represente soluções de equilíbrio da equação diferencial observando o campo de direções, todos os estudantes associaram o valor de $m(t) = 0$, em que $dm/dt = 0$ para a solução de equilíbrio da EDO.

Na sequência, foi solicitada a construção do gráfico e a análise do comportamento da taxa de variação da massa com o passar do tempo. Todas as duplas construíram corretamente o gráfico e metade das duplas associaram à ideia de que dm/dt é negativa, está decrescendo em módulo e tende a zero. Metade dos estudantes não conseguiu interpretar o gráfico. A figura 4 mostra a construção do gráfico dm/dt por t realizado pela dupla José Roberto e Marcílio.

Figura 4 - Construção do gráfico de dm/dt por t extraído da *worksheet* da dupla José Roberto e Marcílio gerado no Maple 14.

h)

$> \ plot\left(-0.0004214420626 \cdot e^{-0.0004214420626\,t}, t = 0\,..10000\right);$



Fonte: Dados da pesquisa.

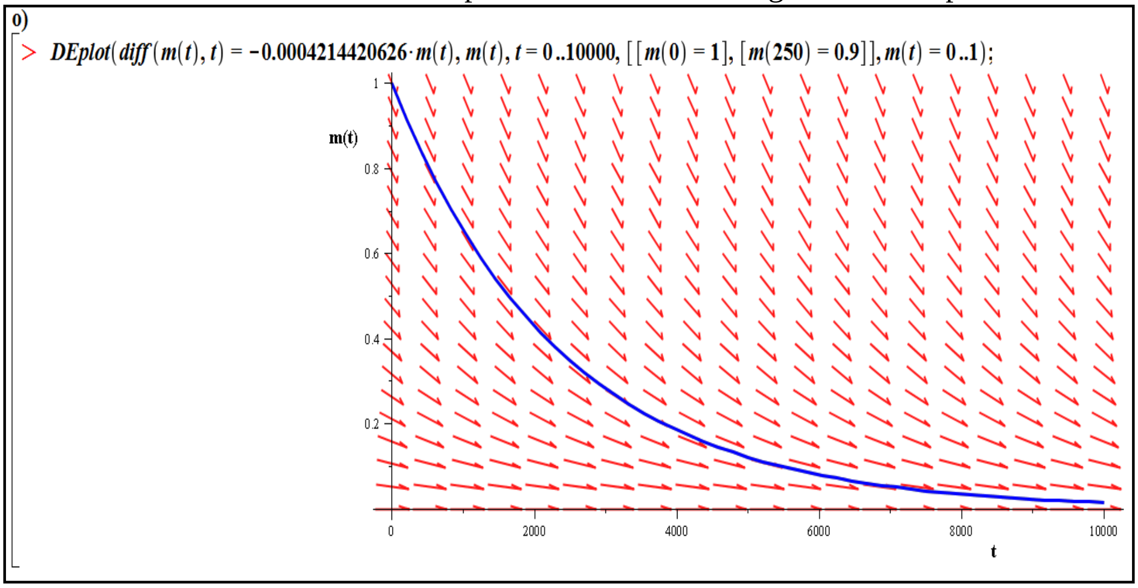
Quando questionados em relação ao período em que a taxa dm/dt apresenta maior variação, as respostas apresentaram vários intervalos de tempo próximos de zero, à exceção da dupla Caio e Russyllianno que apresentou o intervalo de 1000 a 10 000 anos, evidenciando uma leitura incorreta do gráfico.

A seguir, foi solicitada a construção do gráfico $m(t)$ por t, a análise do comportamento da massa para o tempo suficientemente grande, o sinal de dm/dt e a verificação da coerência do valor de m para $t=0$ no gráfico de $m(t)$ por t em relação ao enunciado do problema. Todas as duplas construíram corretamente o gráfico, verificaram que a massa tende a zero quando o tempo é suficientemente grande, afirmaram que dm/dt é negativa e constataram por meio do confronto, gráfico X enunciado, que quando $t = 0 \Rightarrow m = 1(100\%)$.

Finalmente, foi sugerida a resolução gráfica do Problema de Valor de Contorno (PVC):

$\dfrac{dm}{dt} = k \cdot m \quad \begin{cases} t = 0 \Rightarrow m = 1\ (100\%) \\ t = 250 \Rightarrow m = 0.9\ (90\%) \end{cases}$ e a verificação da coerência da solução gráfica do PVC com o gráfico $m(t)$ por t. Todas as duplas resolveram graficamente o PVC e verificaram que a curva integral obtida no gráfico do PVC é idêntica com a curva obtida no gráfico $m(t)$ por t. A figura 5 mostra a resolução gráfica do PVC pela dupla Gabriel e Leonardo.

Figura 5 - Resolução gráfica do PVC: $\frac{dm}{dt} = k \cdot m$ para $\begin{cases} t = 0 \Rightarrow m = 1\ (100\%) \\ t = 250 \Rightarrow m = 0.9\ (90\%) \end{cases}$ extraído da *worksheet* da dupla Gabriel e Leonardo gerado no Maple 14.



Fonte: Dados da pesquisa.

A média de acertos dos itens para este problema foi relativamente alta, 25,3 acertos para o total de 27 itens, com um desvio padrão de 0,447. A porcentagem de acertos da turma foi de 93,7%. Os poucos erros cometidos envolveram interpretação do enunciado e análise gráfica.

Considerações finais

Os problemas propostos na Pesquisa incorporaram as quatro etapas de resolução sugeridas por Polya (2006): (1) compreensão do problema; (2) construção de uma estratégia de resolução; (3) execução de uma estratégia escolhida e (4) revisão da solução. Estas etapas são semelhantes às propostas por Pozo (1988).

A primeira etapa de resolução dos problemas proposta na Pesquisa conduz o estudante à interpretação do texto, no qual o enunciado é esclarecido, as variáveis, as constantes, os parâmetros e o modelo matemático são identificados, as condições iniciais e de contorno e o que se pede são elucidados. Esta etapa está associada à compreensão do problema e da atividade. Em função da mídia utilizada para a resolução dos problemas, o computador e o *software* Maple, o estudante, foi orientado pelo professor/pesquisador a investigar e construir seus próprios conhecimentos, caracterizando assim a abordagem da Descoberta Guiada.

A estratégia de resolução é construída pelo professor/pesquisador que orienta o estudante em sua execução. Segundo Paul Ernest (1996) no método da Descoberta Guiada o professor formula o problema e conduz o aluno para a solução. Na terceira etapa da resolução dos problemas que trata da análise gráfica dos modelos, a todo momento, os estudantes são conduzidos a analisar se alcançaram ou não as metas, sendo evidente o confronto de resultados por meio das abordagens geométrica e analítica.

Ao confrontar soluções analíticas com soluções geométricas o estudante está fazendo um retrospecto da resolução, consolidando seus conhecimentos, validando respostas e conjecturas, aperfeiçoando a capacidade de abstração.

O processo de visualização, facilitado pelo traçado e interpretação gráfica, se mostrou profícuo na análise qualitativa das Equações Diferenciais no ambiente informatizado. Proporcionou aos estudantes criar imagens mentais, visualizar gráficos, interpretar gráficos, estabelecer proposições e conjecturas, validar resultados, relacionar variáveis e funções, construir conceitos, dentre outras possibilidades. O processo de visualização por meio do computador contribuiu para o estudante concretizar suas percepções. Por meio da ferramenta "*zoom*" do *software* Maple os estudantes puderam aproximar confiadamente valores.

Ao comparar, por exemplo, soluções analíticas e gráficas de um PVI, os estudantes puderam estabelecer correspondências entre as representações visuais e analíticas de uma mesma situação. Este processo contribuiu para a compreensão do conteúdo de EDs.

A utilização do *software* Maple, como único recurso que os estudantes dispunham para desenvolverem as atividades, apresentou de início dificuldades de manipulação e inúmeros erros de sintaxe foram recorrentes. A partir da resolução do segundo problema (resfriamento/aquecimento de um corpo) da pesquisa do Mestrado, a interação entre estudantes e *software* melhorou significativamente, a tendência à abordagem algébrica foi se esvaindo em decorrência do *software* resolver analiticamente as equações diferenciais e os estudantes apresentaram maior fluidez no desenvolvimento das atividades.

Os estudantes, ao interpretarem graficamente os modelos, compararam o campo de direções das equações diferenciais dos vários modelos decorrentes dos problemas propostos com as soluções gerais e particulares retornadas diretamente pelo *software*, puderam perceber características gerais e particulares das EDOs, mostraram compreensão de campo de direções e estabeleceram relações entre soluções analíticas de uma EDO com o seu campo de direções, fator este que se constitui no grande obstáculo da abordagem geométrica.

Para autores como Javaroni (2007) e Dullius (2009), a metodologia predominante aplicada ao ensino de Equações Diferenciais potencializa o enfoque algébrico, o ensino ocorre de forma mecânica, os estudantes são levados a resolverem listas de exercícios e não conseguem interpretar os resultados. A ênfase é dada aos métodos e técnicas de resolução analítica, o que não é suficiente para uma compreensão dos estudantes sobre Equações Diferenciais.

Em consonância com as críticas dos autores citados, a metodologia de ensino empregada nesta proposta aqui descrita, fundamentada nas abordagens por Resolução de Problemas e Descoberta Guiada visando a resolução de problemas, mostrou resultados positivos. Os estudantes foram capazes de atribuir significados a partir da interpretação de textos, resolução de modelos matemáticos e da análise gráfica de diferentes modelos. A metodologia se constituiu em uma forma de trabalho que contribuiu para a construção de conhecimentos relacionados às Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 1ª e 2ª ordem de forma efetiva pelos estudantes.

De acordo com os mesmos, as principais dificuldades encontradas durante o desenvolvimento da proposta, em ordem decrescente de dificuldade, foram as seguintes:

a) Interpretação do texto;
b) Determinação das variáveis;
c) Utilização e familiarização com o *software* Maple.

Verificou-se também que, além das dificuldades já apresentadas, a falta de conhecimentos prévios em Trigonometria, a utilização do conceito de derivada de uma função em um ponto e interpretação de gráficos se constituíram em entraves enfrentados.

Os estudantes mostraram interesse com as atividades propostas, possivelmente por trabalharem com aplicações reais de Equações Diferenciais Ordinárias, como deixa transparecer o estudante Russyllianno: "particularmente, me despertou o interesse pela matéria, visto que, com o software e através dos gráficos verificamos a importância e a realidade das EDOs no âmbito científico".

Ao propor uma forma diferente de trabalhar o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 1ª e 2ª ordem, sem as mídias lápis e papel, com utilização de um *software* matemático para auxiliar na realização das atividades, era de se esperar que os estudantes resistissem à metodologia e apresentassem dificuldades de adaptação.

Verificou-se inicialmente que a adaptação e o desenvolvimento das atividades foram lentos, apesar de terem participado do minicurso no qual foram apresentados os comandos básicos do Maple, apresentaram dificuldades com a sintaxe das funções. A partir da resolução do segundo problema, se mostraram mais desembaraçados durante o desenvolvimento das atividades e integrados com o *software*, os erros de sintaxe foram diminuindo, e de forma intuitiva, com alertas de erro geradas pelo próprio *software*, procediam às correções. Maick e Tatielly colocaram verbalmente, durante a resolução do segundo problema, que se estivessem utilizando o *software* desde o primeiro período do curso para exploração dos conteúdos de Cálculo, não teriam tantas dificuldades de adaptação com o software e com a metodologia.

Ao propor uma metodologia alternativa para a resolução de problemas de fenômenos no contexto das Equações Diferenciais, com foco na compreensão e interpretação de dados, empregando abordagens metodológicas da Descoberta Guiada e Resolução de Problemas, com utilização das Tecnologias de Informação e Comunicação e, privilegiando o desenvolvimento da capacidade de visualização, é dada uma contribuição para professores da área de ciências exatas, interessados no ensino das EDOs, a ressignificarem sua prática educativa.

Referências

COUY, L; FROTA, M. C. R. Estratégias para o Ensino-Aprendizagem de Funções com um Foco no Pensamento Visual. In: IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4, 2009, Taguatinga. **Anais...** Brasília: SBEM, 2009. p.1-22.

DULLIUS, M. M. **Enseñanza y Aprendizaje en Ecuaciones Diferenciales con Abordaje Gráfico, Numérico y Analítico**. 2009. 502 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa Internacional de Doutorado em Ensino de Ciências (PIDEC) *Universidad de Burgos* (UBU)-*España* e Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

ERNEST, P. Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia. In: ABRANTES, LEAL, PONTE (orgs.). **Investigar para Aprender matemática**, Lisboa: APM e Projeto MPT,1996.p.25-48.

GAZIRE, E. S. **Resolução de Problemas**: Perspectivas em Educação Matemática. 1988. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

GAZIRE, E. S.; LAUDARES, J. B.; ALVES, M. B. Resolução de Problemas com Equações Diferenciais em Cursos de Engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, XXXIV, 2006. Passo Fundo: RS, **Anais**...Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2006.

JAVARONI, S. L. **Abordagem geométrica:** possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias. 2007. 231f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro.

MACHADO, R. M. **A Visualização na Resolução de Problemas de Cálculo Diferencial e Integral no Ambiente Computacional MPP.** 2008. 289f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas.

MAYER, R. Should there be a Three-Strikes rule against pure discovery learning? The case for guided methods of instruction. **American Psychologist**. v. 59, n. 1, p. 14-19, Jan. 2004.

MORENO, M.; AZCÁRATE GIMÉNEZ, C. Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. **Enseñanza de Las Ciencias**. v. 21, n. 2, p.265-280, Jan. 2003.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POLYA, G. Enseñando a resolver problemas. In: **El papel de la axiomática y solución de problemas matemáticos**. Junta Directiva de las Ciencias Matemáticas. Boston: Ginn y Companhia, 1966.

POZO, J.I. (Org.). **A solução de problemas**: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1998.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.) **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving**. Reston: NCTM, p. 1-22, 1990.

STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007. v.2.

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com aplicações em modelagem**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. 492 p.