Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática

Analysis of correct and wrong resolutions of Combinatorics of future teachers of Mathematics

---

VÂNIA MARIA PEREIRA SANTOS-WAGNER[1]
ROBERTA D´ANGELA MENDUNI BORTOLOTI[2]
JULIANA RODRIGUES FERREIRA[3]

RESUMO

Neste artigo discutimos as resoluções de 198 estudantes de quatro universidades baianas relacionadas à análise combinatória. Objetivamos no estudo identificar o que eles compreendiam de conceitos de combinatória, se sabiam diferenciar arranjo e combinação, que estratégias de resoluções empregaram e erros cometeram. Utilizamos trabalhos de análise de erros e taxionomia dos objetivos educacionais como aportes teóricos da pesquisa. Desenvolvemos uma pesquisa qualitativa e a análise de dados indicou que os estudantes universitários de 3º e 8º semestres ainda apresentavam dificuldades conceituais e procedimentais com respeito à combinatória.
Palavras-chave: *Análise combinatória. Análise de erros. Formação inicial do professor de matemática. Ensino superior.*

ABSTRACT

In this essay we discussed the resolutions of 198 students from four universities from State of Bahia related to combinatorics. In this study we aimed to identify what the students comprehended from combinatory concepts, if they knew how to differentiate conceptually array from combination, what strategies they employed to solve the questions and the errors made. We used works from error analysis and taxonomy of educational objectives as the theoretical foundations to the research. We developed a qualitative inquiry and the data analysis indicated that the university students from 3rd and 8th semesters still presented conceptual and procedural difficulties with respect to combinatorics.
Keywords: *Combinatorics. Errors analysis. Initial mathematics teacher education. University study.*

INTRODUÇÃO

Neste artigo discutimos resultados relativos ao desempenho de estudantes universitários[4] em questões de combinatória em um projeto de pesquisa nas

---

[1]Doutora em Educação por Indiana University (Estados Unidos). Professora do curso de Pós-Graduação em Educação do Centro de Educação da UFES, professora aposentada do Instituto de Matemática da UFRJ, e-mail: profvaniasantoswagner@gmail.com
[2]Doutoranda em Educação – UFBA. Professora do curso de Licenciatura em Matemática – UESB – BA, e-mail: robertamenduni@yahoo.com.br
[3]Licencianda em Matemática – UESB – BA, e-mail: ju.rodrigues15@yahoo.com.br

universidades estaduais baianas. Nós observamos esses resultados a partir da experiência como membros de uma equipe de um projeto de pesquisa e/ou como professores dos cursos de licenciatura em matemática. Nós desenvolvemos este projeto de pesquisa de 2008 a 2012. A investigação sobre a qual nos referimos, intitulada “Análise dos Erros Cometidos por Discentes dos Cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Estaduais Baianas” (BORTOLOTI; NASCIMENTO; SILVA; OLIVEIRA, 2007), teve resultados parciais divulgados em alguns eventos (SILVA; BORTOLOTI;GUSMÃO,2009;BORTOLOTI;SANTOS-WAGNER;FERREIRA, 2011;BORTOLOTI;FERREIRA; SANTOS-WAGNER,2012).

Esta pesquisa, motivada pelo estudo de Cury (2006), iniciou-se com a preocupação de alguns professores universitários com relação à retenção de estudantes em disciplinas iniciais desses cursos. Observava-se que os licenciandos em matemática tinham baixos índices de desempenho em disciplinas como cálculo, álgebra linear e outras do início do curso. Foram pesquisados 10 cursos de licenciatura em matemática no estado da Bahia, assim representados: UESB – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (*Campi* Jequié e Vitória da Conquista); UESC – Universidade Estadual de Santa Cruz; UEFS – Universidade Estadual de feira de Santana e UNEB – Universidade do Estado da Bahia (*Campi* Alagoinhas, Barreiras, Caetité, Paulo Afonso, Teixeira de Freitas e Senhor do Bonfim).

Neste artigo focalizamos nas resoluções dos futuros professores nas questões de combinatória do segundo teste (Teste II) aplicado nestas universidades durante a pesquisa. Mais especificamente temos interesse em responder neste texto: i) Quais conhecimentos os estudantes mobilizaram para resolver as questões de combinatória? ii) Quais explicações eles deram para distinguir arranjo de combinação? iii) Quais erros foram cometidos? Objetivamos identificar o que compreendiam de conceitos de combinatória e se sabiam diferenciar conceitualmente arranjo e combinação. Visamos também detectar estratégias de resolução usadas e identificar erros cometidos.

Após essa parte introdutória abordamos análise de erros enquanto metodologia de pesquisa e ensino. Em seguida falamos sobre análise combinatória. No quarto tópico apresentamos os procedimentos metodológicos. Posteriormente trazemos a discussão dos resultados seguida das considerações finais.

---

[4]Usamos neste texto como sinônimos estudantes universitários, licenciandos em matemática e futuros professores de matemática.

ANÁLISE DE ERROS ENQUANTO METODOLOGIA DE PESQUISA E ENSINO

Apesar dos profissionais da educação estarem cientes de que erros ocorrem no processo de aprendizagem, nem todos eles têm consciência de que erros podem ser usados para potencializar os processos de ensino e aprendizagem. Acreditamos que o erro não tem recebido atenção nem interpretação adequada por parte da comunidade educacional e, consequentemente, essa comunidade tem investido pouco diante da potencialidade do uso de erros no ensino formal (BORASI, 1996). Esta autora comenta que pesquisadores e professores têm investigado erros de estudantes como uma ferramenta para identificar dificuldades de aprendizagem, propor mudanças no currículo, compreender processos de aprendizagem e concepções de estudantes.

Borasi (1996) interpreta o erro como um trampolim para procedimentos de investigação no ensino se professor e alunos observarem e refletirem de modo consciente sobre erros, tipos de erros e suas causas. Para esta autora, além de observarem e refletirem juntos, eles devem procurar em conjunto formas de superação destes erros. Assim, professores e alunos precisam conversar sobre erros em aulas de matemática e analisar de forma consciente e crítica os motivos para estes ocorrerem, e assim tentarem descobrir as causas para tais erros e caminhos para superá-los ou desequilibrá-los cognitivamente.

Isso requer um trabalho reflexivo sobre a ação pedagógica do professor, que transcenda a correção de tarefas ao identificar acertos e erros que ocorreram em soluções de exercícios, atividades e/ou problemas matemáticos. No entanto, só terá sentido falar em investigar o erro, se esse tornar-se observável tanto para o professor, quanto para o aluno. “Para ser uma estratégia didática inovadora, o erro precisa ser um ente ‘observável’ para o aluno. Porém, o erro não será um ‘observável’ para o aluno, se, antes, não for um observável para o professor” (PINTO, 2000, p. 147).

O papel do professor para tornar o erro observável requer provocação de conflitos cognitivos, desequilíbrios de “certezas”. Segundo Cury (2007, p. 80) “o erro [...] é um saber que o aluno possui, construído de alguma forma, e é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre suas respostas”. Nesta perspectiva, “o trabalho do professor consistirá em escolher situações que possam ser assumidas pelos alunos e que lhes permitam encontrar os meios para resolvê-las” (PINTO, 2000, p. 153). Isto implica em reflexões e mudanças da prática pedagógica de professores, para que assim ocorra um ensino eficaz e que alunos aprendam e compreendam erros e desejem superá-los.

ANÁLISE COMBINATÓRIA

Análise combinatória é um conteúdo que, no Brasil, começa a ser ensinado nas séries iniciais com noções de multiplicação. No segundo ano do ensino médio este assunto é novamente apresentado aos alunos com as noções de permutação, arranjo e combinação. Apresentamos abaixo explicações sobre o que é análise combinatória conforme um dicionário e autores de livros didáticos. Em seguida, trazemos uma definição de arranjo, permutação e combinação.

Segundo o minidicionário da língua portuguesa Aurélio (FERREIRA, 2001, p. 41), análise combinatória é a parte da matemática "que investiga o número de disposições possíveis dos membros de um conjunto nos seus subconjuntos". Para Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991) as combinações, arranjos e permutações são técnicas para resolver problemas de análise combinatória: "os de contagem de certos tipos de subconjuntos de um conjunto finito, sem que seja necessário enumerar seus elementos" (p. 1).

As pesquisadoras Pessoa e Borba (2009) usam as definições que Merayo[5] (2001) apresentou ao definir permutação, arranjo e combinação a partir de um conjunto de m elementos distintos. Essas autoras informam que, segundo Merayo (2001), permutação é "qualquer agrupamento desses objetos que difere um do outro unicamente pela ordem de colocação dos seus objetos (p. 241). Arranjo é "todo grupo ordenado formado por n elementos tomados dos m, de tal maneira que dois grupos são considerados distintos se diferem em alguns dos seus elementos ou bem, se tendo os mesmos elementos, diferem pela ordem em que estão colocados" (p. 236). Recebe o nome de combinação de ordem n desse m elementos,

> … cada grupo formado por n elementos tomado dos m, tal que duas combinações se consideram distintas se diferem em alguns dos seus elementos. Nessa ordenação não influi a ordem de colocação, isso quer dizer que dois agrupamentos são iguais se contêm os mesmos elementos, ainda que colocados em distinta ordem (MERAYO, 2001, p. 269 apud PESSOA; BORBA, 2009, p. 115-116).

Quando se fala a respeito de análise combinatória se discute bastante o uso de fórmulas. Sabemos que estas existem para facilitar a contagem de elementos ou eventos sem termos que contá-los. Por outro lado, apenas conhecer fórmulas não é suficiente

[5] MERAYO, F. *Matemática discreta*. Madri: Thomson Paraninfo, 2001.

para que o aluno tenha sucesso na resolução de problemas combinatórios. De acordo com Skemp (1976), resolver tarefas matemáticas instrumentalmente envolve apenas o uso de procedimentos e fórmulas e, muitas vezes, este uso ocorre sem compreensão dos conceitos envolvidos. Em seu texto clássico "Relational understanding and instrumental understanding", Skemp (1976) nos faz perceber que existem dois tipos de compreensão em aulas de matemática: a compreensão relacional e a compreensão instrumental.

Quando ocorre compreensão instrumental o aluno focaliza sua atenção na obtenção de regras e procedimentos mecânicos de cálculo. Neste caso o indivíduo tem capacidade de usar algum tipo de regra e/ou fórmula para resolver uma tarefa matemática[6]. Observa-se nestas situações que não se evidencia justificativa dos fatos nem compreensão de relações matemáticas pelo aluno. Já quando o indivíduo adquiriu uma compreensão relacional, ele possui outros conhecimentos e capacidades. O indivíduo dá evidências de que sabe como usar regras, por que certos procedimentos foram usados e não outros. Além disso, ele compreende como usar este conhecimento em diversas situações e sabe explicar todas as etapas deste procedimento matemático. Skemp (1976) ainda comenta que surgem dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de matemática no que se refere a estes dois tipos de compreensões se professor e alunos tiverem expectativas, interesses, e objetivos distintos. Aqui, em nosso caso, no processo de ensino e aprendizagem de análise combinatória vão ocorrer problemas quando os objetivos de professor e alunos são diferentes no que diz respeito à compreensão desse assunto. Ou seja, o professor quer que o aluno compreenda relacionalmente os conceitos de combinatória, e os alunos desejam apenas compreender instrumentalmente ou quando ocorre o contrário. Portanto, é preciso propor situações em que o raciocínio combinatório seja desenvolvido e envolva compreensão relacional.

Pessoa e Borba (2010, p. 2) compreendem o raciocínio combinatório como "um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de conjuntos". De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais [PCN+] (BRASIL, 2000, p. 126), a análise combinatória permite,

> ... o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação.

[6]Uma tarefa matemática pode ser um exercício, um problema, uma questão ou uma atividade proposta pelo professor de matemática ou pelo livro didático de matemática.

Talvez a dificuldade em um aluno aprender análise combinatória com compreensão relacional, como sugere Skemp (1976), esteja ligado ao fato de professores tentarem fazer com que o aluno entenda e use conceitos prontos, sem construir com os alunos todas as etapas de entendimento. Morgado e colegas (1991) afirmam que esta técnica pode criar no aluno a impressão de que a combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas. Sabo (2008, p. 1) ao falar dos discursos dos professores do ensino médio a respeito do ensino de análise combinatória, diz que,

> Algumas vezes, observo professores afirmando que eles próprios não têm esses conceitos construídos de forma sólida e significativa, e, por esse motivo, evitam abordar o tema ou, optam, apenas, a apresentar aos alunos um processo de aplicação de fórmulas prontas, sem justificativas ou explicações. Assim sendo, o aluno necessita utilizar-se da memorização para aplicar a fórmula certa na resolução de problemas específicos, ou seja, o ensino de Análise Combinatória torna-se tecnicista e operacional.

O descritor 32 das matrizes de referência do Sistema de Avaliação da Educação Básica [SAEB] (BRASIL, 2008a) informa que trabalhar com ideias de combinatória é uma das habilidades que alunos de ensino fundamental e médio necessitam possuir. Neste descritor 32 menciona-se que o aluno precisa: “Resolver o problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples” (BRASIL, 2008a, p. 79). Para aqueles que cursam licenciatura ou bacharelado em matemática, os seus conhecimentos sobre análise combinatória são avaliados no Exame Nacional de Avaliação do Desempenho de Estudantes [ENADE] (BRASIL, 2008b). O ENADE objetiva avaliar conceitos e procedimentos sobre contagem e análise combinatória, entre outros.

Mesmo que exames nacionais avaliem esses conhecimentos precisamos estar atentos ao que Sabo (2008) fala sobre a prática dos professores. Pois, segundo seus argumentos se os professores não se sentirem seguros para ensinar esses conceitos, eles não irão favorecer nem a compreensão nem a construção com significado desses conhecimentos combinatórios em seus alunos. Provavelmente os alunos irão memorizar procedimentos, fórmulas e problemas tipo para usarem seus conhecimentos e compreensões de combinatória de forma instrumental ou procedimental como afirmava Skemp (1976). No nosso caso, em que trabalhamos com futuros professores de matemática, que atuarão na educação básica, torna-se necessário e urgente que eles aprendam de forma significativa. Ou seja, torna-se imprescindível que eles adquiram uma compreensão relacional dos conceitos de combinatória.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Desenvolvemos uma investigação qualitativa (FIORENTINI; LORENZATO, 2006), porque objetivamos compreender e analisar resoluções e erros que estudantes cometeram ao resolver questões de análise combinatória. Nesta pesquisa não tivemos a pretensão de fazer alguma generalização a respeito do que aprendemos e descobrimos com a mesma. Nossos desejos metodológicos enquanto equipe eram de (i) compreender causas do fracasso do desempenho dos licenciandos em matemática nas universidades baianas em disciplinas iniciais do curso de licenciatura, (ii) aprender a elaborar testes para diagnosticar e identificar aprendizagens e conceitos básicos de matemática, e (iii) aprender a trabalhar colaborativamente em uma pesquisa interinstitucional envolvendo membros de formação acadêmica diversificada.

Antes de abordar o Teste II é importante caracterizar a fase de intervenções que os membros da pesquisa realizaram em seus respectivos *campi*. Com base nas estratégias utilizadas pelos estudantes e dificuldades identificadas no Teste I, nós programamos algumas atuações pedagógicas diferenciadas. Estas ações visavam mostrar aos participantes da pesquisa alguns resultados encontrados e discutir com os mesmos a respeito dos assuntos matemáticos. Cada *campus* teve autonomia para escolher o que poderia ser feito e a forma de atuação. Então, dentre as diversas ações, tivemos:

seminários em que o tema: “Análise de erros enquanto estratégia de ensino e de pesquisa” foi debatido, tendo por base os resultados do próprio *campus*, além de apresentar uma nova perspectiva para explorar a potencialidade do erro;

grupos de estudos em que professores ficaram à disposição dos estudantes para discutir as resoluções empregadas nas questões abordando diferentes tópicos matemáticos;

oficinas por meio de projetos de extensão aprovados nas universidades, cujos temas geometria, análise combinatória e função foram investigados a partir das dificuldades detectadas nas resoluções dos estudantes no Teste I;

investigações juntamente com os alunos para analisar com eles as diferentes resoluções. Os alunos trabalhavam em grupos, discutiam as estratégias utilizadas e os erros encontrados, chegando ao final (por eles mesmos ou com ajuda de professores) em resoluções consideradas como corretas. Essas investigações ocorreram em algumas disciplinas como estágio, prática de ensino e cálculo. Temos a certeza de que esta etapa deveria ser mais trabalhada, com envolvimento de mais professores e alunos (sujeitos da pesquisa), pois erros conceituais não são desconstruídos com apenas algumas aulas. (BORTOLOTI, 2012).

Passado esse período de intervenções, nós aplicamos o Teste II em 2011 para 198 alunos das universidades descritas anteriormente, sendo 132 estudantes do 3º semestre e 66 do 8º semestre. Utilizamos códigos para nos referirmos aos sujeitos. Por exemplo: códigos 2V1X e 2V1Y. Nestes códigos temos que o número dois se refere ao Teste II, a letra que vem logo em seguida identifica a sua cidade, o número que vem após a letra se refere à contagem dos testes e as letras X ou Y se referem respectivamente ao sujeito do 3º ou do 8º semestre.

A elaboração do segundo teste foi diferente do primeiro, pois sentimos a necessidade de nos apoiar em uma abordagem que nos subsidiasse na construção das questões e posteriormente na análise dos dados. Ao analisar as soluções dos estudantes no Teste I nos perguntávamos: mas, podemos inferir se o estudante sabe ou não sabe o que é arranjo, combinação? Que elementos temos para afirmar que este conhecimento foi ou não construído por estes sujeitos com base no que estamos analisando a partir da produção escrita deles em uma questão ou em um item? Eles aplicaram a fórmula porque sabiam o conceito que a sustentava ou simplesmente porque decoraram os tipos de problemas em que esta fórmula se aplica? Como optar por uma teoria que nos auxiliasse a compreender e interpretar os dados obtidos nas resoluções dos estudantes? Além disso, como convencer os membros da equipe do projeto a usar uma mesma teoria na pesquisa, se esses professores universitários tinham formação distinta em nível de graduação e pós-graduação e trabalhavam na universidade com ideias diversas sobre avaliar, corrigir, identificar erros e justificar causas dos mesmos?

Investimos na sugestão de um dos membros da equipe de usar a Taxionomia dos Objetivos Educacionais (BLOOM; ENGELHART; FURST; HILL; KRATHWOHL, 1979) para a construção e análise do Teste II. Sob a liderança de Bloom pesquisadores de diferentes disciplinas de várias universidades, desenvolveram esta taxionomia que é caracterizada principalmente pela hierarquia e é constituída, por três domínios: cognitivo, afetivo e psicomotor. O cognitivo "… inclui aqueles objetivos vinculados à memória ou recognição, e ao desenvolvimento de capacidades e habilidades intelectuais…" (BLOOM et al., 1979, p. 6); o afetivo está relacionado aos objetivos de mudança de valores, comportamentos, interesses e o psicomotor objetiva abordar atividades manipulativas. Em nosso estudo usamos só uma parte referente ao domínio cognitivo.

Essa taxionomia, em relação ao domínio cognitivo, possui as seguintes categorias: conhecimento; compreensão; aplicação; análise; síntese e avaliação. As questões elaboradas nesta pesquisa atingiram o nível de aplicação. Deve-se levar em consideração que esta taxionomia também é caracterizada pela cumulatividade, pois Bloom e colegas (1979, p. 103) afirmam que “Em geral, na taxionomia, o domínio cognitivo obedece a uma ordem hierárquica e cada uma das classes de capacidade e habilidades envolvem exigências relativas às classes de nível inferior”. Explicamos como analisamos as questões 3 e 4 do Teste II segundo essa taxionomia:

Questão 3: (a) Liste todos os possíveis subconjuntos de dois elementos que podemos obter a partir do conjunto A = {a; b; c}.
(b) Liste todos os números de dois algarismos distintos que podemos formar com os dígitos 1; 3; 5.
(c) Explique como você distingue (conceitualmente) arranjo de combinação.

Tanto a letra (a) como a letra (b) se encaixam no <u>nível de conhecimento</u>, pois se referem a lembrar, recordar e se assemelham a uma situação aprendida inicialmente em que o sujeito “adquire e armazena informações que mais tarde necessita evocar” (BLOOM et al., 1979, p. 55). Já a letra (c) se refere ao <u>nível de compreensão,</u> ou seja, sobre o entendimento da mensagem. “Para alcançar esta compreensão, o estudante pode modificar mentalmente a comunicação, expressando-a em uma forma análoga que lhe é mais significativa [...] pode ir além do que lhe é oferecido na própria comunicação”. (BLOOM et al., 1979, p. 77). O sujeito poderia usar exemplos, explicar com suas palavras o que compreendeu por arranjo e combinação e consequentemente explicar ou exibir a diferença entre eles, expressando-se além do que é oferecido no enunciado.

Questão 4: Responda as questões abaixo podendo deixar as operações indicadas, sem a necessidade de calculá-las.
(a) Quantos subconjuntos de dois elementos podemos formar com um conjunto de 26 letras?
(b) Quantos números de dois algarismos distintos podemos formar com os dígitos 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9?
(c) Quantos carros podemos emplacar com as letras A; B; C; D; E e os dígitos 1; 2; 3; 4; 5; 6, sabendo-se que, cada placa é uma sequência de 3 letras e 4 dígitos?

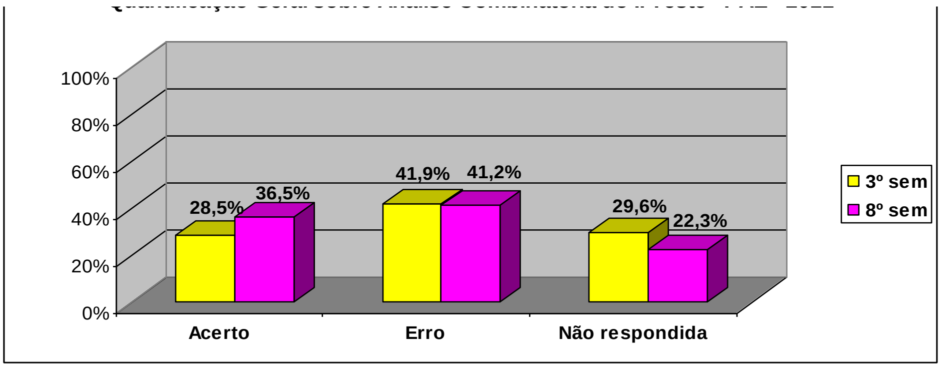
Em todos os itens dessa questão, pretendíamos avaliar o <u>nível de aplicação</u>, situação em que o estudante deveria aplicar as abstrações apropriadas sem que lhe tivesse sido sugerido como usá-las naquela situação (BLOOM et al., 1979). Queríamos saber se o estudante selecionaria e aplicaria o conhecimento apropriado (combinação ou arranjo) para resolver a questão. Nós aumentamos o número de elementos do conjunto para avaliar o mesmo assunto em um contexto mais geral. Queríamos verificar se os estudantes saberiam trabalhar em um caso geral e se recorreriam ao uso de fórmulas.

DISCUTINDO OS RESULTADOS

Nesta parte vamos interpretar também algumas respostas dos licenciandos ao questionário, que foi aplicado junto com o Teste II, e também respostas às questões de análise combinatória deste teste. Perguntamos aos alunos em que tipo de escola eles cursaram o ensino médio e verificamos que a maioria dos estudantes era proveniente de escola pública. Ao serem questionados sobre o porquê de escolherem o curso de Licenciatura em Matemática, quase 60% dos discentes disseram que o motivo era a afinidade com a matemática. Entretanto, foi curioso constatar que somente 23 estudantes, dos 198 que responderam ao questionário, desejavam realmente ser professores. Esse resultado parece mostrar que o fato de gostar de matemática não é condição suficiente para optar pelo exercício da profissão. Cabe aos gestores e professores universitários refletirem com os licenciandos sobre o curso que estão fazendo e discutir com eles os motivos que justificam a não opção pelo magistério ao se formarem. Isso não é algo novo, porque muitos formadores já fazem isso. Contudo, esses dados nos mostram quão alerta devemos estar para essa realidade e conscientizarmos esses alunos sobre a escolha que estão fazendo.

Vejamos o desempenho dos estudantes ao responderem as duas questões sobre análise combinatória no Teste II e posteriormente falaremos sobre a conscientização das dificuldades percebidas pelos próprios alunos.

Figura 1: Quantificação Geral sobre Análise combinatória do Teste II – 2011
Fonte: Dados da coordenação geral da pesquisa, 2011.



Ao analisarmos esse gráfico, a primeira observação que fizemos foi constatar que não faz muita diferença se o estudante está no 3º ou 8º semestre, pois ao responderem as duas questões, a porcentagem final de acertos, erros ou não respondidas ficou muito próxima, sobretudo em relação aos erros. E nos questionamos por que o desempenho desses estudantes é tão próximo, já que os alunos de 8º semestre tinham pelo menos dois anos e meio de estudos universitários a mais que os outros. Então, fizemos uma outra pergunta: será que esses alunos tiveram a oportunidade de estudar análise combinatória na universidade?

Dos dez cursos de licenciatura em matemática investigados, descobrimos que somente a UEFS possuía em sua estrutura curricular uma disciplina sobre análise combinatória. Constatamos que a UNEB com seis cursos e a UESB (*campus* de Jequié) trabalharam esse assunto em meio a outros conteúdos elencados na ementa de uma disciplina da grade curricular. Já a UESC e a UESB (*campus* Vitória da Conquista) não abordavam especificamente o conteúdo de combinatória. Isso nos mostrou que alguns cursos de formação de professores de matemática na Bahia precisam rever seus currículos já que futuros professores estão sendo habilitados pela universidade sem ter tido a oportunidade de aprender esse conteúdo e de como ensiná-lo.

No Teste II tivemos vários depoimentos de alunos dizendo não se lembrarem dos conceitos necessários para responder a essas questões de combinatória. Identificamos em relação à 3ª questão que 95 estudantes, de um total de 198, disseram não ter segurança para resolvê-la. Essa insegurança também foi mencionada por Sabo (2008) quando se referiu ao depoimento de professores investigados em sua pesquisa. No entanto, uma pergunta precisa ser discutida e refletida entre alunos e professores: como irão ensinar esse assunto futuramente?

Na 4ª questão 96 estudantes também não conseguiram resolvê-la. As justificativas estão representadas pelos exemplos abaixo:

Figura 2: 2T16X

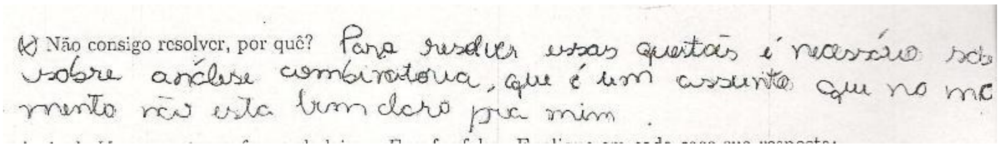

(x) Não consigo resolver, por quê? Para resolver essas questões é necessário sab sobre análise combinatória, que é um assunto que no momento não está bem claro pra mim .

Figura 3: 2A8X

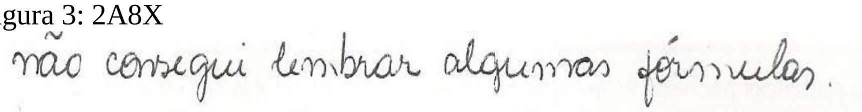
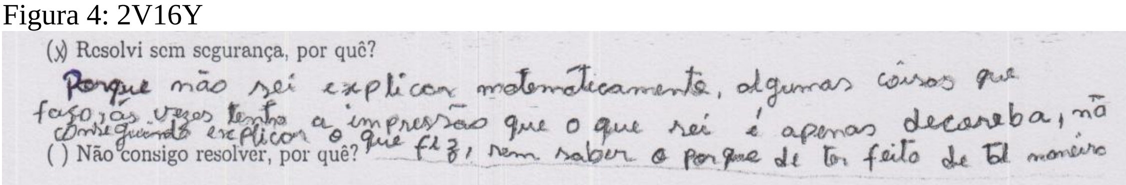

não consegui lembrar algumas fórmulas.

Figura 4: 2V16Y


(x) Resolvi sem segurança, por quê?
Porque não sei explicar matematicamente, algumas coisas que faço, às vezes tenho a impressão que o que sei é apenas decoreba, não consegui explicar o que fiz, nem saber o porque de ter feito de tal maneira
( ) Não consigo resolver, por quê?

Por meio destes depoimentos constatamos que este assunto não foi compreendido por esses estudantes. O sujeito 2V16Y não reduziu sua justificativa a conhecer ou não fórmulas, mas apresentou uma compreensão maior sobre seu desempenho, justificando o uso da memorização sem compreender porque utilizou determinado procedimento. O que nos indica a necessidade de discutirmos com os estudantes sobre o processo de resolução de qualquer situação.

Assim como Pinto (2000) nos chama atenção para tornar o erro observável, precisamos escutar nossos alunos e essa escuta precisa ser cuidadosa. Só foi possível identificar essa dificuldade porque nós (a equipe de pesquisa) provocamos os estudantes a refletirem a respeito desse assunto. Assim tivemos uma escuta atenta dos estudantes. Esta escuta ocorreu com estes nossos questionamentos propostos aos licenciandos para refletirem e se posicionarem a respeito da segurança deles em resolver estas questões. A partir disso tivemos elementos para propor mudanças quer no currículo de licenciatura em matemática, quer na forma de ensinar esse assunto.

Quando um professor dá sentido ao que está ouvindo dos seus estudantes, ele pode praticar a escuta interpretativa (JOHNSON; LARSEN, 2012). Esse tipo de escuta pode ser muito valioso para redirecionar a prática em sala de aula desse professor ou até mesmo propor mudanças curriculares. Escutar o que estes estudantes estão dizendo sobre a forma com que aprenderam análise combinatória nos indica fortemente que propostas curriculares precisam ser apresentadas, pois tanto o modo de aprender quanto o de ensinar poderá limitar a aprendizagem de seus futuros alunos. Isso tem implicações tanto para o ensino em nível superior quanto para a educação básica.

A seguir vamos responder às três perguntas enunciadas na introdução desse texto.

i) Quais conhecimentos os estudantes mobilizaram para resolver as questões?

Quando elaboramos o Teste II os objetivos principais da letra (a) nas 3ª e 4ª questões eram identificar se os estudantes construiriam subconjuntos e verificar quais procedimentos os estudantes usariam em cada caso. Na 3ª questão item (a) aparecia um conjunto com um pequeno número de elementos e queríamos constatar se em um conjunto com um maior número de elementos, 4ª questão item (a), eles recorreriam ao uso de fórmulas ou à listagem de possibilidades. Dos 180 estudantes, que resolveram a 3ª questão letra (a), 87 atingiram o nível de conhecimento percebendo que um subconjunto não se altera se mudarmos a ordem de seus elementos. Entretanto, na 4ª questão, das 147 resoluções respondidas, apenas 21 estudantes conseguiram aplicar os conceitos necessários para responder ao que a questão solicitava, ou seja, resolver um problema de contagem usando o princípio multiplicativo ou a fórmula de combinação. Enquanto que na letra (a) da 3ª questão 179 estudantes recorreram à listagem de possibilidades, na letra (a) da 4ª questão a maioria recorreu à fórmulas, porém erroneamente.

Em relação à letra (b) das 3ª e 4ª questões o objetivo principal era recorrer ao princípio multiplicativo, porém na primeira situação o aluno poderia resolver listando as possibilidades, pois o número de elementos é pequeno. Já na segunda queríamos investigar se ele perceberia a necessidade de recorrer ao uso de outro procedimento que não fosse a listagem das possibilidades.

Dos 183 estudantes que resolveram a 3ª questão letra (b), 139 deles (quase 76%) atingiram o nível de conhecimento. Na 4ª questão tivemos um valor percentual semelhante, pois das 101 resoluções respondidas, 79 (78%) estavam corretas. Ou seja, os licenciandos souberam aplicar o conhecimento e compreender o que a questão pedia para resolver um problema de contagem usando o princípio multiplicativo. Enquanto que na letra (b) da 3ª questão 181 estudantes recorreram à listagem de possibilidades, na 4ª questão apenas 17 utilizaram essa mesma estratégia. Contudo, 34 estudantes recorreram à fórmula e 50 ao princípio multiplicativo. Parece que esses estudantes, que recorreram à listagem de possibilidades e ao uso da fórmula, estão muito mais propensos a uma compreensão instrumental do que relacional (SKEMP, 1976), pois não demonstraram evidências que sabiam recorrer a diferentes procedimentos conforme o que se solicitava na questão. Ao aumentar o número de elementos do conjunto, recorrer a uma listagem de possibilidades pode ser uma estratégia inviável. Por outro lado, a utilização de fórmula de maneira errada evidencia que não houve compreensão dos conceitos envolvidos.

Quando o número de elementos do conjunto aumentou, as estratégias para a solução variaram. Sendo assim, identificamos três formas de conhecimentos mobilizados pelos estudantes para resolver as alternativas a e b das duas questões: listagem das possibilidades; fórmulas e o princípio multiplicativo (para conjunto com números de elementos maiores).

O uso de fórmulas indiscriminadamente é o que muitos alunos fazem para resolver a questão de qualquer forma (ou seja, mostrando apenas compreensão instrumental). Contudo, identificar uma fórmula não é o suficiente para resolver a questão. Infelizmente alguns alunos já foram condicionados a utilizar essa estratégia ou acreditam que basta identificá-la que o problema será resolvido. Mais preocupante ainda é quando os futuros professores acreditam nisso.

Identificamos nos depoimentos de alguns licenciandos (FERREIRA, 2012), no período da intervenção, no *campus* de Vitória da Conquista, o porquê de tais erros quando se discutia com eles a respeitos das resoluções e estratégias usadas.

> Aluno L*: […] ele foi buscando modos pra satisfazer uma resposta [...]. Na verdade ele não compreendeu a pergunta da questão. Tipo assim ele só queria colocar isso na fórmula. Os dados que ele tinha ele queria colocar na fórmula e dar uma resposta […]*
>
> Professor I*: e porque você acha que o aluno faz isso?*
>
> Aluno L*:…ée…condicionado, a utilizar fórmulas…ele tem essa fórmula e ele tem alguns valores ele vai jogar na fórmula.*
>
> Prof. I: *A pergunta é: daqui há um ano ou menos vocês vão se formar. Tá certo? Como vocês vão ensinar Análise Combinatória?*
>
> Aluno B: *eu sinceramente, eu vou pegar o meu caderno do 3º ano e pegar um livro pra estudar… tentar passar pelo menos do mesmo jeito que a minha professora passou.*
>
> Aluno L: *E a gente pensa assim também, a gente só ensina o que a gente aprendeu. Você só vai ensinar aos alunos no nível que a gente aprendeu. Você não vai ensinar nada além.*

Observa-se que o professor procurou focalizar a atenção dos estudantes em dois aspectos. De início focalizou em como o aluno está pensando ao resolver as questões. Depois focou na forma de ensinar que ficou comprometida. Podemos conjecturar dessas falas que, possivelmente, os professores, na maioria das vezes, ao explicar o assunto, apresentam as fórmulas e/ou dão dicas de palavras-chave para tentar ajudar os alunos a escolher uma fórmula que deverá usar em determinadas situações (compreensão instrumental). Quando se observa um professor com este tipo de atitude e um futuro professor com este discurso, o primeiro ponto a se questionar é a formação inicial, isto é, em quais condições construiu-se algum conceito de análise combinatória que possa ir além da aplicação de fórmulas? (FERREIRA, 2012). Precisamos trabalhar com os futuros professores para alcançar uma compreensão relacional no que diz respeito ao conhecimento de matemática. Também necessitamos avançar para que eles saibam como propor em suas aulas situações pedagógicas que favoreçam aos seus alunos essa compreensão.

Nós encontramos problemas para ensinar e aprender combinatória ao concordarmos com Skemp (1976) que aprendizagem instrumental está vinculada com a resolução de problemas rotineiros de análise combinatória com uso de procedimentos e fórmulas sem compreensão dos conceitos e dos contextos. Em contrapartida, temos como desafio pensar em como propor situações didáticas que propiciem aos estudantes uma aprendizagem com compreensão relacional de combinatória envolvendo conceitos, seus usos e relações com outros conceitos matemáticos. Skemp (1976) além de comentar a respeito de impasses nas expectativas de ensino e aprendizagem, já mencionados anteriormente, também aborda impasses que ocorrem nos momentos de avaliação. Isto pode acontecer quando um professor ensinou de forma instrumental e cobra em suas atividades avaliativas as questões de forma relacional Argumentos semelhantes a esses nos apontam Morgado e colegas (1991, p. 2) ao afirmar:

> se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas.

Se os estudantes apenas decorarem fórmulas e tipos de problemas em que elas se aplicam, nada garante que ocorreu aprendizagem ou que algum conhecimento sobre isso foi adquirido ou construído.

ii) Quais explicações os estudantes deram para distinguir arranjo de combinação?

Na alternativa (c) da 3ª questão, pedimos aos alunos que diferenciassem conceitualmente arranjo e combinação. Analisamos quais explicações os estudantes deram. Houve alunos que além de acertarem a definição do conceito, exemplificaram situações em que temos um arranjo ou uma combinação. De 198 estudantes, 32 diferenciaram de forma satisfatória arranjo de combinação alcançando o nível de compreensão. Para que um conceito matemático seja formado, compreendido, e internalizado por um indivíduo em sua mente nós acreditamos que é insuficiente só trazer a definição sem exemplificar o mesmo e mostrar seus usos e características. Cremos que o sujeito precisa identificar exemplos e contra-exemplos de um conceito; identificar características e propriedades de um conceito matemático; compreender as definições com o auxílio do professor e/ou construí-las com o professor; apresentar outros exemplos e contra-exemplos, reconhecê-los ou apresentá-los; relacioná-los com as definições; explicar com suas palavras o conceito; aplicar em outras situações; analisar as partes que compõem o conceito; sintetizar as idéias principais e saber criar atividades envolvendo o conceito.

Com relação às 56 respostas erradas, identificamos que 03 alunos do 3º semestre e 04 do 8º confundiram arranjo com combinação. O aluno 2T8X, por exemplo, escreveu: "*no arranjo a ordem dos elementos não difere o conjunto, na combinação a ordem dos elementos conta com conjuntos distintos*".

Observemos depoimentos, argumentos de alunos e do professor que aconteceram no período de intervenção, antes da aplicação do Teste II (FERREIRA, 2012):

Professor II: *qual é a diferença entre o arranjo e combinação?*

Aluno L: *no arranjo a ordem não importa. E na permutação…*
Professor II*: o que significa "não importar"?*
Aluno L*: tanto f… eh… se um grupo assim eu, C e R, seria diferente de R, C.*
Prof. II: *então no arranjo a ordem dos elementos determina um novo elemento do grupo da Análise Combinatória. Ok? Enquanto numa combinação isso não existe. Então o quê que há de diferente? Se eu escrevo: ABC, e escrevo depois: ACB, isso no arranjo são dois elementos, na combinação é um só. O quê que mudou daqui pra cá? Que tipo de Análise Combinatória eu estou fazendo? […]*
Aluno L: é uma permutação...

Esse diálogo entre aluno e professor caracterizou esforços do professor para que o aluno interagisse e concentrasse seus pensamentos nos aspectos centrais a respeito de manter a ordem ou dessa ordem não importar na contagem. Isso foi feito pelo professor ao procurar propor situações que possibilitassem uma compreensão relacional ao aluno. Reparemos que o professor argumentou de forma que o aluno pudesse compreender quando utilizar um conceito e não outro sem memorizar a aplicação de fórmulas. No início do diálogo o aluno respondeu com uma justificativa memorizada para esse tipo de pergunta. Mas o professor procurou desestabilizar essa ideia ao perguntar o que se entendia por "não importar" e complementou o sentido que o aluno deu ampliando sua compreensão.

Smole e Diniz (2010) também diferem esses dois conceitos e definem arranjo e combinação, a partir de um conjunto com n elementos, como sendo: "Arranjo Simples de **n** elementos distintos, **p** a **p** é todo agrupamento ordenado formado por **p** elementos distintos escolhidos entre os **n** elementos dados" (p. 137). Já a combinação de n elementos distintos **p** a **p** [$p \leq n$], "é todo agrupamento formado por **p** elementos distintos escolhidos dentre os **n** elementos dados, de modo que a mudança de ordem dos elementos não modifique os agrupamentos" (p. 143). Como podemos perceber o que difere arranjo de combinação é a forma como agrupamos um conjunto dado, levando em consideração a ordem do agrupamento. O que mostra que a explicação do sujeito 2T8X não procede.

Outros dois alunos escreveram as duas definições, <u>mas não conseguiram distinguir um conceito do outro.</u> Por exemplo, o aluno 2V13Y: "*Sei que um difere do outro pelo fato de em um, a ordem dos elementos não alterar a formação do conjunto e no outro a ordem altera a formação do conjunto, mas não sei o nome de cada um*". Explicação sem evidências claras de uma compreensão relacional dos conceitos.

Outros <u>definiram apenas um dos conceitos</u> (arranjo ou combinação), alguns de forma correta outros de forma errada. Estes casos nos trouxeram uma grande dificuldade, sabermos o que um estudante compreendia pela diferença conceitual, pois ao informar o que é arranjo ou combinação em sua resposta não esclareceu qual é a diferença entre estes dois conceitos. Além dos exemplos acima identificamos sete estudantes que responderam de forma errada um dos conceitos, sendo cinco do 3º semestre e dois do 8º semestre. Como exemplo temos o aluno 2F9X, que definiu combinação da seguinte forma: "*Combinação é as diversas formas que se podem relacionar os números ou variáveis*".

Tivemos ainda três alunos, sendo dois do 3º semestre e um do 8º, que definiram apenas um conceito (arranjo ou combinação), porém, este de forma correta. Vejamos o que o aluno 2P3X respondeu: "*Em combinação, a ordem não altera o conjunto*". Identificamos 03 alunos que apenas <u>escreveram as fórmulas relacionadas aos dois conceitos</u>. Dois alunos, do 8º semestre, escreveram as fórmulas de maneira correta e um aluno, do 3º semestre, escreveu a fórmula de combinação correta e a de arranjo ele confundiu com permutação.

Detectamos ainda um grupo de 15 alunos que <u>não deixou claro a que conceito os alunos estavam se referindo</u>. Estes alunos deram respostas do tipo: "*São possíveis formas de combinar*"; "*Arrumar cada combinação em sua ordem*".

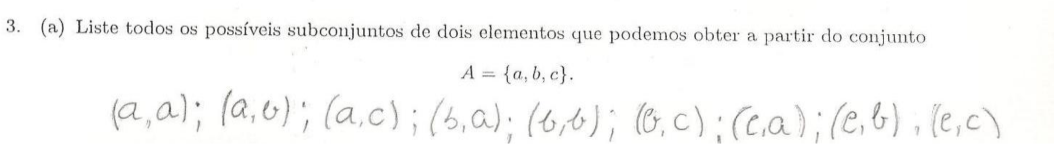
De um modo geral, notamos que mesmo os alunos que acertaram a definição dos conceitos, estes não demonstraram uma resposta precisa se compararmos com as definições que encontramos em livros didáticos de educação básica ou de ensino superior. As explicações variaram em torno de não justificar a diferença entre os conceitos e apresentar uma explicação para o que seja arranjo e combinação. Ou, explicar que em um conceito a ordem importa e no outro não, sem explicitar em que conceito essa ordem tem relevância. Tudo isso nos mostrou que licenciandos em matemática estão se formando sem ter segurança sobre os entendimentos dos conceitos de arranjo e combinação. É preocupante constatar isso com estes estudantes universitários, porque eles trabalharão com esses conceitos básicos de combinatória ao atuarem como professores de matemática, sem contar os que já exercem o ofício, mesmo não estando formados.

iii) Quais erros foram cometidos?

Na 3ª questão letra (a), 23 alunos cometeram o erro de listarem todos os subconjuntos do conjunto A, quando deveriam listar somente aqueles que contêm dois elementos. Ao analisar as resoluções dos alunos acreditamos que esse tipo de erro ocorreu por causa da falta de atenção ao interpretar o problema, até porque listar subconjuntos eles demonstraram saber.

Outro erro cometido por alguns alunos foi não distinguir, por exemplo, AB de BA e/ou, listar{aa}, {bb}, {cc}, como sendo subconjuntos do conjunto A. Ao todo foram 47 alunos do 3º semestre e 11 do 8º, que cometeram este tipo de erro.

Figura 5: 2J11X



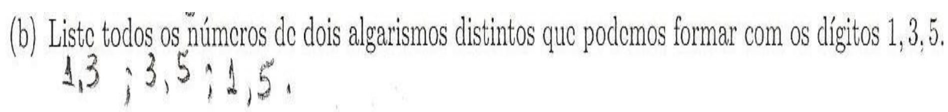
3. (a) Liste todos os possíveis subconjuntos de dois elementos que podemos obter a partir do conjunto

$A = \{a, b, c\}$.

(a,a); (a,b); (a,c); (b,a); (b,b); (b,c); (c,a); (c,b), (c,c)

Para a letra (b) desta mesma questão, verificamos que os erros mais frequentes ocorreram porque os alunos listaram todas as possibilidades sem considerar que deveriam usar dígitos distintos. Esses alunos incluíram, por exemplo, 33 e 55 como sendo respostas possíveis também nesta questão. Também tivemos outro tipo de erro porque deixaram de listar números de dois algarismos e nem responderam ao que foi solicitado por provavelmente terem interpretado que era para informar que dois dígitos deveriam utilizar.

Figura 6: 2V2X



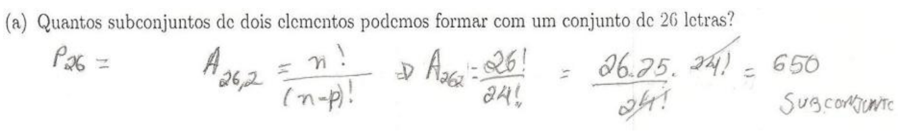
(b) Liste todos os números de dois algarismos distintos que podemos formar com os dígitos 1, 3, 5.

1,3 ; 3,5 ; 1,5.

Na letra (c) os erros ocorridos estão relacionados à confusão entre os conceitos e fórmulas e/ou dificuldade em distinguir um conceito do outro. Uma grande parte não sabe ao certo se é no arranjo ou na combinação que se alterarmos a ordem da organização dos elementos e obtivermos um resultado novo, então isso será um arranjo.

No primeiro item da 4ª questão os alunos deveriam aplicar os seus conhecimentos sobre combinação. Verificamos que 22 alunos ao invés de terem utilizado combinação recorreram ao arranjo ou a permutação para tentar responder a questão.

Figura 7: 2C2X

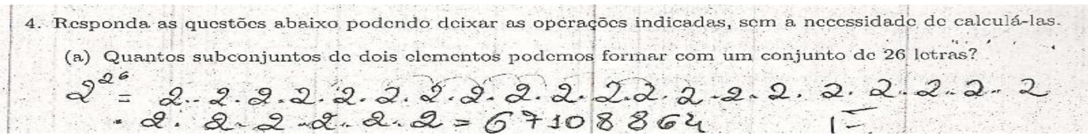


(a) Quantos subconjuntos de dois elementos podemos formar com um conjunto de 26 letras?

$P_{26} =$ $A_{26,2} = \frac{n!}{(n-p)!} \Rightarrow A_{26,2} = \frac{26!}{24!} = \frac{26.25.\cancel{24!}}{\cancel{24!}} = 650$ subconjunto

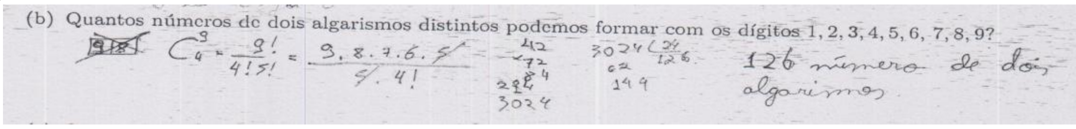
Talvez pelo fato de ter a palavra subconjunto no enunciado da questão tivemos 13 alunos que tentaram utilizar o princípio de que para determinar o número de subconjuntos de um conjunto qualquer, bastaria elevar a 2 o número de elementos do conjunto.

Figura 8: 2S1X



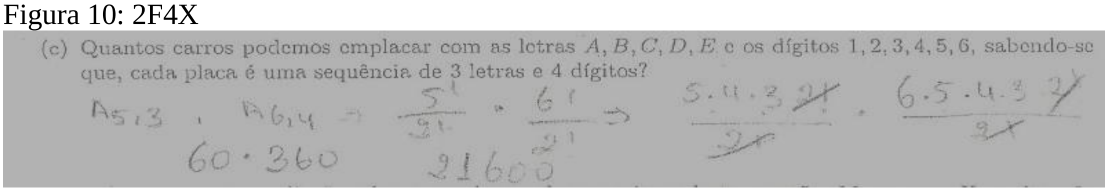
No segundo item os alunos deveriam aplicar os conhecimentos sobre arranjo. Os erros mais frequentes foram de alunos que recorreram à combinação ou à permutação para tentar responder a essa questão ou, assim como na 3ª questão, letra (b), listaram todas as possibilidades sem distinguir os elementos. Vejamos os exemplos:

Figura 9: 2V9X



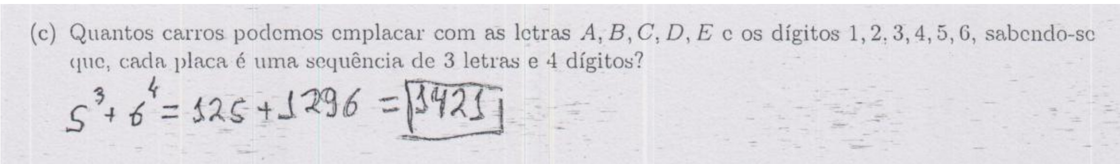
Na letra (c), os alunos deveriam fazer dois arranjos com repetição, um utilizando as letras e outro utilizando os números, em seguida multiplicar um pelo outro, ou seja, usar o princípio multiplicativo. Nesta alternativa o número de acertos foi de 22, o número de erros 94 e 86 estudantes não responderam essa questão. Fica evidente que a maioria dos estudantes está sem compreender como resolver situações de combinatória deste tipo. Os erros identificados foram de escrita de fórmula e utilização de combinação ou permutação ao invés de arranjo com repetição.

Figura 10: 2F4X



Outro erro encontrado foi somar os resultados parciais ao invés de multiplicá-los.

Figura 11: 2I5Y



É preciso discutir e questionar juntamente com os alunos porque multiplicamos os resultados parciais ao invés de somarmos. Resolver problemas com números menores e simular o que aconteceria se somássemos e se multiplicássemos. Solicitar aos alunos que explicitem seus procedimentos de raciocínio e argumentem porque estão recorrendo a tais procedimentos. Isso implica em escutarmos os alunos para que tornemos os erros observáveis. Autores como Borasi (1996), Cury (2007) e Pinto (2000) nos mostram como é necessário este tipo de diálogo com os alunos a respeito dos erros cometidos e destes se tornarem observáveis e conscientes para professores e alunos. Além disso, há a necessidade de desequilibrar cognitivamente algumas certezas que os alunos possuem para que se questionem e revejam suas respostas. Talvez assim possamos contribuir de forma a minimizar erros como esses que encontramos.

Juntamente com o Teste II aplicamos um questionário já citado. Perguntamos sobre o tempo de dedicação aos estudos e obtivemos algumas informações a respeito de tempo de estudos e outros aspectos. Por exemplo, ao olharmos a tabela 1 verificamos que o tempo investido para o estudo não tem sido suficiente para as exigências do curso. Precisaríamos investigar por que a maioria dos estudantes se dedica tão pouco ao curso. Se juntarmos os estudantes que disseram estudar de uma a cinco horas por semana (30,7% + 27,2%) poderíamos dizer que 57,9% estudaram, em média, uma hora por dia, considerando 5 dias úteis da semana. O que representa pouquíssimo tempo de estudo, nos fazendo (professores e alunos) questionar se esse tempo é suficiente para uma formação de qualidade (tanto na parte específica quanto na parte pedagógica) para atuar como professor.

Tabela 1**:** Tempo de dedicação aos estudos semanalmente – 2011
Fonte: Dados da coordenação geral da pesquisa, 2011.

Só assiste às aulas	7,9%
1 a 2 h	30,7%
3 a 5 h	27,2%
6 a 8h	15,4%
+ de 8h	8,4%
Não Respondeu	10,4%

Investigamos quais estratégias os alunos estão utilizando para superarem as suas dificuldades, em relação aos conceitos matemáticos, que foram detectadas no Teste I.

Tabela 2: Estratégias utilizadas para superar as dificuldades detectadas no Teste I
Fonte: Dados da coordenação geral da pesquisa, 2011.

Dedicando-se mais ao estudo	26
Revisando os conteúdos da Educação Básica que possui dificuldades	14
Estudando em grupo	2
Prestando mais atenção às aulas	5
Nenhuma estratégia	17
Não Responderam	134

Temos um total de 151 estudantes que não apresentam mudança de atitude mesmo diante desse quadro de dificuldade com alguns assuntos matemáticos. Alunos e professores do ensino superior no estado da Bahia precisam modificar suas práticas. Por um lado, os alunos precisam investir tempo nos estudos universitários, pois dificuldades conceituais só serão superadas com muito esforço reconhecendo que é necessário voltar a conteúdos de educação básica para construir os conhecimentos que ainda não foram apreendidos. Por outro lado, professores precisam modificar a estrutura curricular para que o assunto “análise combinatória” possa ser de fato estudado no curso de licenciatura em matemática. Contudo, o que tem a ser feito não se resume a isso, pois as práticas para o ensino do mesmo precisam ser alteradas. Recorrer às fórmulas sem o entendimento dos procedimentos não trará benefícios, nem contribuirá com as estratégias para ensiná-lo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Muitos estudantes também relataram não haver estudado análise combinatória no ensino médio ou, quando o ensino ocorreu, informaram que esse foi realizado de forma mecânica, apenas recorrendo ao uso de fórmulas ou técnicas. Isso não garante a apreensão ou construção dos conceitos envolvidos em análise combinatória com compreensão e significado. As principais dificuldades encontradas pelos licenciandos foram: interpretar e resolver um problema de contagem, utilizando a permutação, a combinação ou o arranjo. Identificamos alguns erros como: aplicação das fórmulas de arranjo e combinação em momentos inadequados segundo o contexto da situação-problema ou na própria escrita das fórmulas, confundindo arranjo com combinação. Esses resultados também se confirmam na pesquisa realizada por Pessoa e Borba (2010, p. 14):

> ... ao se utilizarem de fórmulas, alunos ainda o fazem de maneira inadequada, demonstrando que o mesmo formalizando esse ensino, talvez o trabalho não esteja ocorrendo de maneira adequada, que deveria ajudar o aluno a pensar sobre a lógica implícita em cada significado de problema estudado ....

Sabemos que as questões analisadas neste texto também aparecem de forma semelhante em livros didáticos. Acreditamos que essas questões exigem um nível de compreensão do assunto, mas poderiam ser resolvidas se os estudantes tivessem algum conhecimento relacional do assunto. Sabemos que existem tarefas de combinatória mais complexas do que estas usadas no Teste II. Entretanto, observamos que as resoluções dos futuros professores deixaram a desejar mesmo com essas tarefas sem tanta dificuldade. É preciso rever o papel de cada um neste processo de ensino e aprendizagem para reverter a situação encontrada. Por parte de professores, tanto de ensino básico como superior é necessário que as práticas de ensino se modifiquem para que ocorra aprendizagem dos alunos. É necessário que este assunto seja “ensinado” de modo que o conhecimento e a compreensão sejam extrapolados e os estudantes construam os conceitos abordados em análise combinatória conseguindo aplicá-los às situações quando necessários. Além disso, é preciso que as práticas de ensino deste conteúdo não se limitem a apresentar a definição e aplicação de fórmulas (BORTOLOTI; FERREIRA; SANTOS-WAGNER, 2012).

É fundamental discutir análise combinatória nos cursos de licenciatura em matemática, pelo menos no estado da Bahia. É necessário que este conteúdo se faça presente na estrutura curricular dos cursos. Por outro lado, os estudantes também precisam modificar seus hábitos de estudo e recuperar o que não foi aprendido seja na educação básica ou no ensino superior. Faz-se necessária a dedicação de mais tempo no curso de licenciatura para que assim o interesse pelo estudo de combinatória seja despertado e conscientemente aprendido.

REFERÊNCIAS

BLOOM, B. S.; ENGELHART, M. D.; FURST, E. J.; HILL, W. H.; KRATHWOHL, D. R. *Taxionomia de objetivos educacionais:* domínio cognitivo. 1 ed. Porto Alegre, Globo, 1979.

BORASI, R. *Reconceiving mathematics instruction:* a focus on errors. Norwood, New Jersey:Ablex Publishing Corporation, 1996.

BORTOLOTI, R. D. M.; NASCIMENTO, J. C.; SILVA, C. V.; OLIVEIRA, A. P. T. *Análise dos erros cometidos por discentes de cursos de licenciatura em matemática das universidades estaduais baianas*. 2007. 20 f. Projeto de Pesquisa – Departamento de Química e Exatas, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Jequié.

BORTOLOTI, R. D. M.; SANTOS-WAGNER, V.M.; FERREIRA, J. R. Formação de professores: erros em análise combinatória. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática, 8, 2011, Recife. *Anais*…, Recife, CIAEM, 2011.

BORTOLOTI, R. D. M; FERREIRA, J. R.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. Análise combinatória e a licenciatura em matemática na Bahia. In: SBEM (Ed.), *Anais Eletrônicos* do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (p. 1-18). Petrópolis, Brasil: SIPEM. CD-ROM, GT 04, 2012.

BORTOLOTI, R. D. M. Primeiros resultados da pesquisa Análise de erros no estado da Bahia: os cursos de licenciatura em matemática nas universidades estaduais. *Estudos IAT*, V. 2, N. 2, p. 170-184, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais+*. Brasília: MEC, 2000.

_______. Ministério da Educação. *PDE:* Plano de Desenvolvimento da Educação: SAEB: ensino médio: matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB; INEP, 2008a.

_______. Portaria Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP) nº 132 de 07 de agosto de 2008, *Diário Oficial* [da] República Federativa do Brasil, Brasília, 11 ago. Seção 1, p.13, 2008b.

CURY, H. N. Análises de erros em disciplinas matemáticas de cursos superiores. In: SBEM (Ed.), *Anais Eletrônicos* do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (p. 1-17). Águas de Lindóia, Brasil: SIPEM. CD-ROM, GT 04, 2006.

________. *Análise de erros:* o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

FERREIRA, A. B. H. *Mini Aurélio***:** o mini dicionário da língua portuguesa. 4. ed. revisada e ampliada. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001.

FERREIRA, J. R. *Análise Combinatória*: um estudo sobre os licenciandos em Matemática da UESB – campus Vitória da Conquista. 2012. 66 f. Monografia – Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. *Investigação em educação matemática*: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

JOHNSON, E. M. S.; LARSEN, S. P. Teacher listening: the role of knowledge of content and students. *The Journal of Mathematical Behavior*. Vol. 31, 2012, p. 117-129.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. *Análise combinatória e probabilidade.* Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

PESSOA, C., BORBA, R.. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. *EM TEIA|Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, América do Norte, 1, jun. 2010. Disponível em: <http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia/article/view/4/2>. Acesso em: 24 Abr. 2011, p. 1-22.

________. Quem dança com quem: O desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *Zetetiké*, Campinas: CEMPEM–FE-UNICAMP, v. 17, 2009. p. 105-150.

PINTO, N. B. *O erro como estratégia didática***.** 2. ed. Curitiba: Papirus, 2000.

SABO, R, D. *O ensino dos conceitos de análise combinatória e o livro didático:* discurso de professores do Ensino Médio. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/257-1-A-GT1_sabo_ta.pdf >. Acesso em: 04 mar. 2012, p. 1-20.

SILVA, C. V.; BORTOLOTI, R. D. M.; GUSMÃO, T. C. R. S. Análise dos erros cometidos por discentes do curso de licenciatura em matemática: um estudo de caso da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – *Campus* Jequié. In VI SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 4, 2009, Taguatinga. *Anais*.... Taguatinga, SIPEM: SBEM, 2009.

SKEMP, R. R. Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, p. 20-26, 1976.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. *Matemática:* Ensino Médio**.** 6. ed. v. 2. São Paulo: Saraiva, 2010.