

# Generalização de padrões, pensamento algébrico e notações: o papel das estratégias didáticas com interfaces computacionais

GERSON PASTRE DE OLIVEIRA\*

## Resumo

A generalização de padrões é, segundo alguns autores, essencial para o ensino de álgebra, o que torna as estratégias ligadas ao seu entendimento e uso extremamente relevantes na formação e no trabalho do professor de matemática, uma vez que lhe pode proporcionar meios para criar transposições valiosas do saber a ser ensinado aos seus alunos. Na busca de padrões algebricamente úteis, as tecnologias de informação e comunicação (TICs) podem ter um papel decisivo, desde que utilizadas de forma crítica e reflexiva e no âmbito de uma estratégia didático-pedagógica que a veja como mediadora de um processo de busca por generalizações e/ou formalizações no âmbito da álgebra. Este artigo relata uma investigação sobre esses temas, generalização de padrões e TICs, realizada com alunos do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, tendo como base o trabalho de Zazkis e Liljedahl e com o emprego de uma interface informatizada. As reflexões dos pós-graduandos são trazidas ao longo do texto, subsidiando uma análise que leva em conta as dificuldades de aprendizagem em álgebra e as possibilidades das TICs na transposição didática das formalizações matemáticas.

**Palavras-chave:** generalização de padrões; ensino de álgebra; tecnologias de informação e comunicação.

## Abstract

*Pattern generalization is, according to some authors, essential to the teaching of algebra, which makes the strategies related to its understanding and use highly relevant in the education and work of Mathematics teachers, as it may provide the means to create valuable transpositions of the knowledge to be taught to students. In the search for patterns that are algebraically useful, the*

---

\* Doutor em Educação (USP) – Professor – PEPG em Educação Matemática – PUC-SP.  
E-mail: gpastre@pucsp.br

*Information and Communication Technologies (ICT) can have a decisive role, provided that they are used in a critical and reflective way and as part of a didactic-pedagogical strategy that sees ICT as mediators in a process of search for generalizations and/or formalizations in Algebra. This article reports an investigation about these issues conducted with students of the Post-Graduate Program in Mathematics Education at PUC/SP, based on the work of Zazkis and Liljedahl and with the use of a computer interface. The post-graduate students' reflections are presented along the text, subsidizing an analysis that takes into account the difficulties of learning in Algebra and the possibilities of ICTs in the didactic transpositions of mathematical formalizations.*

**Keywords:** *Pattern generalization; Algebra teaching; information and communication technologies.*

## **Generalização de padrões e TICs**

Que há de tão relevante no tema “generalização de padrões” no contexto da álgebra? Para alguns autores, como Mason (1996), a expressão de generalidades está na base do conhecimento algébrico, bem como representa um importante caminho para sua consolidação. De fato, o raciocínio algébrico é, por ele mesmo, um processo de generalizações, providas por argumentos, e que possuem modos de expressão mais ou menos sofisticados, de acordo com a idade dos sujeitos envolvidos, o que permite ver a álgebra “como uma ferramenta para expressar tais generalizações (Blanton e Kaput apud Alvarenga e Vale, 2007, p. 31).

Em um contexto mais amplo, segundo Vale e Pimentel (2005, p. 14), “o uso de padrões é uma componente poderosa da atividade matemática, uma vez que sua procura é indispensável para conjecturar e analisar”. Entre as vantagens significativas que essas autoras vêem em tarefas de buscas de padrões, pode-se citar a constatação, por parte dos sujeitos envolvidos, do poder e utilidade da matemática na construção de conhecimentos, a proposta de desenvolvimento do raciocínio matemático através da solução de problemas e a melhoria da compreensão numérica, algébrica e geométrica das questões em estudo em um determinado contexto (ibid, p. 16).

Além disso, existe a visão de que uma abordagem baseada em padrões é mais adequada, por exemplo, para introduzir o conceito de variáveis do que as equações, nas quais as mesmas aparecem como incógnitas (English e Warren apud Zazkis e Liljedahl, 2002, p. 382). Aqui, Alvarenga e Vale (2007, p. 30) vão mais longe: ao entenderem a Matemática como “a ciência dos padrões”, indicam que a maneira de encarar essa disciplina foi alterada desde então, deixando de constituir um produto ou conjunto de conheci-

mentos de alto grau de especialização/abstração para constituir um processo, no âmbito do qual os aprendizes podem alcançar uma compreensão de uma matemática própria, através da qual podem justificar procedimentos e pensamentos. Tais assertivas não se dissociam da resolução de problemas, tópico estreitamente ligado à generalização de padrões. Ao contrário, defendem Alvarenga e Vale (*ibid.*, p. 28), a questão é ainda mais profunda:

A resolução de problemas vai muito além de resolver um problema. (...) É através dos problemas que o aluno pode seguir, tal como os matemáticos, um processo de envolvimento e interesse pela descoberta que leva a conseguir, em primeiro lugar, intuir os resultados e só depois prová-los. A resolução de problemas surge, pois, como uma forma, entre outras, de colocar os alunos numa situação de fazer matemática e ainda contribui para uma maior motivação (...). A ligação entre a realidade e a sala de aula pode ser estabelecida através da resolução de problemas e, sobretudo, podemos trabalhar diferentes conceitos matemáticos ao mesmo tempo.

E, especificamente na ligação entre resolução de problemas e descoberta de padrões, intervêm as autoras:

Os problemas que envolvem a descoberta de padrões contribuem para o desenvolvimento do raciocínio e para o estabelecimento de conexões entre diferentes temas matemáticos. Em particular, é um modo de envolver os alunos nalgumas das componentes fundamentais do pensamento algébrico como sejam o particularizar, o conjecturar, o generalizar e, eventualmente, o simbolizar das relações encontradas. (*Ibid.*)

Todavia, existem dificuldades nos processos supramencionados, entre as quais a da percepção, por parte dos estudantes, daquilo que Lee chama de “padrão algebricamente útil”, o que leva os mesmos a permanecerem, segundo o autor, presos as suas percepções iniciais, nem sempre válidas do ponto de vista algébrico (apud Zazkis e Liljedahl, 2002, p. 382). Buscar caminhos para que os estudantes consigam trabalhar com a transposição de uma noção intuitiva de padrão em direção à manipulação algébrica das propostas de solução para determinado problema é um desafio importante, com o qual se deve lidar através de estratégias didático-pedagógica adequadas, considerando as interfaces e mediações

disponíveis. Nesse aspecto, o emprego de tecnologias de informação e comunicação (TICs) pode ser adequado, quando se consideram abordagens interativas e colaborativas de ensino-aprendizagem. As TICs podem aparecer ligadas às tarefas que tenham a generalização de padrões como base no ensino de Álgebra, mas, como em outros processos de ensino-aprendizagem, não constituem soluções prontas ou melhorias automáticas. Não se pode pretender a inserção de quaisquer tecnologias em espaços de ensino-aprendizagem sem a crítica do uso, ela mesma permeando um projeto pedagógico e uma estratégia que contemplem a participação de alunos e professores como figuras principais do processo, a partir da proposta de que o foco deve ser posto nas pessoas, de modo a promover nas mesmas novas possibilidades de interação, de aprendizado compartilhado e colaborativo, com vistas à ampliação da autonomia (Oliveira, 2007).

As ferramentas computacionais, utilizadas como auxiliares do processo de ensino-aprendizagem – portanto, devidamente encaixadas na estratégia pedagógica do curso – rendem largas oportunidades para a construção crítica do conhecimento. Não realizam o papel do professor, não ensinam, não resolvem todos os problemas das diversas dimensões da escola, mas podem oportunizar, no contexto da sala de aula e para além dele, a dinâmica da experimentação (Kenski, 2001). Além disso,

[Quando do] uso das chamadas tecnologias de informática na educação, cresce, ainda mais, a relevância da intervenção docente. O professor deve assumir o fundamental papel de crítico dos usos possíveis da tecnologia, selecionando, com conhecimento de causa, aquelas que possam contribuir efetivamente para o tipo de aprendizado desejado para seus alunos. (Oliveira, 2002)

As tecnologias podem permitir a ampliação do aspecto experimental da matemática, o que permitiria desenvolver, entre os alunos, um impulso investigativo característico da atuação dos matemáticos (Ponte e Canavarro, 1997). Para D'Ambrosio (1999)

[...] a tecnologia, entendida como a convergência do saber [ciência] e do fazer [técnica], e a matemática são intrínsecas à busca solidária de sobreviver e de transcender. A geração do conhecimento matemático não pode, portanto, ser dissociada da tecnologia disponível.

O entendimento do impacto da tecnologia sobre a sociedade atual é essencial para o aprendizado de matemática e sua aplicação em situações cotidianas. Esse é o entendimento do Ministério da Educação, no que diz respeito, por exemplo, ao ensino médio:

Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática. (Brasil, 2006, p. 87)

A relação entre tecnologias e generalização de padrões em álgebra não ocorre sem intencionalidade, ou seja, a composição do uso de TICs nesse âmbito deve ocorrer através de uma estratégia que preveja o trabalho do professor em tarefas de transposição, nas quais as TICs podem ter importante papel.

Este artigo relata uma investigação realizada tendo como participantes alunos de mestrado acadêmico ligados ao Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, mais especificamente cursando a disciplina Estudos Complementares no primeiro semestre de 2008. Um dos temas dos encontros semanais era, justamente, a generalização de padrões, o que permitiu uma abordagem prática envolvendo TICs, como é descrito a seguir.

### **A proposição de uma tarefa e sua resignificação no contexto da pós-graduação**

Em seu artigo, Zazkis e Liljedahl (2002, p. 383) comentam uma tarefa relacionada à generalização de padrões proposta a um grupo de 36 professores em formação do ensino básico. Os professores foram convidados a analisar uma matriz numérica com a seguinte configuração:

1	2	3	4	
	8	7	6	5
9	10	11	12	
	16	15	14	13
17	18	19	20	
...				

Figura 1 – Matriz numérica apresentada aos estagiários

Em seguida, em relação à matriz mencionada, foram propostos alguns questionamentos, destinados a provocar, entre os participantes do estudo, a busca de estratégias ligadas à generalização de padrões (ibid.):

- Como você pode continuar este padrão? (ou: Como você pode estender este arranjo, preservando alguma regularidade?);
- Suponha que você continue [o arranjo], indefinidamente. Existem números os quais você saberia “com certeza” onde colocar? Como você decidiria?
- Você pode prever onde o número 50 estaria? 150? E o 86? 87? 187? 392? 7386? 546?
- Em geral, dado um número qualquer, como se poderia prever onde o mesmo apareceria neste padrão? Explique a estratégia que você propõe.

Em duas semanas, os participantes da pesquisa deveriam apresentar relatos detalhados sobre seus progressos, com ênfase nas estratégias e recursos matemáticos adotados, no lugar da simples apresentação de uma solução final. Os autores acrescentam que nenhum formalismo algébrico foi requisitado ou mesmo predeterminado quando da transmissão da atividade aos sujeitos.

Na transposição para o contexto da pós-graduação, porém, os mestrandos já haviam lido o texto, portanto, tinham a expectativa de que, no âmbito da discussão teórica sobre pensamento e notação algébricos, o reuso da tarefa original trouxesse a pretensão de construir uma notação capaz de expressar questões relativas à posição de um número natural qualquer na matriz e/ou à continuidade do arranjo com alguma regularidade.

Sendo assim, antes de utilizar recursos de informática, os mestrandos foram reunidos em grupos e convidados a discutir as propostas existentes no

texto e a estender ou completar as mesmas, se julgassem necessário, bem como sugerir outras estratégias relativas à generalização de padrões e a uma representação algébrica que refletisse o pensamento algébrico envolvido, em relação a um problema distinto: dados linha e coluna de uma matriz como aquela do texto de referência, como trazer o número natural correspondente? A descrição e os resultados dessa atividade são trazidos mais adiante. Os temas da discussão eram relacionados às alternativas para encontrar as notações algébricas equivalentes e (principalmente) às possibilidades ligadas à educação matemática em relação à generalização de padrões. Alguns elementos direcionadores dessa discussão foram:

- A matriz pode ser continuada de diversas formas, preservando algum tipo de regularidade. Entretanto, no ponto de vista dos autores, algumas extensões são percebidas como mais “naturais” do que outras (ibid., p. 384);
- A matriz numérica utilizada pode ser vista como uma combinação de diversas características generalizadoras existentes na literatura de referência – padrões lineares, numéricos, repetitivos e visuais (ibid.);

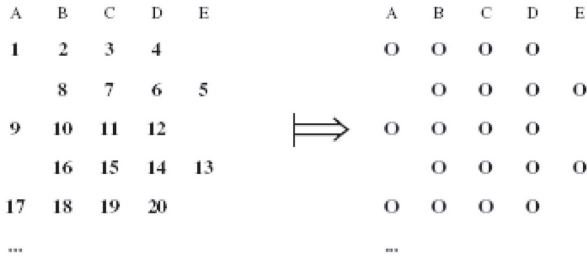


Figura 2 – A matriz da tarefa como padrão visual

Entre as diversas alternativas discutidas, surgiram comentários relativos às dificuldades de expressão algébrica que os professores envolvidos na pesquisa encontraram, ainda que eles fossem capazes de entender o problema algebricamente, propondo alguns algoritmos que podiam conduzir a uma resposta relativa à posição dos números na matriz. Os pós-graduandos afirmaram que essas dificuldades são recorrentes entre os professores de matemática em formação, e mesmo entre aqueles que já militam na docência há algum tempo. Essas dificuldades são ainda maiores no que diz respeito ao trabalho do professor com seus alunos, pois os mesmos, segundo os mestrandos, carecem de idéias e de formação para

realizar a transposição didática entre a resolução formal do problema e as estratégias de ensino-aprendizagem eventualmente envolvidas.

Este ponto de vista, aliás, é corroborado por Machado (2008, p. 8) e Resende (2007, p. 223), que entendem que conteúdos e as práticas existentes nas licenciaturas – portanto, na base da formação do professor de matemática – têm tido uma abordagem de caráter acadêmico, sem o uso de transposições didáticas e de tratamentos pedagógicos adequados ao professor em formação. Essa afirmação é feita pelos autores, originariamente, em relação à Teoria dos Números, mas pode ser estendida ao contexto deste trabalho. Com relação a essa afirmação, Fey, Doerr et al (2007, p. 30) discutem que pesquisas devem ser conduzidas nessa área, com intuito de analisar as conexões entre os cursos de formação em álgebra (para os professores) e os currículos de matemática adotados nas escolas, de modo a entender como os conceitos algébricos podem auxiliar os professores a desenvolver problemas mais interessantes, fornecendo melhores explicações aos estudantes. Essas afirmações indicam a atualidade e a necessidade de que os professores possam ter, no âmbito de seus processos de formação, noções relativas à transposição didática desde certo saber a ensinar até o objeto de ensino em si, de modo a, nessa trajetória, superar a exclusividade da abordagem meramente axiomática no ensino (Chevallard, 1991, p. 39; Pais, 2008, p. 40).

Assim, passou-se a considerar a possibilidade da utilização de TICs como mediadoras, e a pertinência das mesmas no caso específico. A discussão, nesse ponto de vista, partiu do princípio de que as tecnologias não representavam soluções para os problemas levantados, pela sua mera inserção, mas possibilitariam um ambiente de interações que poderia representar, para alunos e professores, uma interface importante na comunicação do saber a ser ensinado e nas trajetórias desde a formulação do problema até as propostas para seu entendimento e resolução (Oliveira, 2007, *passim*).

Além disso, seria importante entender o sentido que o uso de um programa computacional possibilitaria edificar para o conceito matemático em questão, bem como a relação entre o modelo envolvido na construção da proposta informatizada e a interpretação dos resultados, e, também, a possibilidade de participação do professor no processo de aprendizagem do aluno nesse contexto informatizado, do ponto de vista da gestão das situações de aprendizagem que surgem. Essas questões, em particular, são levantadas por Balacheff como fundamentais à transposição informática (Balacheff, 1998).



### Propostas e transposições

O entendimento do problema e a conseqüente generalização proposta por Zazkis e Liljedahl (2002, pp.385-386) passa pela identificação de um ciclo de repetição produzido na aplicação de uma mesma transformação sobre cada elemento da matriz, o que ocorre quando se toma o resto da divisão de cada número por 8.

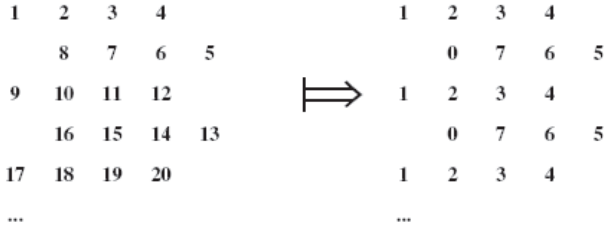


Figura 3 – Elementos da matriz e seus restos na divisão por 8

Segundo os autores, considerando as linhas numeradas seqüencialmente a partir de 1, e as colunas variando de A a E, da esquerda para a direita, a posição de um certo número natural na matriz, em linha e coluna, seria dada pela formalização dos seguintes padrões:

#### Quadro 1 – Formalização para colunas na matriz

Coluna (n) = { A, se  $R(n,8)=1$ ; B, se  $R(n,8)=2$  ou 0; C, se  $R(n,8)=3$  ou 7; D, se  $R(n,8)=4$  ou 6; E, se  $R(n,8)=5$  }

Onde n = número natural

$R(n,8)$  = resto de divisão de n por 8

#### Quadro 2 – Formalização para linhas na matriz

Linha (n) = {  $2 \times Q(n,8)$ , se  $R(n,8) = 0$ ;  $2 \times Q(n,8) + 1$ , se  $R(n,8) = 1,2,3,4$ ;  $2 \times Q(n,8) + 2$ , se  $R(n,8) = 5,6,7$  }

Onde n = número natural

$R(n,8)$  = resto de divisão de n por 8

$Q(n,8)$  = quociente da divisão de n por 8

A transposição aqui descrita utilizou o *software* Microsoft Excel em duas frentes distintas: possibilitar a *construção de uma matriz*, através da qual se podem visualizar todos os elementos, considerando as linhas de 1 a 65536, e de um conjunto de *funções do programa* que permitem exibir, dado um elemento, sua posição na matriz, em linha e coluna. Adicionalmente, fez-se, também, o inverso: dados linha e coluna, mostrar qual o número natural correspondente.

	A	B	C	D	E	F
1	1	2	3	4		<b>1</b>
2		8	7	6	5	<b>1</b>
3	9	10	11	12		<b>2</b>
4		16	15	14	13	<b>2</b>
5	17	18	19	20		<b>3</b>
6		24	23	22	21	<b>3</b>
7	25	26	27	28		<b>4</b>
8		32	31	30	29	<b>4</b>
9	33	34	35	36		<b>5</b>
10		40	39	38	37	<b>5</b>
11	41	42	43	44		<b>6</b>
12		48	47	46	45	<b>6</b>
13	49	50	51	52		<b>7</b>
14		56	55	54	53	<b>7</b>
15	57	58	59	60		<b>8</b>
16		64	63	62	61	<b>8</b>
17	65	66	67	68		<b>9</b>
18		72	71	70	69	<b>9</b>
19	73	74	75	76		<b>10</b>
20		80	79	78	77	<b>10</b>

Figura 4 – Trecho da matriz construída no Microsoft Excel

A fórmula envolvida na construção da matriz é bastante simples: basta somar um ao valor da posição anterior. Por exemplo, a fórmula da posição D8 é =E8 + 1, enquanto que a de C11 é =B11 + 1. Uma vez construída a fórmula a partir do segundo conjunto de 8 elementos (de A3 até E4), basta replicar a mesma até o final da planilha.

Quadro 3 – “Calculadora” de posição na matriz, construída no Microsoft Excel

Número:	548	Coluna:	D	Linha:	137
Quociente:	68	Posição:	D		
Resto:	4	Conj. Ordem:	69		
Coluna:	D	Conjunto ordem:	69		
Linha:	137	Número:	548		
Resto:	4				

Para construir a “calculadora” da posição na matriz, outras funções do aplicativo estão envolvidas. Considerando que **n** está na célula N12, que o resto da divisão está na célula N14, que o quociente da divisão de **n** por 8 está em N13 e que a tabela contendo o mapeamento das colunas de acordo com o resto da divisão por 8 está entre as células A7 e B14, as fórmulas são as seguintes:

*Cálculo do resto da divisão por 8:*

$$= \text{MOD}(\text{N12} / 8)$$

*Cálculo do quociente da divisão por 8:*

$$= \text{ARREDONDAR.PARA.BAIXO}(\text{N12}/8;0)$$

*Coluna (ver Quadro 1):*

$$= \text{PROCV}(\text{N14};\$A\$7:\$B\$14;2;\text{FALSO})$$

*Linha (ver Quadro 2):*

$$= \text{SE}(\text{N14}=0;2*\text{N13};\text{SE}(\text{E}(\text{N14}>=1;\text{N14}<=4);2*\text{N13}+1;2*\text{N13}+2))$$

	A	B
7	1	A
8	2	B
9	3	C
10	4	D
11	5	E
12	6	D
13	7	C
14	0	B

Figura 5 – Matriz usada pela função PROCV do Microsoft Excel, correspondente às colunas

Uma vez construídas as fórmulas mencionadas, basta ao usuário colocar o número natural desejado na célula N12 para que as posições sejam exibidas nas células correspondentes à linha e coluna. Entre os pós-graduandos, diversas manipulações da interface foram feitas, sendo que cada um foi convidado a registrar suas impressões sobre o uso do *software* e a transposição realizada, levando em consideração uma possível generalização de padrões em situações semelhantes, em sala de aula e no contexto da formação de professores de matemática.

## Análise dos resultados

Na atividade feita pelos mestrandos antes do contato com a interface computacional, e que solicitava encontrar o número natural corres-

pondente, dadas uma linha e uma coluna, diversas estratégias puderam ser observadas, como sugere o exame dos quadros seguintes. Além disso, puderam ser recuperados os elementos que surgiram no debate pós-uso do dispositivo informático, também expostos nas próximas páginas.

#### Quadro 4 – Proposta de generalização feita pelo Grupo 1

- Nesse padrão utilizaremos Q para representar o conjunto de oito (8) elementos com duas linhas;
- Dados linha e coluna para encontrarmos qual valor corresponde a essas coordenadas podemos:
  - Pegar o número correspondente a linha (L) e dividir por 2
  - $L : 2 = S . \text{O resto (r) dessa divisão apresenta apenas duas alternativas, 0 ou 1, logo a primeira condição para se encontrar o número correspondente será}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{se } r = 0 \text{ então tomaremos como base o valor } S \text{ (encontrado) para encontrar o valor} \\ \text{correspondente} \\ \text{se } r = 1 \text{ então tomaremos como base o valor } S + 1 \text{ para encontrarmos o valor} \\ \text{correspondente.} \end{array} \right.$$

- Para encontrarmos o valor correspondente à linha e à coluna dada basta seguirmos a seguinte condição:
  - Se  $r = 0$  localizamos a coluna dada no problema e efetuamos a operação para encontrar o valor

$$r = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{Coluna B} = S . 8 \\ \text{Coluna C} = S . 8 - 1 \\ \text{Coluna D} = S . 8 - 2 \\ \text{Coluna E} = S . 8 - 3 \end{array} \right.$$

- Se  $r = 1$  localizamos a coluna dada no problema e efetuamos a operação para encontrar o valor correspondente.

$$r = 1 \left\{ \begin{array}{l} \text{Coluna A} = (S + 1) . 8 - 7 \\ \text{Coluna B} = (S + 1) . 8 - 6 \\ \text{Coluna C} = (S + 1) . 8 - 5 \\ \text{Coluna D} = (S + 1) . 8 - 4 \end{array} \right.$$

A estratégia proposta pelo Grupo 1, composto por três alunos, aproxima-se bastante daquela que é sugerida no texto de Zazkis e Liljedahl (2002), no que diz respeito à configuração algorítmica utilizada. Observa-se, contudo, que um conjunto Q é referido para representar os elementos envolvidos na configuração original, de duas linhas e oito elementos, mas

não é utilizado na solução proposta. O resto de divisão cumpre o papel de determinar em qual linha da matriz o elemento se encontra, bem como, posteriormente, qual referência usar em relação às colunas. Nota-se que o número 8, relativo à quantidade de elementos em um conjunto de duas linhas, é usado como multiplicador do valor da linha dividido por 2, de cujo produto é subtraído um número entre 0 e 7, que são, justamente, os valores possíveis na ocorrência do resto de divisão por 8, o que só foi percebido pelo grupo na discussão ocorrida após a apresentação da interface computacional.

### Quadro 5 – Proposta de generalização feita pelo Grupo 2

Iniciamos nosso raciocínio pela equação  $q \cdot d + r = N$ , onde  $N$  é o número que queremos encontrar,  $q$  = quociente,  $d$  = divisor e  $r$  = resto.

Depois anotamos a coluna com seu resto correspondente.

A	B	C	D	E
1	2	3	4	
	0	7	6	5

Tentamos encontrar primeiro a generalização daqueles restos únicos nas colunas A e E.

Buscamos também montar uma expressão em relação à linha:  $q = l/2$ ,  $q = (l-1)/2$  ou  $q = (l-2)/2$  (dependendo do resto, se usa uma ou outra).

Então, quando a coluna for A, o resto será 1 e a expressão da linha ficará  $q = (l-1)/2$ . Substituindo na primeira equação:

$$q \cdot d + r = N$$

$$8q + 1 = N$$

$$8 \left( \frac{l-1}{2} \right) + 1 = N$$

$$4l - 4 + 1 = N$$

$$4l - 3 = N$$

Fizemos isso para todas as colunas encontrando:

$$4l - 3 = N \text{ para coluna A e resto 1}$$

$$4l - 3 = N \text{ para coluna E e resto 5}$$

$$4l - 2 = N \text{ para coluna B e resto 2}$$

$$4l = N \text{ para coluna B e resto 0}$$

$$4l - 1 = N \text{ para coluna C e resto 3}$$

$$4l - 1 = N \text{ para coluna C e resto 7}$$

$$4l = N \text{ para coluna D e resto 4}$$

$$4l - 2 = N \text{ para coluna D e resto 6}$$

A solução proposta pelos membros do Grupo 2 (também composto por três alunos) usou diretamente a proposta do texto de Zazkis e Liljedahl (2002): quando os mestrandos propõem uma equação para a linha, por exemplo, tomam, inversamente, o raciocínio exposto no Quadro 2. O resultado final, porém, na forma  $4l - x = N$ , com  $0 \leq x \leq 3$  precisou ser corrigido, pois apresentava alguns erros (por exemplo, a primeira proposta trazia  $4l + 3 = N$  para coluna C e resto 7, quando o correto é  $4l - 1 = N$ , neste caso). As correções foram feitas posteriormente a partir da seguinte lógica exposta na Figura 6, usando a interface proposta pela planilha. O Quadro 6, por sua vez, traz uma possível formalização da proposta do Grupo 2, após a observação da interface.

Outros quatro trabalhos foram produzidos pelos grupos restantes, os quais trouxeram soluções bastante semelhantes às já expostas.

	A	B	C	D	E		A	B	C	D	E
1	1	2	3	4		1	$4l-3$	$4l-2$	$4l-1$	$4l$	
2		8	7	6	5	2		$4l$	$4l-1$	$4l-2$	$4l-3$
3	9	10	11	12		3	$4l-3$	$4l-2$	$4l-1$	$4l$	
4		16	15	14	13	4		$4l$	$4l-1$	$4l-2$	$4l-3$
5	17	18	19	20		5	$4l-3$	$4l-2$	$4l-1$	$4l$	
6		24	23	22	21	6		$4l$	$4l-1$	$4l-2$	$4l-3$
7	25	26	27	28		7	$4l-3$	$4l-2$	$4l-1$	$4l$	
8		32	31	30	29	8		$4l$	$4l-1$	$4l-2$	$4l-3$
9	33	34	35	36		9	$4l-3$	$4l-2$	$4l-1$	$4l$	
10		40	39	38	37	10		$4l$	$4l-1$	$4l-2$	$4l-3$

Figura 6 – Comparação entre a matriz original e o padrão algébrico corrigido do Grupo 2

Quadro 6 – Formalização da proposta do Grupo 2

$N = 4l - x, x \in \{0,1,2,3\}$	
Com <u>l</u> ímpar	Coluna(n) = B $\rightarrow x = 2$
	Coluna(n) = C $\rightarrow x = 1$
	Coluna(n) = D $\rightarrow x = 0$
Com <u>l</u> par	Coluna(n) = B $\rightarrow x = 0$
	Coluna(n) = C $\rightarrow x = 1$
	Coluna(n) = D $\rightarrow x = 2$
Com <u>l</u> par ou ímpar	Coluna(n) = A ou E $\rightarrow x = 3$

## Considerações finais

Entre as impressões surgidas no debate, grande parte dos integrantes do grupo concordou que a transposição para o contexto de TIC pode facilitar a atividade de generalização de padrões por parte do professor, na medida em que, ao buscar uma lógica que atenda à construção solicitada em um problema determinado, o professor engendra fórmulas computacionais e/ou configura ferramentas do programa que geram uma formalização, a partir da qual é possível criar uma formalização algébrica em forma de notação. O desafio permanece, de acordo com as asserções dos mestrandos, em criar a ambiência para que os benefícios auferidos pelos professores possam gerar outras possibilidades de transposição, de forma que as abordagens sejam adequadas aos alunos. Uma possibilidade nesse sentido pode ocorrer na elaboração de interfaces mais amigáveis, as quais, ao serem manipuladas, evidenciassem as relações entre as transformações existentes, por exemplo, ao acrescentar novos números em uma matriz como a indicada no problema analisado neste artigo.

Além disso, as reflexões dos mestrandos sobre a tensão entre pensamento algébrico e notação algébrica indicam, direta ou indiretamente, a percepção em torno da necessidade da transposição e da comunicação relacionadas aos problemas envolvendo generalização de padrões, fatores que desempenham papéis fundamentais para a construção do conhecimento algébrico.

*Ao trabalharmos a situação exposta no artigo em sala de aula, podemos experimentar algumas das dificuldades descritas pelos autores. Inicialmente, é possível estabelecer as relações necessárias à identificação do padrão. Os passos seguintes, porém, tornam-se mais exigentes em termos de mobilização: criar notações e estabelecer as relações entre os símbolos. É dessa comunicação que o texto analisado também trata, quando considera a generalização de padrões um terreno fértil para suscitar a tensão entre o que se pensa e o que se expressa, sugerindo formas de administrá-la e utilizá-la com fins educacionais (reflexão de Aluno 1).*

*A tensão entre o pensamento algébrico e a notação algébrica proposta por Zazkis e Liljedahl (2002) está exatamente na transposição sobre o que a pessoa já possui (sua percepção de padrão) e a utilização das relações matemáticas necessárias sobre os dados coletados nos padrões, de forma a encontrar uma formalização algebricamente útil ou aplicável para a sociedade (reflexão de Aluno 2).*

*Acredito que uma tensão entre o pensamento algébrico e a notação algébrica ocorre quando, muitas vezes em uma atividade proposta, como por exemplo, uma atividade envolvendo a generalização de padrões, o aluno percebe o*

*que está ocorrendo com o padrão, até escreve alguns termos da seqüência, porém apresenta dificuldade em expressar algebricamente como seria um caso genérico (reflexão de Aluno 3).*

A investigação aqui relatada revelou, também, indícios sobre a importância da apropriação de interfaces tecnológicas por parte dos professores, corroborando as visões de Oliveira (2007) e Borba e Penteadó (2003) sobre o tema. O trabalho com os pós-graduandos indicou que existem estratégias possíveis, no âmbito da generalização de padrões, que podem diminuir a tensão entre o pensamento algébrico e as notações equivalentes, e que as interfaces computacionais podem ser usadas com essa finalidade.

Evidentemente, o uso das TICs não é o meio exclusivo pelo qual os professores podem trabalhar sua compreensão sobre o saber a ensinar, do ponto de vista da expressão do pensamento algébrico através de notações e generalizações típicas do ensino de matemática, nem mesmo se pode afirmar que somente através das TICs é possível compor os objetos de ensino, através de transposições adequadas, quando se pretende formalizar e generalizar. Outros recursos e estratégias podem apresentar a mesma eficiência (trabalhos em grupo, exposições, dinâmicas). E justamente aí, talvez, se encontrem as mais interessantes possibilidades, quando do uso conjunto de diferentes abordagens, pois o foco deve ser posto na estratégia, no trabalho didático, e não nas tecnologias em si. Para isso, entretanto, o professor deve pensar em (e receber condições objetivas para) apropriar-se de forma crítica e reflexiva das interfaces que lhe permitam selecionar as ferramentas mais adequadas, tanto para seu trabalho docente como para a construção dos próprios conhecimentos.

## Referências

- ALVARENGA, D. e VALE, I. (2007). A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante*, v. XVI, n. 1, pp. 28-55.
- BALACHEFF, N. (1998). *Eclairage didactique sur les EIAH*. In: Colloque annuel de la Société de Didactique des Mathématiques du Québec. *Actes...* Québec.
- BRASIL (2006). Secretaria da Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio, v. 2. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, MEC.



- BORBA, M. C. e PENTEADO, M. G. (2003). *Informática e educação matemática*. 2. ed. Belo Horizonte, Autêntica.
- CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, La Pensée Sauvage.
- D'AMBROSIO, U. (1999). *A influência da tecnologia no fazer matemático ao longo da história*. VII Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia, São Paulo, 1 a 4 de agosto. Disponível em: <http://vello.sites.uol.com.br/snhct.htm>. Busca em 03/2008.
- FEY, J. e DOERR, H. et al. (2007). Preparation and Professional Development of Algebra Teachers. In: *Algebra: Gateway to a Technological Future*. MAA Reports. Washington, The Mathematical Association of America, pp. 27-32.
- KENSKI, V. M. (2001). Comunidades de aprendizagem: em direção a uma nova sociabilidade na educação. *Revista de Educação e Informática "Acesso" SEED/SP*, n. 15, dezembro.
- MACHADO, S. D. A. (2008). *O estudo dos números inteiros visando uma cabeça bem-feita*. In: XIV Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino. *Anais...* Porto Alegre, 1 CD-ROM.
- MASON, J. (1996). "Expressing generality and roots of algebra". In: BEDNARZ, N.; KIERAN, C. e LEE, L. (eds.). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht, Kluwer Academic.
- OLIVEIRA, G. P. (2007). *Avaliação em cursos on-line colaborativos: uma abordagem multidimensional*. Tese de doutorado em Educação. São Paulo, USP.
- (2002). *Uma experiência de avaliação formativa a distância apoiada por computador no ensino superior: da sala de aula para o mundo*. XI Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino. *Anais...* Goiânia, 1 CD-ROM.
- PAIS, L. C. (2008). "Transposição didática". In: MACHADO, S. D. A. (org.). *Educação matemática: uma (nova) introdução*. São Paulo, Educ.
- PONTE, J. P. e CANAVARRO, P. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa, Universidade Aberta.

- RESENDE, M. R. (2007). *Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de matemática na Licenciatura*. Tese de doutorado em Educação Matemática. São Paulo, PUC.
- VALE, I. e PIMENTEL, T. (2005). Padrões: um tema transversal no currículo. *Revista Educação e Matemática*. Portugal, n. 85, pp. 14-20. Lisboa, APM, novembro/dezembro.
- ZAZKIS, R. e LILJEDAHAL, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, n. 49, pp. 379-402.

*Recebido em set./2008; aprovado em nov./2008*