Teoremas em ação utilizados pelos alunos na fatoração de expressões algébricas*

SONIA MARIA MONTEIRO DA SILVA BURIGATO**
MARILENA BITTAR***

Resumo

Nesse artigo relatamos resultados parciais de uma pesquisa cujo objetivo foi realizar uma investigação sobre teoremas em ação utilizados pelos alunos ao fatorar expressões algébricas. Para tanto, foi elaborada e aplicada uma seqüência didática com uma turma de alunos da oitava série do ensino fundamental visando validar nossas hipóteses sobre a construção de falsos teoremas em ação e estudar a estabilidade desses teoremas de modo a melhor compreender as dificuldades dos alunos na aprendizagem da fatoração. As análises mostraram que as principais dificuldades estavam relacionadas aos conhecimentos que fazem parte da construção do campo conceitual da fatoração, dentre eles a divisão e a multiplicação de monômios e binômios.

Palavras-chave: campos conceituais; álgebra; dificuldades de aprendizagem.

Abstract

This article reports partial results of a study whose objective was to perform an investigation about theorems in action used by students for factoring algebraic expressions. To this end, a didactic sequence was elaborated and applied to a group of students from the eighth grade, in order to validate our

* Pesquisa de Mestrado financiada pela Capes, desenvolvida no Mestrado em Educação da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

** Mestre em Educação – UFMS – Professora Efetiva da Secretaria Municipal de Educação de Campo Grande-MS – Coordenadora dos tutores do Curso de Matemática Modalidade a Distância – UFMS. E-mail: soniaburigato@yahoo.com.br

*** Doutora em Didática da Matemática – Universidade Jospeh Fourier – Grenoble – França – Coordenadora do Mestrado em Educação Matemática – UFMS. E-mail: marilena@nin.ufms.br

hypotheses about the construction of false theorems in action and to study the stability of these theorems so as to better understand the difficulties students have in learning factoring. The analyses showed that the main difficulties were related to the knowledge that is part of the construction of the conceptual field of factoring, among them division and multiplication of monomials and binomials.

Keywords: *conceptual fields; algebra; learning difficulties.*

Introdução

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) a Álgebra tem sido um dos conteúdos da Matemática a que os professores têm dado grande ênfase. Entretanto, isso não vem garantindo o sucesso dos alunos, como podemos observar nos resultados do Sistema de Avaliação do Ensino Básico (Brasil, 2001), em que os alunos tiveram um rendimento muito baixo nessa disciplina. Além disso, diversas pesquisas em Educação Matemática corroboram esse resultado, apontando dificuldades dos alunos nesse campo da Matemática.

Um dos aspectos mais priorizados no ensino da Álgebra tem sido a manipulação algébrica (Brasil, 1998). Contudo, mesmo em questões que exigem somente esse tipo de conhecimento, os alunos apresentam muita dificuldade, persistindo diversos tipos de erros, como: $4+11y=44y$ e $(a+b)^2=a^2+b^2$ (Ribeiro, 2001; Notari, 2002).

A fatoração é apresentada na sétima série (8º ano) do ensino fundamental e os livros didáticos, em geral, dedicam um capítulo ao ensino desse conteúdo[1] no qual normalmente são propostos vários casos, como: fatoração colocando fator comum em evidência, fatoração dos trinômios quadrados perfeitos e da diferença de quadrados, além da fatoração do cubo da soma e da diferença, dentre outros. Ela é indicada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998) na simplificação de expressões algébricas e para resolver equações.

A fatoração pode ser utilizada, também, no ensino médio no estudo da função do segundo grau, nas ineqüações, na equação da circunferência, etc. Entretanto, apesar de a sua aplicação poder ser feita nesse nível de ensino, a fatoração é pouco explorada nos livros didáticos do ensino médio (Lima, 2001). Segundo Lima (2001), após a sua apresentação no ensino fundamental, a fatoração é quase que esquecida, não sendo aplicada no

1 Até pouco tempo atrás isso, acontecia na maioria dos livros, porém, atualmente, vem diminuindo e alguns autores já não estão dedicando um capítulo ao estudo da fatoração.

ensino médio nos conteúdos que citamos. No entanto, ela pode ser aplicada não só no ensino médio como também no ensino superior em disciplinas como Cálculo ou no estudo de vetores e Geometria Analítica.

A manipulação algébrica é muito presente no momento de estudar os casos de fatoração. É preciso saber trabalhar com a soma, a subtração, a divisão e a multiplicação de monômios e binômios, dentre outros, para poder fatorar corretamente.

A fatoração utiliza-se da manipulação algébrica, e este é um dos conhecimentos em que os alunos vêm tendo dificuldades em aprender, como comprovam algumas pesquisas (Ribeiro, 2001; Da Rocha Falcão, 2003). Observamos que persistem diversos erros com relação à fatoração, como $a^2+b^2=(a+b)^2$ e $ax+b=x(a+b)$ (Bittar et al., 2004 e Marquis, 1995).

Além disso, pesquisas mostram que erros e dificuldades apresentados por alunos na aprendizagem da fatoração no ensino fundamental persistem no ensino médio (Notari, 2002) e também no ensino superior (Cury, 2003).

Assim, acreditamos que seu estudo no ensino fundamental se justifica em virtude da sua aplicação nos vários anos de estudo da Matemática, podendo ser útil inclusive na resolução de equações.

E essa foi a proposta inicial de nossa investigação, o uso da fatoração para resolver equações, contudo, decidimos montar nossa pesquisa para compreender dificuldades dos alunos na fatoração, pois percebemos que isso vinha antes da resolução de equações. E é nessa perspectiva que nasceu nossa pesquisa, que consistiu em uma investigação sobre as dificuldades dos alunos em fatorar expressões algébricas. Para tanto, buscamos identificar os teoremas em ação possíveis de serem utilizados pelos alunos e verificar a persistência do uso desses teoremas ao longo da seqüência didática que elaboramos. Para a realização da pesquisa foram utilizados dois ambientes: papel e lápis e o *software* Aplusix.[2]

Neste artigo, apresentamos dados parciais relativos à identificação de alguns teoremas em ação falsos que mais persistiram nas resoluções dos alunos, bem como algumas das análises que fizemos sobre esses erros.

---

2 Aplusix é desenvolvido pelos pesquisadores J.F. Nicaud, D. Bouhineau e S. Mezerette do Laboratório Leibniz, em Grenoble na França. No site http://aplusix.imag.fr encontra-se uma versão deste software em português.

O estudo de dificuldades dos alunos e a teoria dos campos conceituais

Como desejávamos investigar dificuldades dos alunos, buscamos por um referencial teórico que permitisse não somente identificar erros mas analisá-los de forma ampla, estudando suas persistências. Assim a teoria dos campos conceituais (Vergnaud, 1999) nos pareceu adequada para tal investigação. Segundo essa teoria "Um conceito não pode ser reduzido a sua definição se estamos interessados na sua aprendizagem e no seu ensino. É através de situações e de problemas que um conceito adquire sentido para o aluno" (p.135). Para Vergnaud, um conceito é composto de três conjuntos (**S**, **I**, **L**):

S – referência: é o conjunto de situações propostas que darão sentido ao conceito;

I – significado: conjunto dos invariantes operatórios, conceito em ação e teorema em ação associados ao conceito; eles são os conhecimentos que o sujeito mobiliza para lidar com as situações do primeiro conjunto;

L – significante: conjunto das formas de representação simbólica (lingüística ou não lingüística) do conceito, de suas propriedades, das situações e dos procedimentos utilizados para o tratamento das situações.

Desses conjuntos, um que particularmente nos interessa para o estudo dos erros dos alunos é o segundo, o conjunto dos invariantes operatórios, formado pelos teoremas em ação e conceitos em ação, e que, segundo Vergnaud (ibid.) são a base conceitual implícita (ou explícita), que está por trás das ações dos alunos ao lidar com as situações propostas. "É nos esquemas que devemos procurar os conhecimentos-em-ação, ou seja, os elementos cognitivos que permitem à ação do sujeito ser operatória" (ibid., p. 136). O aluno, em uma situação de aprendizagem, mobiliza conhecimentos que podem ser pertinentes ou não à resolução da atividade; em nossa pesquisa, buscamos identificar teoremas em ação que os mesmos poderiam mobilizar ao fatorar expressões algébricas, pois, como dissemos, para Vergnaud, eles são os conhecimentos contidos nos esquemas utilizados pelos alunos ao lidar com as situações propostas.

Esses conhecimentos, teoremas em ação e conceitos em ação raramente são explicitados pelos alunos. Eles são construídos nas ações dos mesmos ao tentar resolver uma situação, sempre em interação um com o outro; há uma relação dialética entre ambos. Na verdade, eles fazem a articulação essencial entre a teoria e a prática, pois, a análise, a busca e a seleção de informações para o tratamento de uma situação se baseiam no conjunto de conceitos e de teoremas em ação disponíveis para o sujeito.

Os conceitos em ação são do tipo funções proposicionais, podem ser pertinentes ou não às situações tratadas e são indispensáveis na construção das proposições utilizadas para lidar com as situações: os teoremas em ação. Esses, entretanto, podem ser falsos ou verdadeiros, mas o aluno os utiliza pensando ser verdadeiros. Em algumas situações, eles podem ser falsos, por estar sendo utilizados fora do seu domínio de validade ou no caso de o aluno identificar semelhança nessa situação com alguma outra tratada anteriormente; contudo, como essa semelhança é só aparente isso faz com que o aluno venha a cometer um erro.

Nós estávamos interessadas em analisar erros que persistiam nas resoluções dos alunos, descartando erros esporádicos ou erros cometidos por falta de atenção. Como exemplo, citamos um suposto caso no qual o aluno, ao tentar fatorar a expressão algébrica $7x^2+2x$, escolhe um caminho que considera pertinente para resolver a situação. Ele pode fatorar como sendo $x(7x+2x)$: está errado, mas o aluno faz essa escolha acreditando ser correta. Nesse exemplo, poderíamos supor que o aluno consegue identificar o fator comum da expressão, e divide o primeiro termo da expressão, $7x^2$, pelo fator comum corretamente. Entretanto, no segundo termo, ele não faz a divisão, simplesmente repete o termo dentro dos parênteses. Se esse aluno utiliza esse mesmo procedimento algumas vezes ao resolver atividades semelhantes podemos dizer que ele mobiliza o teorema em ação falso[3] $ax^2+bx \rightarrow (ax+bx)$. A regra correta, nesse caso, é $ax^2+bx=x(ax+b)$.

Em nossa pesquisa buscamos, primeiramente, modelar os erros dos alunos em termos de teoremas em ação e fizemos algumas escolhas, por exemplo, dados os exercícios $4x-4$, x^2+x e $4x^2-16x$, se um aluno resolve como sendo $4(x-4)$, $x(x+x)$ e $4x(x-16x)$, respectivamente, relacionamos esses erros a um mesmo teorema em ação falso que escrevemos de maneira geral como sendo: $ax-a \rightarrow a(x-a)$, $x^2+x \rightarrow x(x+x)$ e $ax^2-a^2x \rightarrow ax(x-a^2x)$. Nesses casos o aluno identifica corretamente o fator comum, mas faz a divisão (desse

3 Escrevemos os teoremas em ação na forma de uma regra genérica, em que a e b representam as constantes e x a variável. Além disso, usamos o símbolo $\rightarrow$ para indicar que não se trata de uma equivalência (igualdade) e sim de uma identificação no sentido da esquerda para a direita como identificado no texto, ou seja, cada vez que o aluno encontra a expressão ax^2+bx ele associa a expressão $x(ax+bx)$.

fator) somente no primeiro termo da expressão, e repete o segundo termo dentro dos parênteses. É importante salientar, novamente, que muitas vezes os alunos podem utilizar esses caminhos incorretos por falta de atenção ou somente em algumas ocasiões isoladas, mas nós buscamos verificar os casos que persistiram em erros desse tipo. Assim, quando dizemos que o aluno mobiliza o teorema em ação $ax^2+bx \rightarrow x(ax+b)$, significa que ele utilizou esse caminho diversas vezes em atividades semelhantes, por exemplo, como em expressões: x^2+x, $4x^2-16x$ ou $12x^2-15x$.

Para realizar o estudo dos invariantes operatórios, consideramos o conjunto das situações cujo tratamento requer a utilização de um dos seguintes casos de fatoração: fator comum em evidência, trinômio quadrado perfeito e diferença entre dois quadrados, que, por sua vez, implicam a utilização de multiplicações ou divisões de polinômios ou uma combinação das duas operações, além de "o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar tais situações como tarefas matemáticas" (Vergnaud, 1990, p.147). Dentre eles destacamos: conceitos de fator comum, quadrado de um número, termo semelhante, monômio, polinômio, produto de fatores, números inteiros, divisão e a multiplicação de números inteiros, de monômios e polinômios, fatoração de um número inteiro, redução de termos semelhantes e raiz quadrada de um termo. Relativamente aos teoremas em ação, focamos a atenção àqueles relacionados aos casos de fatoração acima relatados, buscando identificar tanto teoremas em ação incorretos quanto corretos, utilizados pelos alunos. E como buscávamos não somente identificar, mas também analisar as dificuldades dos alunos com relação à fatoração, listamos e analisamos os conceitos envolvidos nos teoremas em ação corretos de cada caso de fatoração. Trazemos em seguida alguns exemplos desses teoremas em ação corretos que modelamos de maneira geral como sendo:

- $ax^2+bx=x(ax+b)$
- $x(x+a)+b(x+a)=(x+a)(x+b)$
- $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$
- $x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$
- $x^2-a^2=(x-a)(x+a)$

A identificação dos teoremas em ação é um instrumento importante no estudo das dificuldades dos alunos na fatoração, pois pode permitir identificar possíveis falhas no desenvolvimento desse campo de conhecimento na prática pedagógica. A identificação dos erros permite investigar situações que possam ajudar na progressiva superação de tais dificuldades, e o professor tem papel fundamental nesse processo. Por esse motivo, a teoria dos campos conceituais nos pareceu um bom instrumento de análise para estudar as dificuldades dos alunos na fatoração de expressão algébrica. Nossa intenção foi identificar os teoremas em ação falsos utilizados pelos alunos, verificar se a sua utilização persistiria no decorrer das atividades e analisar os conhecimentos incorretos empregados nesses teoremas em ação.

Metodologia de pesquisa

A metodologia utilizada foi inspirada no conceito de análise teórica proposta por Henry (2006). Segundo esse autor, a análise teórica é um conjunto de estudos com objetivo de analisar situações em sala de aula, no nosso caso, estudar dificuldades dos alunos na fatoração.

Henry (ibid.) define análise teórica como um conjunto de estudos composto por:

I – Análise do conhecimento em estudo: apresentação do ensino usual do saber em jogo, estudo dos campos conceituais envolvidos nessa apresentação, dificuldades existentes no seu ensino e aprendizagem, etc.

II – Análises didáticas: análises das atividades propostas para o estudo, as variáveis didáticas pertinentes ao estudo, teoremas em ação suscetíveis de serem utilizados, meios de validação disponíveis ao aluno oferecidos pelos ambientes em estudo, etc.

III – Análise pedagógica: gestão do andamento das atividades, previsão de condutas dos alunos durante a resolução das atividades, etc.

A partir da análise de pesquisas relacionadas ao nosso tema fizemos um estudo de três coleções de livros didáticos do Ensino Fundamental,[4] em que buscamos analisar o campo conceitual envolvido na construção e apresentação da fatoração, bem como verificar se essas apresentações poderiam

---

4 *Matemática Hoje é Feita Assim*, de Antonio José L. Bigode (2000), *Tudo é Matemática*, de Luiz Roberto Dante (2003) e *Novo Praticando Matemática*, de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcelos (2002).

fazer com que algum aluno viesse a mobilizar teoremas em ação falsos. De fato, a maneira como um conceito é apresentado pode levar o aluno a construir relações incorretas sobre esse conceito (Bittar, 2002).

Assim, a análise de livros didáticos nos permitiu levantar algumas hipóteses como relatada a seguir. Algumas coleções apresentam a fatoração dos trinômios quadrados perfeitos, primeiramente através da identificação de expressões em que aparece o que denominam padrão de distribuição dos produtos notáveis (quadrado do 1º termo, mais duas vezes o 1º termo multiplicado pelo 2º termo mais o quadrado do 2º termo). Em seguida, para fazer a fatoração dessas expressões, os alunos devem extrair a raiz quadrada dos termos que são quadrados perfeitos. Elas trazem diversos exemplos com expressões em que os quadrados perfeitos são os 1º e 3º termos da expressão. Observamos também que, em todos os exercícios propostos aos alunos, os quadrados perfeitos aparecem nessa ordem. Isso nos fez supor que algum aluno, ao ter de fatorar uma expressão do tipo $16x+1+64x^2$, em que os quadrados perfeitos não estão na ordem apresentada nos livros, pudesse fatorar como sendo $(4+8x)^2$.

As coleções escolhidas haviam sido analisadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (Brasil, 2005), e optamos em analisar três coleções com diferentes abordagens da fatoração. A primeira apresenta a fatoração nos volumes da sétima e da oitava série em um capítulo dedicado ao cálculo algébrico, sendo a fatoração um dos tópicos. A segunda a fatoração aparece somente no volume sete em uma seção dentro de um capítulo, também denominado de cálculo algébrico. A terceira dedica um capítulo ao estudo da fatoração no volume sete. Além disso, uma dessas coleções foi escolhida por ser o livro didático adotado na escola em que realizamos a pesquisa.

De posse desses dados, elaboramos e aplicamos um teste diagnóstico com objetivo de identificar algumas dificuldades e teoremas em ação utilizados pelos alunos ao resolver questões envolvendo fatoração. Esse teste teve também por objetivo balizar a construção da seqüência didática.

Em seguida foi elaborada uma seqüência didática baseada nos estudos dos livros didáticos e nos resultados observados no teste diagnóstico. Cada atividade foi analisada prevendo que os alunos poderiam utilizar alguns dos teoremas em ação falsos identificados no teste diagnóstico, além de outros.

As atividades foram aplicadas em seis encontros de uma hora-aula, distribuídos no decorrer de duas semanas seguidas, com 25 alunos de uma turma da oitava série do ensino fundamental (atual 9º ano); em cada encontro foi aplicado um ou dois conjuntos de exercícios (detalhados na Figura 1).

Escolhemos, inicialmente, trabalhar com um ambiente informatizado, o Aplusix, que tem como característica principal oferecer retroações aos alunos das atividades, além de gravar tudo o que é feito ao resolver as questões. Assim, é possível observar, com a ferramenta videocassete, tudo o que o aluno fez, mesmo se ele apagou várias vezes e deixou ao final somente a resposta correta.

A maior diferença entre esses dois ambientes é que, no papel e lápis, os alunos dependem do professor para validar o seu trabalho; já no laboratório, eles têm o auxílio do Aplusix para verificar se o trabalho deles está ou não correto, além de outros tipos de informações que o *software* pode oferecer. Acreditamos que essas retroações oferecidas pelo *software* favorecem uma maior autonomia[5] por parte do aluno, o que já foi confirmado por pesquisas anteriores (Bittar; Chaachoua e Freitas, 2004).

De início, gostaríamos de trabalhar somente com o *software* Aplusix, entretanto, tínhamos um número limitado de computadores no laboratório de informática, e como pretendíamos analisar uma turma de alunos em seu horário normal de aula, decidimos então dividir a turma em duas partes. Uma com 15 alunos que realizaram as atividades em papel e lápis e outra com 10 alunos no *software*; as atividades foram as mesmas e realizadas ao mesmo tempo na sala de aula e no laboratório de informática. Ao final, utilizamos todos os dados obtidos nos dois ambientes nas análises de nossa pesquisa.

Após aplicar a seqüência didática, analisamos as resoluções dos alunos, dos dois ambientes, buscando confrontar os resultados obtidos com as análises que havíamos feito na apresentação das atividades da seqüência didática.

---

5 Os resultados dessa parte do nosso trabalho serão detalhados em outro artigo.

Resumo das atividades propostas e análises das resoluções

Nesta parte, apresentamos um resumo das atividades da seqüência didática, em seguida listamos os teoremas em ação falsos identificados que mais persistiram nas resoluções dos alunos e fazemos as análises desses erros.

A nossa seqüência didática foi composta por dois grupos de atividades e um teste contendo 13 exercícios (em anexo). Segue um quadro com resumo das atividades:

Grupo 1: Três conjuntos de exercícios para fatorar colocando o fator comum em evidência, contendo: • 8 exercícios em que o fator comum era um número; • 8 exercícios em que fator comum era um monômio; • 7 exercícios em que o fator comum era um binômio.
Grupo 2: Três conjuntos de exercícios com a fatoração de expressões algébricas nos produtos notáveis, sendo: • 8 exercícios de fatoração do trinômio quadrado perfeito transformado no quadrado da soma; • 9 exercícios de fatoração do trinômio quadrado perfeito transformado no quadrado da diferença; • 10 exercícios de fatoração da diferença de quadrados transformados no produto da soma pela diferença de dois termos.
Teste com 13 exercícios Com todos os casos de fatoração trabalhados nas atividades dos grupos 1 e 2.

Figura 1 – Quadro de atividades da seqüência didática

Nas análises das atividades do grupo 1, observamos que os alunos tiveram dificuldades em identificar o fator comum que deveria ser colocado em evidência, mesmo nas questões em que esse fator estava aparente[6] nas expressões, como, por exemplo, em $4x-8x^2$. Essa dificuldade aumentava muito quando o fator comum a ser colocado em evidência era um binômio.

Conseguimos identificar alguns teoremas em ação falsos previstos na elaboração da seqüência, tanto no ambiente papel e lápis como no *software* Aplusix; dentre eles, citamos os que mais persistiram no decorrer das atividades do Grupo 1, do fator comum em evidência:

6 Estamos dizendo que um fator comum está aparente quando ele está visível na expressão, por exemplo, na expressão $4x-8x^2$ o fator comum 4x está aparente (visível), enquanto que, no caso de $8x-12x^2$ o fator comum 4x não está explícito, o aluno precisa identificá-lo.

- $ax^2+ax \rightarrow ax(x+a)$: o aluno identifica o fator comum e divide o primeiro termo corretamente, mas erra na divisão do segundo termo. A maior persistência foi observada no trabalho de dois alunos que utilizaram 4 vezes esse teorema em ação falso; tivemos também casos de erros esporádicos, como já dissemos erros cometidos por falta de atenção, em que 13 alunos utilizaram esse caminho incorreto no máximo 2 vezes.
- $x^2+ax \rightarrow x(x+ax)$: o aluno identifica o fator comum e divide o primeiro termo corretamente, mas não tenta dividir o segundo termo e só o repete dentro dos parênteses. Tivemos 1 aluno que acreditamos mobilizar esse teorema em ação falso, pois ele o utilizou 7 vezes em seu trabalho. Erros esporádicos foram observados no trabalho de 9 alunos.

Observamos, nesses dois casos, que os alunos têm dificuldades em dividir o segundo termo da expressão pelo fator comum identificado. Vimos também casos em que essa dificuldade se mostra maior: o aluno não divide nenhum termo da expressão pelo fator comum identificado; simplesmente repete toda a expressão dentro dos parênteses. O teorema em ação falso $x^2+ax \rightarrow x(x^2+ax)$ representa esse caso, e não havia sido previsto na elaboração das atividades. Tivemos 4 alunos que utilizaram esse teorema, sendo que 1 utilizou 8 vezes, o que nos permite afirmar que ele mobiliza esse teorema em ação falso. Entretanto, os outros 3 usaram somente uma vez; nesse caso acreditamos que foi somente falta de atenção.

Na análise do conhecimento em estudo, concluímos que a divisão de monômios é um dos conceitos que faz parte da construção do campo conceitual da fatoração. Entretanto, o ensino usual não explora a divisão algébrica ao discutir os casos de fatoração; em geral, a multiplicação é a única ferramenta utilizada para estudar a fatoração. Para Vergnaud (1990), uma situação demanda a utilização de vários conceitos, sendo que muitos deles são interligados, como, por exemplo, a multiplicação e a divisão algébrica. Consideramos que esses dois conceitos são fundamentais na construção do conceito da fatoração, e, portanto, deveriam ser explorados juntos durante a apresentação desses casos de fatoração, evidenciando a relação que existe entre eles.

De fato, ao fatorar uma expressão, por exemplo, $21x+12x^2$, precisamos primeiro identificar o fator comum, no caso $3x$ e, em seguida, dividir cada termo pelo fator comum identificado $21x : 3x = 7$ e $12x^2 : 3x =$

4x, obtendo-se então a forma fatorada 3x(7+4x). Ao final, deve-se fazer a distribuição do produto para verificar se a fatoração foi feita corretamente. Esse é um tipo de controle que o aluno tem sobre sua ação.

Uma de nossas hipóteses era que dificuldades na utilização da multiplicação podem comprometer o desempenho dos alunos na fatoração. De fato, vimos, nas análises das resoluções dos alunos que eles utilizam o mesmo caminho incorreto ao fatorar e ao fazer a multiplicação dos produtos para verificar se a questão está correta. Vejamos alguns exemplos desse erro na resolução de um aluno:

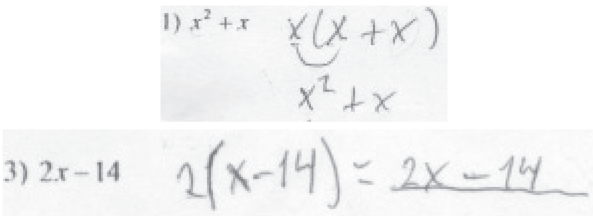

Figura 2 – Resoluções de um aluno

Nesses casos, consideramos que o aluno utilizou o teorema em ação $x^2+ax \rightarrow x(x+ax)$. Havíamos previsto a utilização desse teorema em ação justamente por ser um dos erros de distribuição freqüentemente observado em várias pesquisas (Bittar, 2004; Marquis, 1995; Ribeiro, 2001) e conseguimos observá-lo na resolução de vários alunos, nos dois primeiros conjuntos de exercícios das atividades do grupo 1.

As atividades de fatoração do Grupo 2 eram compostas por: um conjunto de exercícios para fatorar o trinômio quadrado perfeito transformado no quadrado da soma; um conjunto de exercícios para fatorar o trinômio quadrado perfeito transformado no quadrado da diferença e outro conjunto de exercícios para fatorar a diferença de quadrados transformados no produto da soma pela diferença de dois termos.

Nesse grupo, conseguimos identificar também vários teoremas em ação falsos utilizados pelos alunos nos dois ambientes que utilizamos. Dentre eles, destacamos os que mais persistiram nas resoluções dos alunos:

- $x^2-2ax+a^2 \rightarrow (x+a)^2$: o aluno tenta fatorar o trinômio quadrado perfeito como se fosse o quadrado da soma. Acreditamos que talvez possa ser em função da regra apresentada nos livros em que os dois termos que são quadrados perfeitos são sempre positivos. Além disso, ao analisar alguns livros didáticos, vimos que eles, em geral, exploram mais a fatoração do trinômio quadrado perfeito transformado no quadrado da soma do que transformado no quadrado da diferença. Nas análises, observamos que alguns alunos mobilizam esse teorema em ação falso: 2 alunos o utilizaram 4 vezes; um aluno, 5 vezes e um outro o utilizou 6 vezes. Tivemos também erros esporádicos, em que 5 alunos utilizaram no máximo duas vezes esse teorema em ação. Tínhamos 9 exercícios com essa característica.

- x^2-a^2 → (x-a^2)($x+a^2$), nesse caso o aluno parece ter dificuldade em extrair a raiz quadrada dos quadrados perfeitos ou não compreende que deve também extrair a raiz quadrada do número dado (a^2). Nesse último caso, a hipótese que fazemos é que ele pensa em "mexer" somente com as incógnitas. Esse é um ponto que deve ser retomado e analisado com mais detalhes em outra pesquisa. A maior persistência foi observada nos trabalhos de um aluno que utilizou 5 vezes, um outro que utilizou 6 vezes e tivemos 2 alunos que utilizaram 7 vezes; nesses casos, dizemos que eles mobilizam esse teorema em ação falso.
- $x^2+2ax+a^2$ → $(x+2a)^2$: aqui os alunos parecem se lembrar de parte da regra apresentada no ensino usual, em que se devem identificar os quadrados perfeitos e extrair a raiz quadrada deles, entretanto, não conseguem identificar corretamente os termos que são quadrados perfeitos e tentam extrair a raiz quadrada do segundo termo, mesmo não sendo um quadrado perfeito. Nas análises, observamos que alguns alunos mobilizam esse teorema em ação falso, tivemos um que utilizou 5 vezes e 2 outros alunos que utilizaram 6 vezes esse teorema em ação.
- x^2+a^2+2ax → $(x+2a)^2$: os alunos tentam extrair a raiz quadrada do primeiro e do último termo; aqui eles também parecem utilizar parte da regra apresentada nos livros didáticos. Porém, observamos uma diferença em relação ao caso anterior, neste caso, a ordem dos termos do trinômio parece trazer dificuldades a alguns alunos. Observando as resoluções de todas as questões propostas, vimos que quando a expressão aparecia na ordem usual $x^2+2ax+a^2$ ou $a^2+2ax+x^2$, isto é, o primeiro e o último termo eram quadrados perfeitos o aluno identificava

corretamente, entretanto, quando aparecia fora da ordem, ele errava. Deste modo, acreditamos que talvez para esse aluno os quadrados perfeitos sempre são o primeiro e o último termo do trinômio quadrado perfeito. A maior persistência foi observada no trabalho de 2 alunos que utilizaram 3 vezes e um que utilizou 4 vezes, sendo que havia 4 questões com essa característica nos conjuntos de exercícios da seqüência didática.

Nesses dois últimos teoremas em ação falsos, vemos que os alunos se lembram de parte da regra apresentada pelos livros didáticos para esses casos de fatoração, pois eles tentam extrair a raiz quadrada de dois termos da expressão, entretanto, escolhem termos que não são quadrados perfeitos. Vejamos a resolução de um aluno que utilizou um desses casos citados (o terceiro):

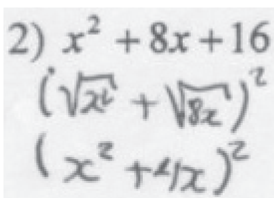

Figura 3 – Resolução de um aluno

Observe que esse aluno parece ter dificuldade em identificar os termos que são quadrados perfeitos, pois tenta extrair a raiz de 8x como se fosse um quadrado perfeito obtendo 4x. Assim, ele não só memoriza e utiliza incorretamente a regra apresentada nos livros didáticos, como também tem dificuldade em aplicar alguns conceitos que, como já dissemos, fazem parte da construção da fatoração dos produtos notáveis, no caso: quadrado perfeito e raiz quadrada.

Acreditamos que o erro em extrair a raiz quadrada mereceria um estudo mais aprofundado, pois, em alguns casos, pode ser em função da escolha incorreta do quadrado perfeito, mas também pode ser que alguns alunos tenham realmente dificuldade em extrair a raiz quadrada.

Ao analisarmos a apresentação desse e dos outros casos de fatoração, vimos que o ensino usual apresenta cada caso em separado e utilizando quase sempre o seu desenvolvimento como meio de se fatorar as expressões algébricas. Acreditamos que, além disso, o ensino deveria incluir atividades com expressões que são trinômios quadrados perfeitos e diferenças de quadrados, em um mesmo exercício, e alguns com os termos fora da ordem usual, para serem fatoradas. Evitar-se-ia, assim, a memorização e aplicação de regras sem sentido, como vimos na utilização dos teoremas em ação falsos citados. Os alunos precisam aprender as regras de fatoração, entretanto, é necessário que reflitam ao ter de utilizá-las. Cabe ao ensino proporcionar, sempre que possível, essas situações de reflexão, de escolhas pertinentes (ou não) ao tratamento da situação proposta.

Considerações finais

Buscamos listar os conhecimentos envolvidos na construção do conceito de fatoração, objeto de nosso estudo, para melhor compreender as dificuldades existentes na sua formação e no seu desenvolvimento por parte dos alunos. Observamos, nas análises dos livros didáticos, que o ensino usual prioriza a multiplicação algébrica na apresentação desse conceito. Entretanto, o campo conceitual da fatoração algébrica é composto por vários outros conceitos, como divisão e multiplicação numérica e algébrica, fatoração numérica, fator comum de uma expressão, redução de termos semelhantes, quadrado perfeito e raiz quadrada. Apesar de alguns desses conceitos serem interligados, como a divisão e a multiplicação, o ensino geralmente não faz essa relação.

O ensino usual apresenta a fatoração a partir da sétima série do ensino fundamental, logo após as seguintes operações algébricas: redução de termos semelhantes, divisão e multiplicação de polinômios. Em seguida, são apresentados os produtos notáveis, os casos de fatoração do fator comum em evidência e a fatoração dos trinômios quadrados perfeitos e da diferença de quadrados. Ou seja, a fatoração é apresentada logo em seguida, a alguns dos conceitos que fazem parte da sua construção e, depois disso, praticamente nunca mais é revista. Entretanto, para Vergnaud (1990), a aprendizagem de um conceito é um processo longo, que pode levar muitos anos, e não é feita de imediato como se espera usualmente, em que se ensina um conceito para logo em seguida utilizá-lo para estudar outro, e, muitas vezes não mais se volta a esse conceito.

Além disso, a fatoração é apresentada, na maioria das vezes, de maneira compartimentada, cada caso de fatoração em separado, as expressões são apresentadas sempre com uma mesma forma, ou seja, sempre estereotipadas. Não são propostas atividades com os vários casos de fatoração, em que o aluno precise refletir e analisar cada expressão para verificar se é um dos casos dos trinômios quadrados perfeitos ou de uma diferença de quadrados, ou ainda o caso do fator comum em evidência.

Na aplicação da seqüência didática, conseguimos observar diversas dificuldades na aprendizagem da fatoração relacionadas, na maioria das vezes, aos conhecimentos envolvidos na formação desse conceito. Algumas dessas dificuldades já tinham sido observadas em outras pesquisas como a fatoração de um número inteiro (Notari, 2002) e a utilização da propriedade distributiva da multiplicação (Ribeiro, 2001).

Gostaríamos ainda de salientar que nosso estudo sobre teoremas em ação considerou somente as resoluções dos alunos nas atividades, fossem elas nas fichas ou nas gravações com o *software*. Apesar de o Aplusix nos possibilitar verificar várias tentativas de resoluções dos alunos, temos apenas uma visão parcial do seu raciocínio. Mas acreditamos que elas foram suficientes para atingir nossos objetivos: identificar teoremas em ação falsos mobilizados pelos alunos e analisar a persistência desses teoremas; ou seja, estudar algumas dificuldades dos alunos com relação à fatoração algébrica.

Acreditamos que o ensino deveria levar em consideração essas dificuldades relativas à aprendizagem da fatoração. A análise dos erros dos alunos pode auxiliar na elaboração de atividades em que essas dificuldades possam ser trabalhadas e superadas, permitindo que o aluno avance na aprendizagem.

Referências

BITTAR, M. A (2002). *Teoria dos Campos Conceituais e o Ensino de Vetores no Ensino Secundário Francês*. In: 25ª Reunião da Anped. *Anais...* Caxambu-MG.

BITTAR, M.; CHAACHOUA, H. e FREITAS, J. L. (2004). M. *Aplusix: um software para o Ensino de Álgebra Elementar*. In: VIII ENEM. *Anais...* Recife-UFPE.

BRASIL (1998). Secretaria de educação fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*. Brasília, MEC/SEF.

______(2001). Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais. *Relatório Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica - 2001 – Matemática*. Brasília.

CURY, H. C. (2003). *Análise de erros em cálculo diferencial e integral: resultados de investigações em cursos de engenharia*. In: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, *Anais*. São José do Rio Preto, SP.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. (2003). *Psicologia da Educação Matemática*. Belo Horizonte, Autêntica (Coleção Tendências em Educação Matemática).

HENRY, M. (2006). *Analyse Theorique de Situations Didactiques*. In: Simpósio Internacional de Pesquisa de Educação Matemática. *Anais...* Recife-PE.

LIMA. E. L. (2001). *Exame de textos: análise de livros de matemática para o ensino médio*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, IMPA.

MARQUIS, J. (1995). "Erros comuns em Álgebra". In: COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. (orgs.). *As idéias da álgebra*. São Paulo, Atual.

NOTARI, A. M. (2002). *Simplificação de frações aritméticas e algébricas: um diagnóstico comparativo dos procedimentos*. Dissertação de mestrado. São Paulo, PUC.

RIBEIRO, A. J. (2001). *Analisando o desempenho de alunos do ensino fundamental em álgebra, com base em dados do Saresp*. Dissertação de Mestrado. São Paulo, PUC.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie de champs conceptuels. *Recherches em Didactique de Mathématiques*, v. 10, n. 2.3, pp. 133-170.

Recebido em jun./2008; aprovado em dez./2008

Atividades da Seqüência Didática

Grupo 1: três conjuntos de exercícios para fatorar colocando o fator comum em evidência em que o fator comum era:		
um número	um monômio	Um binômio
1) $8x+8y$ 2) $2x^2+2$ 3) $2x-14$ 4) $9-21x$ 5) $21x+14$ 6) $15-12x$ 7) $4x-4$ 8) $32+8x$	1) x^2+x 2) $2x+2x^2$ 3) $x-2x^2$ 4) $8x+x^2$ 5) $4x^2-16x$ 6) $12x^2-15x$ 7) $17x-2x^2$ 8) $4x-8x^2$	1) $x(x+2)+3(x+2)$ 2) $(x-4)+x(x-4)$ 3) $x(x+7)-2x(x+7)$ 4) $(x+1)(x-3)+2(x+1)$ 5) $(3x+7)(2x-4)+(5x+8)(3x+7)$ 6) $(3x+5)(x+1)-(x+1)(2x+4)$ 7) $(x-3)(1-4x)+(5x-4)(x-3)$

Grupo 2: três conjuntos de exercícios com a fatoração de expressões algébricas nos produtos notáveis		
fatoração do trinômio quadrado perfeito transformado no quadrado da soma	fatoração do trinômio quadrado perfeito transformado no quadrado da diferença	fatoração da diferença de quadrados transformado no produto da soma pela diferença
1) x^2+2x+1 2) $x^2+8x+16$ 3) $16+16x+4x^2$ 4) x^2+4x+4 5) $9x^2+6x+1$ 6) $24x+9x^2+16$ 7) $x^2+20x+100$ 8) $4+4x^2+8x$	1) x^2-2x+1 2) $4x^2+1-4x$ 3) $y^2-6xy+9x^2$ 4) x^2-4x+4 5) $1+9x^2-6x$ 6) $25x^2-20x+4$ 7) $49-14x+x^2$ 8) $x^2-2xy+y^2$ 9) $1-10x+25x^2$	1) x^2-4 2) $36-x^2$ 3) $9x^2-1$ 4) x^2-y^2 5) $1-x^2$ 6) $1-4x^2$ 7) $9x^2-16$ 8) $100x^2-16$ 9) $4x^2-y^2$ 10) $16x^2-9$

Teste com todos os casos de fatoração trabalhados nas atividades dos grupos 1 e 2
1) x^2+2x 2) $7x+21x^2$ 3) $15x^2+12x$ 4) $4x^2-4$ 5) $4x^2-x$ 6) $x^2-2xy+y^2$ 7) x^2+2x+1 8) $x(x-1)+2(x-1)$ 9) $(8x-5)(6x+3)+(8x-5)$ 10) $4x^2-4x+1$ 11) $10xy+x^2+25y^2$ 12) $3x^2+xy$ 13) $(x-3)(1-4x)-(5x-4)(x-3)$