

Educação Matemática no Ensino Superior e abordagens de Tall sobre o ensino/aprendizagem do Cálculo¹

Mathematics Education at University Level and the Tall's approach to teaching/learning Calculus

MARCIO VIEIRA DE ALMEIDA²

SONIA BARBOSA CAMARGO IGLIORI³

Resumo

O presente artigo se insere no campo da Educação Matemática do Ensino Superior mais especificamente no campo dos estudos relativos ao ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial. Nele são apresentados elementos teóricos e abordagens de ensino sobre conceitos do Cálculo propostos por David Tall e colaboradores, reunidos a partir da elaboração de um panorama de artigos desses pesquisadores. De forma introdutória são apresentados, também, elementos da constituição desse campo da Educação Matemática bem como questões que o propulsionam. Com este artigo, os autores esperam ter contribuído com a consolidação do campo da Educação Matemática no ensino Superior, em geral, e com o GT – nº 04 da SBEM, pois, por um lado ampliam a difusão de um teórico e por outro buscam efetuar sínteses dos resultados de pesquisa.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo; Educação Matemática no Ensino Superior; David Tall.

Abstract

This paper fits the area of Mathematics Education at Higher Education, especially the area of studies concerning the teaching and learning of Differential Calculus. We present, in this study, theoretical elements and teaching approaches concerning the concept of Calculus proposed by David Tall and others, gathered from the development of a panorama including papers written by these researchers. In an introductory way, we present elements about the constitution of this area of Mathematics Education, as well as questions which enhance it. With this paper, the authors hope to have contributed to the consolidation of the area of Mathematics Education at Higher Education in general, and to the GT – No. 04, because not only do they broaden the diffusion of one theorist but also try to summarize the results of researches.

Keywords: Teaching of Calculus, Mathematics Education at Higher Education, David Tall.

Introdução

A aprendizagem e o ensino da disciplina Cálculo Diferencial e Integral, doravante

¹ Apoio: Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

² Pontifícia Universidade Católica – marcioalmeidas@gmail.com

³ Pontifícia Universidade Católica – sigliori@pucsp.br

denominada apenas Cálculo, tem sido foco de inúmeras pesquisas e objeto de estudo de diversos pesquisadores por todo o mundo. Isso porque essa disciplina é particularmente importante, pois trata da constituição de noções fundamentais para a Matemática Avançada, tais como: número real, função, infinito, entre outras (IGLIORI, 2009, p. 13). E também porque tem apresentado altos índices de reprovações em todos os cursos em que é oferecida.

São vários os estudos e várias as perspectivas teóricas que têm sido produzidas nas últimas décadas. Em função disso, pesquisadores têm indicado a pertinência da produção de sínteses dos trabalhos produzidos. Entendem eles que por meio da produção de sínteses seja possível mapear as linhas de pesquisa em desenvolvimento e buscar canais que desenvolverão práticas educacionais coerentes em determinada modalidade de ensino (MAMONA–DOWNS & DOWNS, 2008).

Foi com essa perspectiva que Almeida (2013) elaborou um Panorama de artigos de autoria de David Tall, *Professor*⁴ Emérito em Pensamento Matemático da Universidade de Warwick, que tratam de conceitos do Cálculo. Esse panorama é a fonte dos elementos teóricos destacados e das abordagens de ensino de conteúdos de Cálculo apresentadas neste artigo.

1. Alguns elementos sobre a constituição do campo da Educação Matemática no Ensino Superior

Nesta seção, com o objetivo de situar o leitor sobre quão recente é a constituição do campo de pesquisa da Educação Matemática no Ensino Superior, são apresentados alguns elementos de sua constituição e trazidas questões de interesses dos pesquisadores, pertencente a esse campo.

Esse campo estabeleceu-se recentemente tanto no cenário internacional quanto no nacional. No cenário internacional, há indícios que esse campo de pesquisa tenha surgido, na década de 80, durante o encontro anual do *International Group for the Psychology of the Mathematical Education* (comumente abreviado por PME) com a criação do *Advanced Mathematical Thinking Group*.

Após a criação do referido grupo, houve a necessidade de aprofundamento dos estudos

⁴ Segundo o dicionário eletrônico *Cambridge Dictionaries Online* (<http://dictionary.cambridge.org/>), a palavra inglesa *Professor* significa: “*um professor que possui o maior grau de uma universidade britânica, ou um professor de alto escalão em uma universidade ou faculdade americana*”.

nesse nível de ensino. Um estudo sobre o ensino e aprendizagem da Matemática, no nível universitário, foi organizado pela Comissão Internacional de Instrução em Matemática (ICMI), no final da década de 90 (SILVA, 2011, p. 394). Os resultados desses estudos foram organizados e publicados em 2001, por Derek Holton, no trabalho *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level*. No prefácio dessa obra (HOLTON, 2001), foram descritos quatro motivos que justificavam a realização de tal estudo. O primeiro é o aumento substancial da demanda de estudantes nas Instituições de Ensino Superior (IES) causando preocupações de ordem pedagógicas e educacionais.

O segundo motivo está relacionado ao decréscimo no número de estudantes interessados em cursos superiores de Matemática. Em virtude desse fenômeno, os Departamentos de Matemática tiveram que se voltar às questões relacionadas ao ensino e aprendizagem.

Em decorrência emerge o terceiro motivo: a tendência de aumento do interesse de matemáticos profissionais, que atuam no Ensino Superior, pela Educação Matemática. Por isso, existe a necessidade de desenvolver um canal de comunicação entre esses profissionais. Nesse sentido, emerge o quarto motivo alistado por Holton (2001, p. ix): a criação de um fórum de discussão, disseminação e intercâmbio de ideias educacionais e pedagógicas entre matemáticos e educadores matemáticos. Na promoção do diálogo entre os matemáticos e os educadores matemáticos, Silva (2011, p. 396) destaca o papel do evento *International Conference on the Teaching of Mathematics (at undergraduate level)* (ICTM). Esse evento desperta o interesse tanto de professores de Matemática quanto daqueles envolvidos em processos de ensino e aprendizagem no nível universitário. Já foram realizadas três edições dessa conferência: o ICTM1 (em 1998, na cidade de Samos), o ICTM2 (em 2002, na ilha de Creta) e o ICTM3 (em 2006, na cidade de Istambul). Com a exposição desses fatos, é possível perceber como os pesquisadores, em Educação Matemática, estão atentos às questões relativas aos processos de ensino e aprendizagem de tópicos de Matemática no Ensino Superior.

No cenário nacional, segundo Fusaro Pinto (2002, p. 224), o primeiro encontro de pesquisadores desse campo foi realizado no ano de 2000 durante o I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), organizado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Nesse encontro constituiu-se o Grupo de Trabalho nº 04 – Educação Matemática do Ensino Superior, que é atualmente coordenado por Barbara Lutaif Bianchini (PUC/SP) e tem como subcoordenador José Carlos Pinto Leivas (UNIFRA), que assumiram a coordenação do grupo na reunião do

V SIPEM, realizada em outubro de 2012.

Frota e Nasser (2009) destacam questões que refletem interesses e anseios dos pesquisadores pertencentes a esse campo de pesquisa: “*Qual é o papel da Matemática no Ensino Superior? Como o aluno se relaciona com a Matemática formal? Como abordar tal Matemática? Que estratégias o aluno utiliza para aprender Matemática?*” (FROTA & NASSER, 2009, p. 7).

Nesse contexto é importante caracterizar as pesquisas relacionadas aos processos de ensino e aprendizagem no Ensino Superior:

[...] a investigação de fenômenos relacionados à formação do pensamento avançado; investigar fatores que dificultam a aquisição de conceito da Matemática avançada; expandir a faixa etária das teorias da aprendizagem para a aquisição de conceitos complexos da Matemática; investigar abordagens de ensino que favoreçam apreensão dos conceitos, entre outros temas (IGLIORI, 2009, p. 12).

O modo como a aprendizagem é concebida no Ensino Superior difere daquela do Ensino Básico. Segundo Iglori (2009), ocorre uma mudança na forma como os conteúdos curriculares são tratados e na atitude dos estudantes. Os conteúdos são considerados como “objetos de ensino”, ao invés de “objetos de aprendizagem”, os quais devem ser compartilhados entre professores e estudantes. Com isso, os estudantes do Ensino Superior adquirem maior responsabilidade pelo sucesso (ou insucesso) de sua aprendizagem.

Tentando abordar as peculiaridades do Ensino Superior ressaltadas anteriormente, os primeiros trabalhos conduzidos, na década de 80, pelos integrantes do *Advanced Mathematical Thinking Group* foram fundamentados em teorias consagradas da Psicologia da Educação, em especial dos pesquisadores Jean Piaget e Lev Vigostky, numa tentativa de ampliá-las para questões relacionadas ao ensino e aprendizagem de indivíduos adultos. Contudo, talvez pelo fato dos desenvolvimentos e avanços realizados pelo grupo não terem sido fundamentados num único quadro teórico, a influência de outros referenciais teóricos estão presentes nessa área de pesquisa. Esse cenário foi descrito por Fusaro Pinto:

Atualmente, abordagens diversas têm coexistido, articulando uma ou mais áreas, ou trabalhando primordialmente sob outros pontos de vista que não o da Psicologia, como por exemplo, a Sociologia ou o da Filosofia da Educação. Assim, à luz de um reconhecimento da dimensão social e cultural do processo de aprendizagem relativizam-se análises cognitivas clássicas (PINTO, 2002, p. 236).

Além da incorporação de quadros teóricos idealizados em outras áreas do conhecimento, começaram a emergir elementos teóricos específicos para atender a esse nível de ensino, os quais formaram um corpo teórico próprio. Dentre os pesquisadores que se debruçam sobre os problemas e especificidades da Educação Matemática no Ensino Superior, na pesquisa conduzida (ALMEIDA, 2013) foi destacado o trabalho de David Tall, da Universidade de Warwick, no Reino Unido. Desde 1970, esse pesquisador é um dos principais articuladores da área de pesquisa que se tornou conhecida como Pensamento Matemático Avançado. Questões dessa área giram em torno das dificuldades encontradas na aprendizagem dos conceitos de algumas disciplinas do Ensino Superior, como Cálculo, Análise e Álgebra Linear (REZENDE, 2004, p. 23).

2. Um panorama de artigos de Tall sobre ensino e aprendizagem de conceitos de Cálculo

Nesta seção, são apresentados elementos da pesquisa (ALMEIDA, 2013), conduzida no âmbito do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC–SP, que visou à organização de um Panorama de artigos de autoria de David Tall e seus associados, com vistas a destacar elementos teóricos e indicações de abordagens de ensino.

Trata-se de um estudo de natureza teórica, com caráter bibliográfico, documental, inserido na modalidade panorama, cujos procedimentos teórico-metodológicos pautaram-se na Análise de Conteúdo, segundo Bardin (1979). Dois objetivos foram visados com a realização da pesquisa: a busca de compreensão das dificuldades de aprendizagem de conceitos da Matemática Avançada, mais especificamente dos conceitos do Cálculo; e a elaboração de um Panorama com o intuito de contribuir com a organização da Educação Matemática.

A problemática foi pautada em dificuldades de aprendizagem, detectadas em pesquisas e artigos (CORNU, 1991; ESCARLATE, 2008; IGLIORI & SILVA, 2001), relacionadas aos conceitos de números reais, infinito, limite, derivada e integral. Outra componente da problemática são motivações e justificativas, expostas por pesquisadores (MAMONA–DOWNS & DOWNS, 2008), da necessidade de produzir sínteses dos resultados obtidos no campo da Educação Matemática, com vistas à consolidação dessa

área e da elaboração de práticas de ensino.

Como já anunciado anteriormente, segundo processo de coleta de dados necessário, a pesquisa conduzida (ALMEIDA, 2013) caracterizou-se como um estudo documental. A coleta de informações, nesse tipo de estudo, é feita por meio de fichamentos das leituras, que visam organizar de maneira sistemática os registros relativos a informações obtidas. Os documentos considerados foram artigos de autoria de David Tall, ou de colaboradores. A escolha desse tipo de documento deu-se em virtude dos argumentos de Bursztyn, Drummond e Nascimento (2010), segundo os quais pesquisadores de todo o mundo podem, por meio dos artigos, “*divulgar os resultados de suas pesquisas, os métodos que usam, os conceitos que adotam ou propõem, as teorias que os orientam*” (BURSZTYN et al., 2010, p. 17).

Em vista dos objetivos almejados e da grande quantidade de trabalhos desenvolvidos por David Tall, o universo dos artigos considerados teve de ser restringido. Por esse motivo foi escolhida uma seção que aborda um tópico central para o Cálculo, a saber, o conceito de limite, assumindo o que defende Cornu:

O conceito matemático de limite é uma noção particularmente difícil, característico do tipo de raciocínio necessário na Matemática Avançada. Ele detém uma posição central que permeia toda análise matemática – como um fundamento da teoria das aproximações, da continuidade, e do Cálculo Diferencial e Integral (CORNU, 1991, p. 153).

Foi escolhida a seção *Limits, Infinity & Infinitesimals*, do sítio acadêmico do pesquisador. No prefácio desse sítio, Tall chama a atenção de que os estudos, que resultaram nos artigos, indicaram a existência de distinções entre as teorias matemáticas e as crenças cognitivas dos sujeitos. Uma delas está relacionada ao fato de que nosso cérebro associa uma ideia de movimento à noção de limite. Em consequência, a imagem mental foca apenas em aspectos dinâmicos dessa noção. Outro aspecto destacado foi o fato da noção de limite ser concebida como um processo e, posteriormente, como um conceito. Além disso, Tall descreveu um conflito cognitivo relativo ao fato de muitas vezes, o sujeito conceber o conceito de limite como um processo de aproximar-se a um valor limite, sem nunca alcançá-lo. Essa concepção entra em conflito com a definição formal do conceito. O conceito de limite zero de uma sequência, ou de uma função, revelou ao pesquisador o surgimento no sujeito da ideia de número arbitrariamente pequeno, o que ele nomeou por infinitesimal cognitivo. Por fim, nos artigos mais

recentes, o objetivo do pesquisador foi propor um modelo com vistas a explicar como ocorre, por parte do sujeito, o desenvolvimento formal dos conceitos da Matemática.

Em Almeida (2013), o estudo dos artigos considerados desenvolveu-se do seguinte modo: inicialmente, foi conduzido um estudo minucioso do *corpus* documental, sendo esse “o conjunto de documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos” (BARDIN, 1979, p. 96), e foram eleitas as unidades de análise. Por meio desse estudo, foram criadas dois tipos de categorias que nortearam a construção de um Panorama. O primeiro conjunto teve por objetivo evidenciar as proposições teóricas desenvolvidas, pelo próprio pesquisador ou com a sua colaboração, que surgiram no *corpus* documental. Como resultado, foram destacados seis elementos teóricos: as concepções infinitesimais; os conflitos; o conceito imagem e o conceito definição; a noção de proceito; a fundamentação para a utilização do computador na aprendizagem e formas de modelar o desenvolvimento da Matemática formal por parte do sujeito.

No segundo conjunto de categorias foram destacados os tópicos do Cálculo, que emergiram nos artigos do *corpus* documental. Tais tópicos totalizaram as seguintes categorias: limites, tanto de sequências quanto de séries, continuidade, derivada, integral e equações diferenciais.

Nas duas próximas seções será detalhado, o que foi obtido em cada uma das categorias citadas nos parágrafos anteriores.

3. Elementos teóricos elaborados por Tall

Nesta seção apresentamos os elementos teóricos desenvolvidos por Tall, organizados em categorias (ALMEIDA, 2013).

A primeira categoria refere-se à utilização de Tall das ideias da Análise Não-Standard para o desenvolvimento de alguns tópicos do Cálculo. As concepções infinitesimais surgiram, Tall e Schwarzenberger (1978), no momento em que os pesquisadores analisaram as respostas de estudantes à questão “0,999... é menor ou igual a 1?”.

A Análise Não-Standard é ramo da Matemática que foi desenvolvido, na década de 60, por Abraham Robinson e configurou-se como uma tentativa de reinterpretar o Cálculo, segundo o ponto de vista adotado por Leibniz. Além disso, esse ramo “*procura recuperar a noção de infinitésimo que, com o auxílio dos métodos da lógica*

matemática, em particular, da teoria dos módulos, foi estabelecida de forma rigorosa” (FELIZARDO, 2005, p. 6).

Foram detectados em (Tall, 1981) três pontos que corroboram para a utilização desse ramo da Matemática na introdução de tópicos do Cálculo:

- Pedagógico: uma abordagem inicial para infinitesimais dá a eles (os estudantes) uma existência cognitiva e em termos algébricos e geométricos.
- Lógico: Sem a necessidade da lógica de primeira ordem⁵.
- Histórico: O sistema possui certas propriedades em comum com o Cálculo de Leibniz

Na segunda categoria, foi destacada a exploração, pelo pesquisador, de situações conflituosas ao sujeito, com vistas a propiciar ideias adequadas ao desenvolvimento de um conceito da Matemática. Foi detectada a noção de conflito subconsciente, que é causado em decorrência da interpretação errônea por parte do sujeito, de um conceito matemático, causada pela forma como ele foi apresentado. Esse tipo de conflito “*conduz a grandes dificuldades, escondendo, ou até bloqueando totalmente a compreensão*” (TALL & SCHWARZENBERGER, 1978, p. 2, tradução dos autores).

A terceira categoria é aquela que insere os conceitos teóricos conceito imagem e conceito definição⁶, os quais foram elaborados pelo pesquisador Sholmo Vinner e contaram com a participação de Tall, em determinado momento de sua formulação. Esses termos são definidos a seguir.

O conceito imagem é descrito como:

[...] a estrutura cognitiva total que é associada com o conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Ele é construído ao longo dos anos por meio das experiências de todos os tipos, mudando quando o sujeito encontra novos estímulos e amadurece (TALL & VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa).

E o conceito definição como:

[...] a forma que as palavras foram utilizadas para especificar aquele conceito. Ele pode ser aprendido por um sujeito de uma forma rotineira ou aprendido mais significativamente e relacionado, em

⁵ Russell (1963) estabeleceu com sua Teoria dos tipos graus de uma hierarquia lógica, ou ainda dividiu os objetos do discurso matemático em níveis ou ordens. A lógica de nível zero é a lógica proposicional, que pressupõe a existência fatos que são válidos ou não válidos no mundo, e a Lógica de Primeira Ordem (ou Cálculo de Predicados) pressupõe que o mundo consiste em objetos com certas relações entre eles que são válidas ou não válidas (LIMA, 2012).

⁶ Utilizaremos a tradução conceito imagem e conceito definição. Outras traduções como imagem conceitual e definição conceitual, ou ainda, imagem do conceito e definição do conceito são utilizadas.

maior ou menor grau, com o conceito. Também pode ser uma reconstrução pessoal do estudante de uma definição (TALL & VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa).

Na quarta categoria aparece a noção de proceito⁷, concebida por Tall e Gray, no ano de 1991. Essa noção começou a ser formulada a partir de observações relativas ao caráter dual que determinados símbolos da Matemática possuem no contexto da Aritmética. Apesar disso, essa noção surgiu no contexto do Cálculo, por exemplo, em Tall e Li (1992), os pesquisadores perceberam que os símbolos utilizados para denotar os termos de uma sequência se comportam ora como um processo, ora como um objeto, portanto eles são passíveis de uma análise em termos da noção de proceito.

Na quinta categoria estão elementos teóricos que fundamentam a utilização dos computadores na aprendizagem da Matemática, uma dessas é a noção de organizadores genéricos⁸. No artigo (TALL, 2000), foi detectada uma característica, que determinados ambientes computacionais possuem, e que pode ser utilizada para o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos. Segundo o pesquisador, os computadores.

[...] podem executar quaisquer algoritmos de forma rápida e eficiente, além de exibir o resultado final com uma gama de diferentes representações. Por exemplo, os resultados podem ser representados *visualmente* e manipulados *fisicamente*. Utilizando um *mouse* é possível ao estudante construir relações corporificadas que fazem parte de uma estrutura conceitual mais rica e ampla (TALL, 2000, p. 10, tradução nossa, grifo do autor).

Os *softwares*, que provêm um retorno imediato às alterações realizadas pelo usuário, são denominados pelo pesquisador como organizadores genéricos, cuja definição é a seguinte:

[...] um ambiente (ou micromundo⁹) que permite ao aprendiz manipular *exemplos* e (se possível) *contraexemplos* de um conceito matemático específico ou de um sistema de conceitos relacionados (TALL, 2000, p. 10, tradução nossa, grifo do autor).

Para a construção de um organizador genérico é requerida a seleção de uma ideia importante e essencial, que será o foco da atenção do estudante. Essa não é necessariamente fundamental para a teoria matemática, porém, ela auxilia o sujeito a

⁷ Tradução do termo original *procepts*.

⁸ Tradução do termo original *generic organisers*.

⁹ Esse termo é utilizado pelo pesquisador no sentido que Papert (1980, p. 117 apud TALL, 1986) como “*um mundo autossuficientes no qual certas questões são relevantes e outras não*”.

desenvolver intuições apropriadas ao desenvolvimento teórico do tópico matemático relacionado.

Durante desenvolvimento da pesquisa, foi detectado que David Tall foi um dos precursores a vislumbrar a possibilidade de utilização das novas tecnologias no ensino da Matemática. Essa temática foi abordada na sua tese de doutoramento em Educação, intitulada *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics* (TALL, 1986).

Na última categoria foram considerados construtos teóricos que objetivaram analisar a forma como o sujeito desenvolve as teorias matemáticas formais. Neste contexto, teorias matemáticas formais representam a maneira pela qual a Matemática do Ensino Superior é desenvolvida, ou seja, aquelas que introduzem os objetos a partir de definições formais e as propriedades deles são derivadas a partir de deduções lógicas. Sendo assim, foram destacados dois construtos teóricos utilizados na análise de como os sujeitos lidam com teoremas.

O primeiro desses constructos foi destacado no artigo Tall e Bills (1998), que relatou um estudo longitudinal do desenvolvimento dos estudantes quando lhes foram propostas, pela primeira vez, atividades com a Matemática apresentada de maneira formal. Nesse estudo foi analisado, como os sujeitos desenvolviam o uso das definições na construção de conceito e provas de teorema. Para essa análise, os pesquisadores propuseram quando uma definição, ou teorema, era formalmente operável:

Uma definição (matemática) ou teorema é dito formalmente operável para um determinado sujeito se ele é capaz de utilizá-lo na criação ou reproduzi-lo (significativamente) em um argumento formal (TALL & BILLS, 1998, p. 1, grifo dos autores).

A intenção dos pesquisadores, com a definição acima, era desenvolver um construto que permitisse analisar os casos em que a utilização das definições e teoremas fosse bem sucedida no desenvolvimento da teoria na Matemática Formal.

O segundo construto teórico foi desenvolvido com o objetivo de verificar como os estudantes lidam com as definições e deduções na Matemática Avançada, Esses foram discutidos no trabalho de Fusaro Pinto (1998 apud TALL et al., 2001). Nesse trabalho a pesquisadora encontrou duas estratégias que os sujeitos utilizavam para lidar com as definições e deduções em um curso de Análise:

Atribuir significado a definição a partir uma gama de imagens

pessoais, preceitos, processos, exemplos, contraexemplos, etc...

Extraír significado de uma definição pela dedução formal na prova de teoremas (TALL et al., 2001, p. 19, tradução nossa).

4. Propostas de abordagens de ensino para conceitos do Cálculo indicadas por Tall

Nesta seção são apresentadas abordagens de ensino, propostas por Tall, para os conceitos de limites, sequências, séries, continuidade, derivada, integral e equações diferenciais.

Para o conceito de limites de sequências e séries o que Tall e Schwarzenberger (1978) propuseram foi integrar a noção de limite com o conceito de números reais definidos a partir das sequências de aproximações decimais de um número real k (TALL & SCHWARZENBERGER, 1978, p. 5). Essa integração foi norteadada no fato de haver uma precisão limitada na representação, em uma folha de papel, de um segmento com medida igual a um número irracional.

Outra indicação de abordagem surgiu no estudo de Tall e Li (1992), que relatou um experimento conduzido, por meio de um curso, com duração de 20 semanas, no qual foi utilizado um ambiente de programação para a introdução do conceito de sequências e séries. Nesse curso, os estudantes foram convidados a elaborar uma programação para os termos gerais de sequências e séries, e, investigar o comportamento dessas.

Após essa atividade, os sujeitos foram conduzidos à definição formal do conceito de limite. Posteriormente, Tall (2001) refletiu sobre três falhas existentes na abordagem do conceito de limites proposta nesse estudo. A primeira falha detectada foi que em determinadas sequências, o computador demorava a realizar os cálculos, e isso reforçou a ideia que o limite é um processo que não termina. Com relação ao tópico da convergência de sequências, o objetivo do curso era promover intuições, por meio de uma precisão fixada, com o intuito de desenvolvê-la para a definição formal do conceito. Apesar desse tipo de abordagem, comparando os resultados de um pré-teste com os de um pró-teste, a maioria dos sujeitos da pesquisa respondeu incorretamente às questões formuladas. Um último tópico foi dedicado à discussão de que um decimal infinito pode ser visto como um limite de sequência de aproximações decimais. Em entrevistas realizadas com os estudantes foi possível constatar que eles continuaram a

conceber a dízima periódica 0,999... como uma sequência de números mais próxima de um e não como um valor fixo.

Com relação ao conceito de continuidade, o pesquisador utilizou elementos da Análise Não-Standard com o objetivo de fornecer uma base formal adequada às intuições manifestadas pelos alunos. No artigo (TALL, 1981, p. 13), o pesquisador exibiu a definição do conceito de continuidade no contexto da Análise Não-Standard.

Além disso, Tall propôs, para o conceito de continuidade de uma função real, uma abordagem baseada na

[...] ideia intuitiva (que prova ser falha) que uma função contínua é “aquela cujo gráfico pode ser desenhado continuamente com um lápis, sem tirá-lo do papel” pode ser utilizada para motivar a definição formal. Dada um gráfico desenhado “continuamente” nesse sentido intuitivo, simplesmente esticando-a na horizontal, mantendo a escala vertical constante, expande a imagem do gráfico em uma janela separada (TALL, 1993, p. 11).

O resultado do processo descrito anteriormente foi ilustrado na Figura 1:

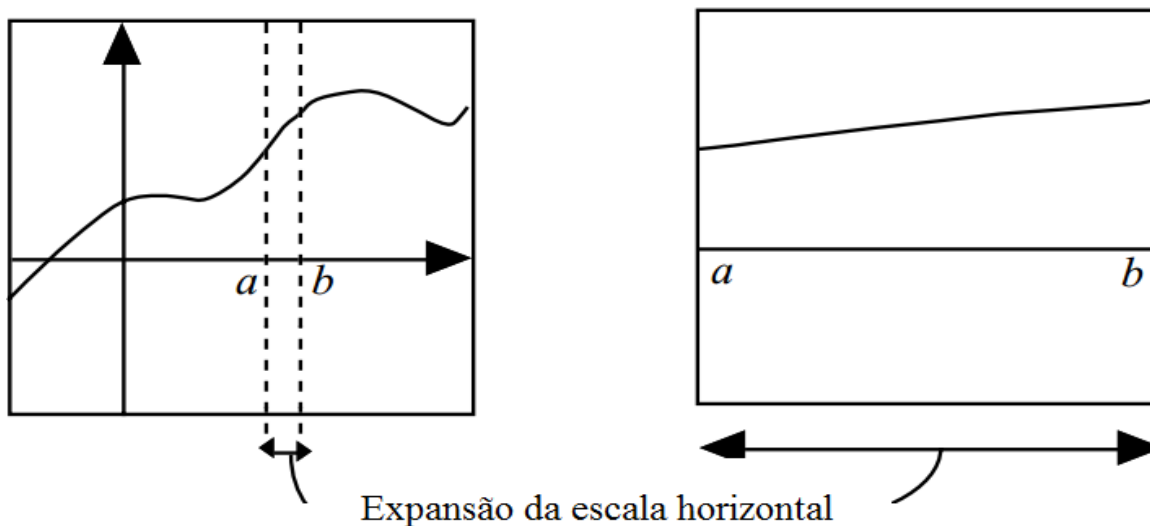


FIGURA 1: Esticando um gráfico horizontalmente
FONTE: Tall (1993, p. 11)

Com essa abordagem, na qual uma porção do gráfico de uma função é “horizontalmente esticada”, é possível introduzir a definição formal de continuidade de uma função no ponto x_0 (TALL, 1993, p. 12). É o que se pretende com o gráfico da Figura 2

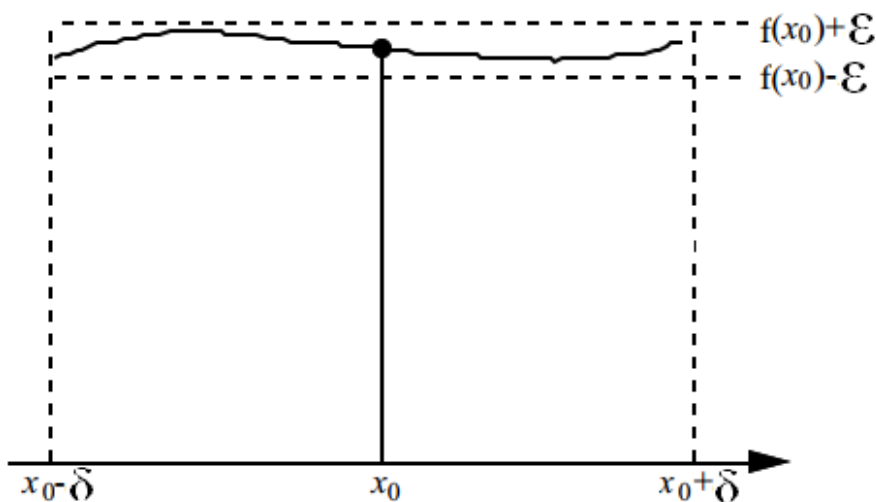


FIGURA 2: A definição de continuidade de uma função num ponto por meio do alongamento horizontal.
FONTE: Tall (1993, p. 12, com adaptações)

Com relação ao conceito de derivada, no artigo (TALL, 1981, p. 14), o pesquisador exibiu uma indicação de abordagem de ensino, na qual o conceito de derivada é definido no contexto da Análise Não-Standard. Utilizando a função, nomeada pelo pesquisador, microscópio- δ centrado em $(x, f(x))$, ele afirmou: “*Surpreendentemente, vemos o gráfico como uma linha reta*” (TALL, 1981, p. 17). Contudo, essa construção foi feita de maneira teórica, utilizando resultado da Análise Não-Standard e representações com lápis e papel. Pela evolução dos computadores, Tall retomou as ideias aqui descritas. Com auxílio do computador, ele construiu imagens que desenvolvessem motivações adequadas à noção de funções diferenciáveis. Ele indicou que essa noção pode ser “*motivada simplesmente ampliando seu gráfico, mantendo a mesma escala relativa nos eixos*” (TALL, 1993, p. 11). Com isso, quando a representação gráfica de uma função é ampliada, a aparência dessa porção do gráfico é idêntica a um segmento de reta. Logo, a inclinação do segmento de reta, exibido na tela, terá a mesma inclinação da reta tangente ao gráfico da função.

Na Figura 3 exibe-se esse *software* sendo utilizado para a função $g(x) = \sin x$. Na segunda janela do *software* é possível perceber que a representação gráfica da função g fica parecida com uma linha reta, assim como a conclusão teórica obtida com auxílio da função microscópio- δ .

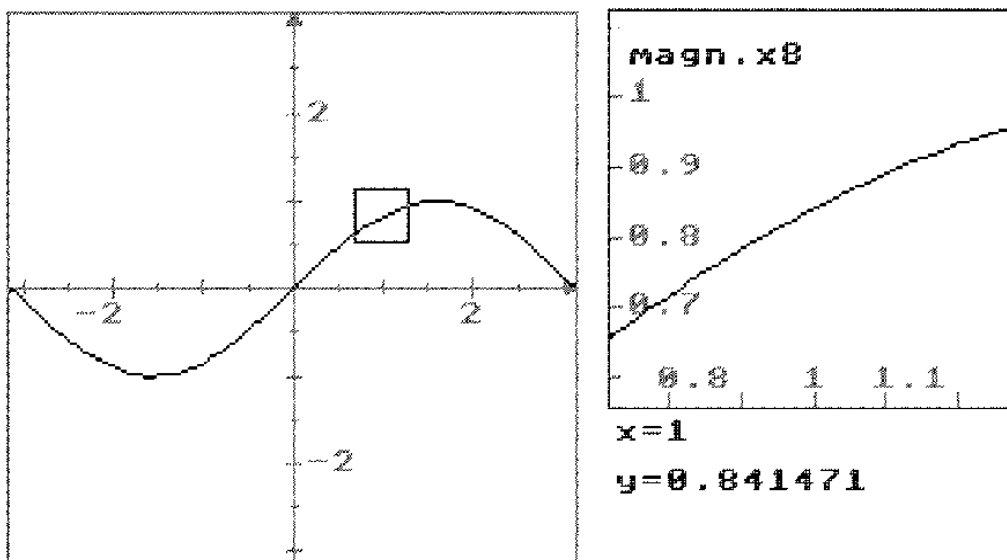


FIGURA 3: Representação do organizador genérico Magnify
FONTE: Tall (2000, p. 12)

A noção de aproximação linear local foi nomeada pelo pesquisador como “*retidão local*” (TALL, 2000, p. 11). Ela seria uma raiz cognitiva apropriada para o conceito de derivada.

Com relação ao conceito integral definida, o pesquisador recorreu à função área abaixo do gráfico de uma função em dois artigos (TALL, 1993, 2000). Em um primeiro momento, Tall defendeu que uma abordagem na qual a integração é reconhecida como o inverso da diferenciação faz com que o papel da continuidade da função integrável fique menos evidente, porém, “*quando ao conceito de integração é dado um significado independente por meio da soma, a função da continuidade torna-se mais evidente*” (TALL, 1993, p. 13).

Segundo Tall “*as noções corporificadas de ‘área’ e ‘área até o momento’¹⁰ podem apoiar a Integração de Riemann e até a de Lesbegue*” (TALL, 2000, p. 16). Essas noções podem ser ampliadas com um computador e *softwares* desenvolvidos apropriadamente, pois eles podem ser utilizados para calcular a área numérica e relacionar a noção de continuidade à noção de integração.

Com relação ao conceito de equações diferenciais, Tall sugeriu a introdução desse conceito, por meio da seguinte situação problema:

Considere o problema inverso da diferenciação (Não, esse não é a integração!). O problema é o seguinte – se você conhece a inclinação de uma função em algum ponto, como podemos construir o gráfico

¹⁰ Tradução da expressão ‘*area-so-far*’

que tem essa inclinação?¹¹ (TALL, 2000, p. 14, tradução nossa).

O objetivo do pesquisador com essa questão era propiciar um significado corporificado ao estudante, apresentando outras abordagens que não aquela utilizada, em geral, a abordagem simbólica. Além disso, Blokland, Giessen e Tall (2000 como citado em TALL et al., 2001, p. 211) desenvolveram um *software* que constrói a solução gráfica para uma equação diferencial de 1ª ordem, na qual o *mouse* é utilizado para mover um pequeno segmento, cuja inclinação é definida pela equação diferencial, e, com um clique sobre o plano cartesiano, esse segmento é fixado ao plano.

Considerações finais

Este artigo teve por alvo reunir e destacar a potencialidade da produção de David Tall e seus colaboradores, no que tange à aprendizagem e ao ensino de Cálculo. E também pretendeu atender ao chamado de pesquisadores da área de Educação Matemática sobre a necessidade de se produzir sínteses de resultados de pesquisas (MAMONA-DOWNS & DOWNS, 2008), para contribuir com a consolidação dessa área.

Assim categorizou, em um panorama, conceitos teóricos relativos à aprendizagem do Cálculo tais como: utilização das ideias da Análise Não-Standard; exploração de situações conflituosas ao sujeito, com vistas a propiciar ideias adequadas ao desenvolvimento de um conceito; introdução dos elementos teóricos conceito imagem, conceito definição e conceito; utilização dos computadores na aprendizagem da Matemática. Além de considerar construtos teóricos que objetivaram analisar a forma como o sujeito desenvolve as teorias matemáticas formais.

E também reuniu propostas de abordagens de ensino para os conceitos de Cálculo tais como; limite de sequências e séries (integrado à noção de número real definido por sequências); continuidade de função (a partir de noções da Análise Não Standard); e de derivada (a partir de noções da Análise Não Standard e com o uso de computadores); integral (a partir de área de regiões); equações diferenciais (uso de computadores).

Ao final os autores deste artigo reforçam que esta pesquisa indicou que a produção teórica de Tall e colaboradores trazem elementos essenciais para o estudo dos fenômenos da aprendizagem e do ensino do Cálculo, e que a síntese elaborada é um

¹¹ As an example, consider the inverse problem to that of differentiation. (No, this is not integration!) The problem is this—if I know the gradient of a function at any point, how can I build up the graph that has

fator importante para a organização desse ramo de estudo. Nesse sentido acreditam que tenham contribuído com o desenvolvimento do campo da Educação Matemática no Ensino Superior, em geral, e com o G-4 da SBEM em particular.

Referências

- ALMEIDA, M. A. (2013) *Um Panorama de Artigos sobre a Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na Perspectiva de David Tall*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- BARDIN, L. (1979) *Análise de Conteúdo*. Tradução: Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. Lisboa: Edições 70.
- BURSZTYN, M.; DRUMMOND, J. A.; NASCIMENTO, E. P. (2010) *Como escrever (e publicar) um trabalho científico: dicas para pesquisadores e jovens cientistas*. Rio de Janeiro: Garamond, 17 – 41.
- CORNU, B. (1991) Limits. In TALL, D. (ed) *Advanced Mathematical Thinking*. Boston / Londres: Kluwer Academic Publishers, 153–166.
- ESCARLATE, A. C. (2008) *Uma Investigação sobre a Aprendizagem de Integral*. 2008. 152 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.
- FELIZARDO, S. B. (2005) *Aplicação da Análise Não-Standard à Teoria da Medida: uma representação hiperfinita de medida de Lebesgue*. 105f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
- FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (2009) *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*. Recife: SBEM.
- HOLTON, D. (2001) *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: an ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- IGLIORI, S. B. C. (2009) Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.) *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*. Recife: SBEM, 11 – 26.
- IGLIORI, S.; SILVA, B. (2001) Concepções dos alunos sobre Números Reais. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (Org.) *Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo*. Belo Horizonte: Fumarc, 39 – 67.
- LIMA, E. S. (2012) *INF 1771 – Inteligência Artificial: Aula 08 – Lógica de Primeira Ordem*. PUC–RJ. Disponível em: <http://edirlei.3dgb.com.br/aulas/ia_2012_2/IA_Aula_08_Logica_de_Primeira_Ordem_2012.pdf>

that gradient?

- MAMONA-DOWNS, J.; DOWNS, M. L. N. (2008) Advanced Mathematical thinking and the role of mathematical structure. In L. D. English (Ed.). *Handbook of International Research in Mathematics Education*. New York: Routledge, 154 – 174.
- PINTO, M. M. F. (2002) Educação matemática no ensino superior. In *Educação em Revista*, Belo Horizonte, nº 36, 223 – 238.
- REZENDE, W. M. (2004) O Ensino de Cálculo: um problema do ensino superior de matemática? Mesa redonda “Educação Matemática no ensino Superior”, *Anais eletrônicos do VIII ENEM*, Pernambuco: UFPE, 2004.
- RUSSELL, B. (1963) *Introdução à Filosofia da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar Editores.
- SILVA, B. A. (2011) Diferentes dimensões do ensino e aprendizagem do Cálculo. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 13, nº 3, 393 – 413.
- TALL, D. O. (1981) Infinitesimals constructed algebraically and interpreted geometrically. *Mathematical Education for Teaching*, Vol. 4, nº 1, 34 – 53.
- TALL, D. O. (1986) *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics*. 1986. 505 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – *University of Warwick*, Inglaterra.
- TALL, D. O. (1993) Real Mathematics, Rational Computers and Complex People. In: ANNUAL INTERNATIONAL CONFERENCE ON TECHNOLOGY IN COLLEGE MATHEMATICS TEACHING, 5, 1993, *Proceedings...*, Addison-Wesley, 243 – 258.
- TALL, D. O. (2000) Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In: ASIAN TECHNOLOGY CONFERENCE IN MATHEMATICS, 5, 2000, Chiang Mai. *Proceedings...* Blackwood: ATCM Inc.
- TALL, D. O. (2001) Cognitive development in advanced mathematics using technology. *Mathematics Education Research Journal*, 12, nº 3, 210-230.
- TALL, D. O.; BILLS, L. Operable Definitions in Advanced Mathematics: The Case of the Least Upper Bound. In. ANNUAL CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 22., 1998, Stellenbosch. *Proceedings...* Stellenbosch, 104 – 111, 1998.
- TALL, D. O., GRAY, E., ALI, M. B., CROWLEY, L., DEMAROIS, P., MCGOWEN, M., PITTA, D. PINTO, M. M. F., YUSOF, Y. Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology*, v.1, 81 – 104. 2001.
- TALL, D. O.; LI, L. (1992) Constructing Different Concept Images of Sequence & Limits by Programming, In. *Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 17, 1992, Tsukuba. *Proceeding...* Tsukuba, 1992, v. 2, 41 – 48.
- TALL, D. O.; SCHWARZENBERGER, R. L. E. (1978) Conflicts in the learning of real numbers and limits. *Mathematics Teaching*, v. 82, 44 – 49.
- TALL, D. O.; VINNER, S. (1981) Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Special Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, nº 12, 151 – 169.