

Como estudantes e professores de anos iniciais pensam sobre problemas combinatórios¹

How Primary School students and teachers think about combinatorial problems

RUTE ELIZABETE DE SOUZA ROSA BORBA²

CRISTIANE AZEVÊDO DOS SANTOS PESSOA³

CRISTIANE DE ARIMATÉA ROCHA⁴

RESUMO

O objetivo do estudo foi investigar como crianças de anos iniciais do Ensino Fundamental resolvem problemas combinatórios e analisar o que professores deste nível de ensino pensam sobre a Combinatória e as compreensões dos estudantes. Quanto à resolução das crianças, 99 estudantes (de 6 a 12 anos) responderam um teste com oito questões (duas de cada tipo de problema combinatório: arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano). As respostas das crianças variavam de a) total incompreensão das relações envolvidas; à b) compreensão das relações sem enumeração de todas as possibilidades; e à c) enumeração de todas as possibilidades por representação direta ou procedimentos indiretos. Já as professoras reconheceram a natureza multiplicativa dos problemas, mas apresentaram dificuldades na compreensão das estruturas de alguns desses problemas. Conclui-se que estudantes desse nível de ensino diversas vezes são bem sucedidos na resolução desses problemas, mas muitas vezes o conhecimento de seus professores é limitado e precisa ser bem mais amplo, de modo a poder auxiliar as crianças no desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios.

Palavras-chave: Raciocínio Combinatório; Anos iniciais; conhecimento de estudantes e professores.

ABSTRACT

The aim of the study was to investigate how Primary School children solve combinatorial problems and analyze what teachers think about Combinatorics and students' understandings. Considering children's solutions, 99 students (6-12 years old) answered an eight question test (with two from each type of combinatorial problem: arrangement, combination, permutation and Cartesian product). Children's responses ranged from a) complete misunderstanding of the relations involved, b) understanding of relation without enumeration of all possibilities and c) enumeration of all possibilities by direct representation or indirect procedures. The teachers recognized the multiplicative nature of the problems, but had difficulties in understanding the

¹Este estudo foi parcialmente financiado pela Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (Facepe – APQ 1095-7.08/08) e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (MCT/CNPq – 476665/2009-4).

² Universidade Federal de Pernambuco – resrborba@gmail.com

³ Universidade Federal de Pernambuco – cristianepessoa74@gmail.com

⁴ Universidade Federal de Pernambuco – tiane_rocha@yahoo.com.br

structures of some of these problems. We conclude that students at this level of education are repeatedly successful in solving these problems, but often the knowledge of their teachers is limited and needs to be much wider, so as to assist the children in developing their combinatorial reasoning.

Keywords: *Combinatorial Reasoning; early years, knowledge of students and teachers.*

Introdução

No presente estudo apresentamos e articulamos os resultados de investigações com estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental (PESSOA; BORBA, 2009, 2010) e com professores deste nível de ensino (ROCHA; BORBA, 2010). Objetiva-se investigar como crianças em início de escolarização resolvem problemas combinatórios de diferentes naturezas e analisar como professores de anos iniciais pensam sobre as soluções de estudantes e o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Nós defendemos que o desenvolvimento do raciocínio combinatório é muito importante porque esta forma de pensar auxilia a aprendizagem, de um modo geral, e o entendimento matemático, em particular. Pensamos assim porque o raciocínio combinatório envolve a análise de situações e, também, nele são usados procedimentos sistemáticos de enumeração e/ou de determinação do número total de distintas possibilidades. É um modo especial de pensamento lógico-dedutivo e, em uso pleno, denota um mais alto nível de desenvolvimento cognitivo.

Defendemos também que o raciocínio combinatório leva um longo tempo para se desenvolver e que no início da escolarização situações combinatórias simples podem ser propostas, de modo a prover estudantes com noções iniciais sobre como combinar elementos e considerar combinações válidas que atendem a determinadas condições. Desse modo, professores de anos iniciais do Ensino Fundamental precisam entender a natureza de problemas combinatórios e como ocorre a aprendizagem da Combinatória, de modo a auxiliarem estudantes no desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios.

Nossas defesas estão de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – (BRASIL, 1997) os quais recomendam que, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, estudantes estejam em contato com situações combinatórias que envolvem *arranjos, combinações e permutações* e, especialmente, o uso do *princípio*

*fundamental de contagem*⁵. Espera-se que neste nível de escolarização as crianças sejam capazes de identificar as muitas maneiras possíveis de combinar elementos de um conjunto e de contá-las usando procedimentos pessoais. Entretanto, como exemplos de situações combinatórias, nos PCN, apenas *produtos cartesianos* são apresentados, não provendo, dessa forma, informações aos professores de anos iniciais sobre os diferentes tipos de problemas combinatórios e das relações distintas neles envolvidas.

Apresentamos, a seguir, estudos anteriores realizados com estudantes em início de escolarização, tanto crianças que atendiam o Ensino Regular, quanto jovens e adultos que frequentavam a Educação de Jovens e Adultos (EJA). Em uma seção seguinte discutiremos os diferentes tipos de problemas que caracterizam as distintas situações combinatórias que defendemos sejam trabalhadas desde os primeiros anos de escolarização: *arranjos*, *combinações*, *permutações* e *produtos cartesianos*. Segue-se a descrição das nossas investigações com crianças e professores e nossas considerações a respeito dos resultados obtidos.

1. Estudos prévios sobre o desenvolvimento e a aprendizagem de problemas combinatórios no início da escolarização

Inhelder e Piaget (1976) observaram que crianças gradualmente entendem problemas de *permutação*. Segundo estes pesquisadores, as crianças progredem desde estágios nos quais não entendem que os mesmos elementos podem ser ordenados diferentemente até conseguirem, em idade próxima aos 12 anos, o desenvolvimento de procedimentos sistemáticos de enumeração de todas as *permutações* de um conjunto de elementos. Ressalta-se que este estudo referiu-se ao desenvolvimento da compreensão de apenas um tipo de problema combinatório, ou seja, situações de *permutação*, mas apresenta indícios de compreensão desde cedo de algumas relações presentes na Combinatória.

Moro e Soares (2006) apresentaram resultados similares com outro tipo de problema combinatório – os *produtos cartesianos*. Estas autoras encontraram respostas dadas pelas crianças desde as que não eram relacionadas aos problemas; passando por respostas que eram relacionadas, mas não plenamente combinatórias; até chegarem a

⁵ Segundo Smole e Diniz (2003), o *princípio fundamental da contagem* pode ser enunciado da seguinte forma: “... se temos um acontecimento formado por diversas etapas... no qual conhecemos o número de possibilidades de cada uma dessas etapas se realizar, multiplicando todos esses números, teremos a quantidade de possibilidades de o acontecimento completo se realizar” (p.58).

soluções combinatórias. As pesquisadoras ressaltaram que o uso de procedimentos sistemáticos auxiliava o desenvolvimento de soluções combinatórias. Embora também envolvesse apenas um tipo de problema – *produto cartesiano*, este estudo igualmente evidencia o surgimento do raciocínio combinatório em crianças bem antes do ensino formal de Análise Combinatória.

Fischbein (1975) defendeu que o raciocínio combinatório não se desenvolve espontaneamente e argumentou que a escolarização tem um forte efeito neste tipo de pensamento. Sua defesa era embasada em estudo empírico (FISCHBEIN, PAMPU e MINZAT, 1970) no qual estudantes de 10 anos de idade aprenderam a resolver problemas combinatórios do tipo *permutação* por meio do uso de árvores de possibilidades. Os resultados obtidos por este autor dão suporte ao aprendizado da Combinatória em anos iniciais, por intermédio de recursos acessíveis aos estudantes deste nível de ensino.

Barreto e Borba (2011) estudaram o efeito do aprendizado, por adultos em início de escolarização, do uso sistemático de listagens e/ou da construção de árvores de possibilidades em problemas de *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*. Participaram do estudo 24 estudantes da Educação de Jovens e Adultos que frequentavam um módulo correspondente ao 4º e 5º anos do Ensino Fundamental regular. Antes da instrução, os estudantes apresentaram muito poucas evidências de compreensão de situações combinatórias. Após o ensino – no qual se chamava a atenção sobre a escolha de elementos, sua ordenação e o esgotamento de todas as possibilidades – os estudantes passaram a evidenciar compreensão das distintas situações combinatórias trabalhadas.

Pessoa e Santos (2012) realizaram intervenções com 20 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental utilizando como base para o ensino a explicitação dos invariantes da Combinatória, a listagem de possibilidades como estratégia, a sistematização da listagem e a percepção de regularidade dos problemas combinatórios. Ao compararem o desempenho quantitativo e a qualidade das resoluções entre o pré e o pós-teste, observaram que os alunos passaram a demonstrar compreensão dos problemas combinatórios e de suas relações, mostrando-se capazes de resolver os problemas e, em parte, generalizar seus procedimentos.

Borba e Azevedo (2011) relatam um estudo de caso, no qual duas meninas do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública aprenderam a fazer uso de árvores de possibilidades utilizando um *software* denominado *Diagramas de Árbol*. Por meio do recurso tecnológico as crianças foram levadas a pensar sobre as relações combinatórias

envolvidas nos quatro tipos de problemas e o uso das árvores de possibilidade auxiliou no desenvolvimento do raciocínio combinatório destas estudantes de anos iniciais de escolarização.

Este conjunto de estudos dá suporte à defesa do ensino de Combinatória desde os anos iniciais de escolarização, uma vez que as crianças possuem noções intuitivas referentes a situações combinatórias, são capazes de compreender relações básicas e podem desenvolver procedimentos adequados à solução de problemas desta natureza.

2. Caracterização dos problemas combinatórios

Problemas combinatórios são caracterizados por enumeração direta ou indireta de possibilidades e possuem duas relações básicas presentes em todos os tipos de situações de Combinatória: *escolha* e *ordenação* de elementos. Estas são relações que dizem respeito ao modo como os elementos que constituem as distintas possibilidades são escolhidos e se a ordem de disposição destes elementos constitui, ou não, possibilidades distintas.

O *esgotamento de possibilidades* também é uma característica de situações combinatórias. Não é suficiente enumerar ou contar apenas algumas das possíveis combinações de elementos. É necessário esgotar todas as possibilidades, ou seja, enumerar ou contar todos os casos que atendem ao solicitado na dada situação.

Outras relações combinatórias presentes em algumas situações combinatórias são relativas a *repetição*, *posição* e *proximidade* de elementos, como apontado por Borba e Braz (2012). As situações que envolvem estas outras relações são mais complexas e não recomendamos que sejam tratadas em anos iniciais de escolarização.

Quanto à *escolha* de elementos, estes podem ser selecionados dentre os elementos de um conjunto único – como no caso de *arranjos*, *combinações* e *permutações*, sendo este último um caso particular no qual todos os elementos do conjunto são selecionados em cada uma das possibilidades enumeradas. Alternativamente, pode-se escolher elementos de dois ou mais conjuntos distintos – que são os problemas combinatórios denominados de *produtos cartesianos*.

A *ordem* na qual os elementos são dispostos pode constituir, ou não, possibilidades distintas. No caso de *arranjos* e *permutações* a ordem dos elementos designa possibilidades diferentes. Por exemplo, ter João em primeiro lugar num concurso e Pedro em segundo lugar é diferente de ter Pedro em primeiro lugar e João em segundo;

assim como 123, 132 e 321 são diferentes maneiras de usar os mesmos algarismos, pois a ordem de disposição dos elementos constituem números diferentes. Já em *produtos cartesianos* ou *combinações* a ordem dos elementos não constituem diferentes possibilidades. Por exemplo, escolher uma calça azul e uma blusa preta é o mesmo traje que a mesma blusa preta e a mesma calça azul; e escolher João e Pedro para constituírem uma comissão, é a mesma coisa que escolher Pedro e João para constituírem a comissão.

3. O estudo envolvendo estudantes e professores de anos iniciais do Ensino Fundamental

3.1 O desempenho dos estudantes em problemas combinatórios

Participaram do estudo 99 estudantes com idades variando de 6 a 12 anos. Cada um respondeu oito problemas combinatórios, dois de cada tipo: *arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*. Metade dos problemas resultava em um menor número de possibilidades e a outra metade em um número maior de possibilidades.

Um aspecto inovador deste levantamento com crianças de anos iniciais do Ensino Fundamental foi que variados tipos de problemas combinatórios eram resolvidos pelos estudantes, diferentemente de alguns outros estudos que investigaram os desempenhos em apenas um tipo de problema.

Na Tabela 1 pode-se observar os desempenhos das crianças em cada um dos anos escolares investigados e em cada tipo de problema combinatório. Salienta-se que foram registrados os acertos totais, ou seja, quando a criança conseguia chegar, em sua resposta, ao número total solicitado de possibilidades. Acertos parciais, como a listagem de algumas possibilidades corretas, não estão registradas na tabela.

Tabela 1: Percentuais de respostas corretas por ano de escolarização e tipo de problema

Tipo de problemas \ Ano escolar	Arranjos	Combinações	Permutações	Produtos Cartesianos
1ª série – 2º ano	0	0	0	0
2ª série – 3º ano	7	22	4	34
3ª série – 4º ano	8	10	5	33
4ª série – 5º ano	17	19	5	49
Média	8	13	3	29

Verificou-se que as crianças dos primeiros anos de escolarização tiveram muitas dificuldades em enumerar todas as possibilidades solicitadas, mas, no caso de menor número de possibilidades, algumas crianças foram capazes de listar todas. Evidenciou-se, assim, que crianças em início de escolarização podem não ter a capacidade de enumerar todos os casos de situações combinatórias, mas são capazes de compreenderem relações combinatórias de *escolha* e de *ordenação* de elementos, já que listaram casos corretos para os problemas propostos.

As crianças com mais anos de escolarização eram mais capazes na enumeração das possibilidades e alguns estudantes chegaram a usar procedimentos nos quais listaram alguns poucos casos e depois generalizaram quantas eram as possibilidades totais. Por exemplo, percebiam que as *permutações* possíveis das letras da palavra AMOR iniciadas em A eram seis (AMOR, AMRO, ARMO, AROM, AOMR, AORM) e concluíam, então, que para cada uma das outras três letras também haveria seis possibilidades, resultando, assim, em 24 possibilidades ao todo.

A análise evidenciou que embora não tenham obtido corretamente, em alguns casos, o número total de possibilidades, muitas crianças deram evidência de que compreendiam a estrutura combinatória dos problemas, mas possuíam dificuldade em sistematicamente listar todos os casos possíveis.

Dificuldades em obter respostas totalmente corretas (com o número total de possibilidades) também foram observadas por Inhelder e Piaget (1976) e Moro e Soares (2006) com estas mesmas faixas de idade e nível de escolarização. Já Matias, Santos e Pessoa (2011) e Pessoa e Borba (2012) observaram que até crianças de Educação Infantil foram capazes de escolher corretamente elementos e, assim, levantar possibilidades corretas em situações combinatórias, mas possuíam dificuldade com a ordenação de elementos e também em esgotar todas as possibilidades.

No presente estudo, as respostas das crianças variaram de: a) total incompreensão das relações envolvidas (como pode ser observado na Figura 1, na qual a criança lista palavras começadas com as letras A, M, O e R, mas não faz *permutações* corretas das quatro letras); para b) compreensão das relações sem enumeração de todas as possibilidades (como se pode observar na Figura 2, na qual a criança desenha algumas possibilidades de 1º e 2º lugares, mas não todos os *arranjos*); a c) enumeração de todas as possibilidades por representações diretas (principalmente listas, como a observada na Figura 3, na qual a criança mostra as *permutações* de três elementos); ou procedimentos indiretos, como as generalizações (como mostradas na Figura 4, na qual a criança

descobre que não há necessidade de listar todos os casos); ou produtos diretos (como pode ser observado na Figura 5).

Figura 1. Não compreensão de relações combinatórias em um problema de *permutação*.

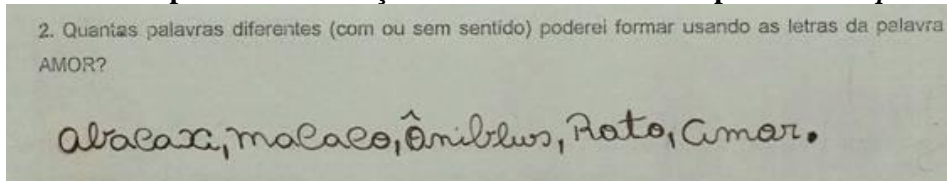


Figura 2. Compreensão das relações sem enumeração de todas as possibilidades em um problema de *arranjo*.

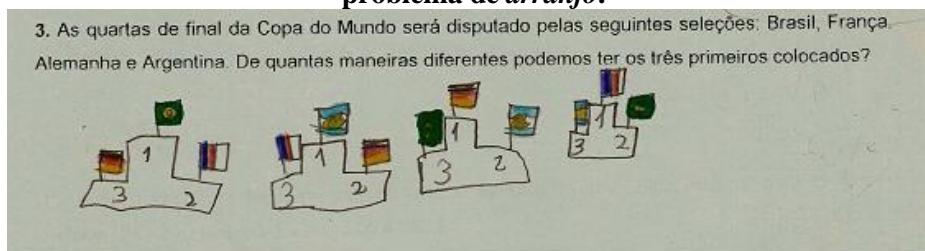


Figura 3. Apresentação de todas as possibilidades por representação direta em um problema de *permutação*.

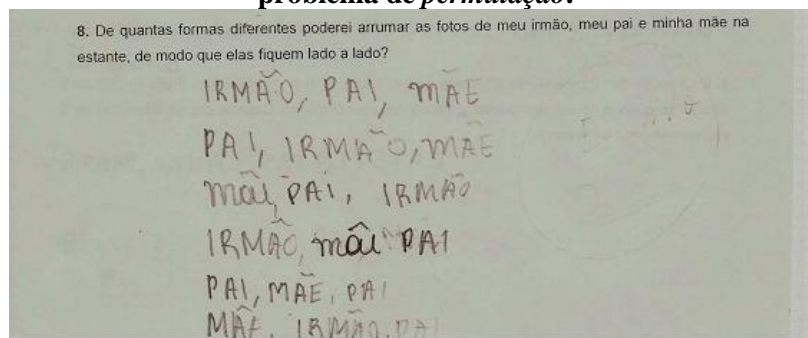


Figura 4. Procedimento indireto de generalização de todos os casos possíveis em um problema de *arranjo*.

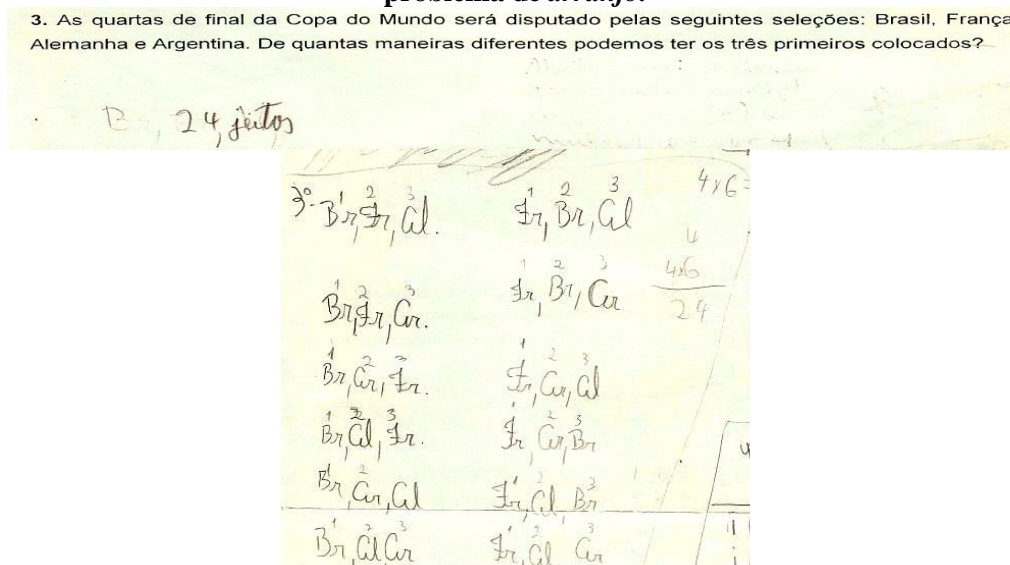
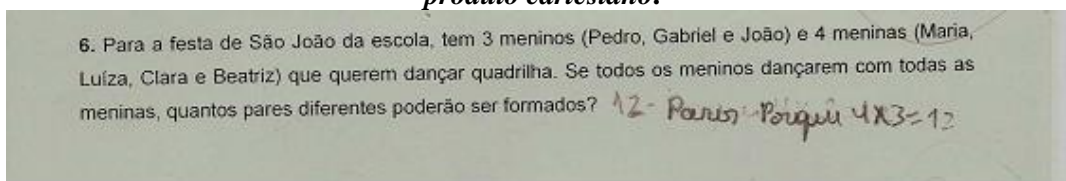


Figura 5. Multiplicação determinando todos os possíveis casos em um problema de produto cartesiano.



Os procedimentos mais comumente utilizados foram as listas e desenhos, mas outras formas também foram observadas, tais como diagramas e notações matemáticas (operações aritméticas). Há, assim, evidência de uso espontâneo de certas representações simbólicas – que as crianças utilizaram antes de serem instruídas em qualquer tipo de problema combinatório e utilização de outras representações simbólicas que pode ser consequência de aprendizado escolar.

Resolver problemas de *produto cartesiano* – o tipo de problema combinatório explicitamente trabalhado nos anos iniciais de escolarização – foi significativamente mais fácil que resolver outros tipos de problemas e, ao final dos anos iniciais do Ensino Fundamental, muitos estudantes ainda tinham dificuldades em apresentar soluções completas para *arranjos*, *combinações* e *permutações*. Para algumas crianças ainda não estava claro quando a ordem de elementos interfere, ou não, no levantamento de possibilidades distintas, mas muitas eram capazes de enumerar alguns casos válidos para as distintas situações combinatórias.

Os resultados obtidos com as crianças de anos iniciais mostram que elas gradualmente desenvolvem seus raciocínios combinatórios através da escolarização e defendemos que para um mais amplo desenvolvimento é necessário trabalhar diferentes tipos de problemas e estimular o uso de procedimentos variados. Como ressaltado por Vergnaud (1982), diferentes situações que dão significado (relacionado aos diferentes tipos de problemas), invariantes (referente às relações e propriedades presentes nas situações) e representações simbólicas (utilizadas nos procedimentos) devem ser apresentados aos estudantes, de modo a desenvolver um amplo conhecimento matemático e nós acreditamos que este pressuposto se aplica muito bem ao aprendizado da Combinatória que pode ter seu desenvolvimento iniciado desde o início da escolarização.

3.2 Conhecimento docente sobre Combinatória

A investigação sobre o conhecimento docente foi baseado em Shulman (1986) que destacou que há distintos conhecimentos necessários aos professores: *conhecimento do*

conteúdo, conhecimento pedagógico e conhecimento curricular, dentre outros. Também concordamos que este é um conjunto de conhecimentos que devem ser articuladamente possuídos pelos professores, pois para o ensino eficiente de Matemática é necessário dominar conteúdos e procedimentos de ensino, bem como conhecer como se propõe no currículo aprofundar os conteúdos específicos.

Os professores (em um número total de seis) foram solicitados a analisarem problemas combinatórios – em relação às suas similaridades e diferenças; a anteciparem quais situações seriam mais difíceis para os estudantes; e a sugerirem atividades que pudessem auxiliar as crianças no desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios. O instrumento utilizado com estes professores era baseado no estudo realizado com as crianças. Os mesmos problemas resolvidos pelos estudantes foram apresentados aos professores, bem como protocolos de procedimentos utilizados pelas crianças (como os apresentados nas Figuras 1 a 5) foram analisados pelos professores.

Os professores entrevistados eram de distintos níveis de ensino – anos iniciais do Ensino Fundamental, anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio – mas no presente texto enfatizaremos o conhecimento das professoras de anos iniciais quanto à Combinatória e referente aos modos como estudantes aprendem e como podem ser ensinados este conteúdo na escola.

As professoras reconheceram a natureza multiplicativa dos problemas, mas, assim como as crianças, acharam difícil diferenciar *arranjos* e *combinações*, ou seja, quando a ordem dos elementos designa diferentes possibilidades, ou não. Este é um resultado preocupante, considerando que crianças poderão ser ensinadas por professores que têm falta de alguns *conhecimentos de conteúdo*. Ressalta-se que o trabalho com diferentes tipos de problemas combinatórios – e não apenas os *produtos cartesianos* – é recomendado pelos PCN e *arranjos, combinações e permutações* estão, de fato, presentes em livros didáticos de anos iniciais – como observado por Barreto e Borba (2010).

Ao ordenarem as dificuldades dos problemas, as professoras de anos iniciais levavam em consideração mais os termos utilizados nos enunciados do que o tipo de problema envolvido, diferentemente de professores de anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio que consideravam mais a estrutura dos problemas. Os professores também não evidenciaram conhecer como situações combinatórias podem ser trabalhadas ao longo dos diferentes níveis de ensino. Apesar das recomendações nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), os professores de anos iniciais do

Ensino Fundamental parecem carecer de suficientes *conhecimentos de conteúdo e curricular* no que diz respeito à Combinatória, o que reforça nossa preocupação com o ensino deste conteúdo.

Pela falta de domínio dos *conhecimentos de conteúdo e curricular*, o *conhecimento pedagógico* das professoras, referente aos problemas combinatórios, também era muito superficial. Embora sugerissem o uso de material manipulativo para auxiliar a compreensão das crianças, a principal preocupação das professoras era explorar os problemas em articulação com outros conteúdos matemáticos (como, por exemplo, ordens de grandeza numéricas ou sequências) e com outras áreas de conhecimento (como Língua Portuguesa). Assim, suas sugestões de usos de manipulativos não eram bem fundamentadas e não apresentaram modos específicos de uso de recursos de ensino de Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Nas análises realizadas sobre os protocolos de resolução de problemas combinatórios pelos estudantes, observa-se alguns comentários das professoras dos anos iniciais. Em relação ao protocolo evidenciado na Figura 2 (*Compreensão das relações sem enumeração de todas as possibilidades em um problema de arranjo*), as professoras observaram a ausência das demais possibilidades e propuseram algumas soluções. A Professora PAI₁ sugeriu um trabalho com a utilização de bandeirinhas (material concreto) para que os alunos visualizassem as demais possibilidades, enquanto que a Professora PAI₂ indicou um trabalho a partir da valorização e socialização das diferentes resoluções para toda a turma, enfatizando algumas características da resolução de problemas. Essas proposições são interessantes, mas são gerais e podem ser aplicadas a qualquer tipo de problema matemático.

No caso do protocolo evidenciado na Figura 4 (*Procedimento indireto de generalização de todos os casos possíveis em um problema de arranjo*) a Professora PAI₁ comenta:

PAI₁: *Esse aluno não entendi como ele chegou essa conta. Esse aqui eu não sei como ele chegou a esse número 24 jeitos [lê as possibilidades]....ele não está compreendendo não...Ele teve o conhecimento dele mais acho que esse conhecimento priorizou só o Brasil e França, ele direcionou o resultado.*

Esse comentário indica a falta de alguns elementos relativos à compreensão do raciocínio combinatório por parte do professor. Nesse sentido, Grossman, Wilson e Shulman (2005) consideram que o conhecimento do conteúdo, ou a ausência dele — pode afetar como os professores criticam os livros textos, como selecionam o material

pra ensinar, como estruturam seus cursos e como conduzem a instrução (p.13). Observa-se, nesse extrato, que compromete também a análise e avaliação de estratégias de resolução de problemas pelos estudantes.

Os resultados obtidos com professores indica a forte influência da formação docente e de prática de ensino no entendimento da Combinatória e de conhecimentos referentes a como o raciocínio combinatório pode ser desenvolvido, em particular por meio de escolarização. A formação de professores de anos iniciais é diferenciada da de professores de anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio e suas práticas de ensino também são distintas e estas experiências prévias e continuadas têm grande efeito no desenvolvimento do conhecimento docente, em particular no que diz respeito à Combinatória.

Recomendamos, assim, que professores tenham maior oportunidade de desenvolverem *conhecimentos de conteúdo* referentes à Combinatória, bem como entendimento de como estudantes aprendem e podem ser ensinados em situações combinatórias ao longo da escolarização (*conhecimentos pedagógicos e de currículo*), de modo a estimularem o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes. Se professores de distintos níveis de ensino desenvolverem estes conhecimentos e trabalharem de forma articulada, mais amplo poderá ser o desenvolvimento dos estudantes.

Considerações finais

O presente estudo traz evidências de que o conhecimento de Combinatória de estudantes de anos iniciais do Ensino Fundamental e o de professores deste nível de ensino podem ser conflitantes em alguns aspectos. Este resultado é preocupante, pois indica a falta de preparo de professores para o trabalho com situações combinatórias ao longo de todo o Ensino Básico.

Estudantes parecem estar buscando fazer sentido a situações combinatórias e podem estar desenvolvendo seus entendimentos independentemente ao que está sendo trabalhado em sala de aula. Este pressuposto baseia-se em soluções corretas ocorridas antes do ensino formal, em particular antes do ensino de problemas como *arranjos*, *combinações* e *permutações* – os quais são explicitamente tratados apenas no Ensino Médio.

Os conhecimentos de professores não nos parecem suficientemente amplos e precisam de maior desenvolvimento, de modo a poderem auxiliar os estudantes a desenvolverem

os seus raciocínios combinatórios. Como as professoras entrevistadas não haviam tido formação específica em Combinatória, observa-se a necessidade de discutir amplamente este conteúdo, tanto em formações iniciais quanto continuadas.

Voltamos a ressaltar a importância do estudo da Combinatória – desde os anos iniciais do ensino – como modo de desenvolver um pensar específico que pode auxiliar o desenvolvimento do conhecimento matemático de modo geral, bem como de outras áreas do conhecimento. Enfatizamos, assim, que as crianças desde novas têm condições de resolverem situações combinatórias simples e os professores – tanto dos anos iniciais quanto de outros níveis de ensino – devem conhecer esse fato, de modo que se possa auxiliar os estudantes a gradativamente ampliarem seus raciocínios combinatórios.

Referências

BARRETO, Fernanda; BORBA, Rute. Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de anos iniciais. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*. X ENEM: Salvador, 2010.

BARRETO, Fernanda; BORBA, Rute. Intervenções de combinatória na educação de jovens e adultos. *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. XII CIAEM: Recife, 2011.

BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana. A construção de árvores de possibilidades com software: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de Karine e Vitória. In Spinillo, Alina; Lautert, Síntria (orgs) *A pesquisa em Psicologia e suas implicações para a Educação Matemática*. Recife, Editora Universitária UFPE, 2012.

BORBA, Rute; BRAZ, Flávia M. T. O que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais? *Anais do III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. III Sipemat: Fortaleza, CE, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1997.

FISCHBEIN, Efraim. *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Reidel: Dordrecht, 1975.

FISCHBEIN, Efraim; PAMPU, Ileana; MINZAT, Ion. Effects of age and instruction on combinatory ability in children. *The British Journal of Educational Psychology*, nº 40, 1970.

GROSSMAN, P.L.; WILSON, S.M.; SHULMAN, L.S. Profesores de sustancia: el conocimiento de la materia para la enseñanza- *Revista de currículum y formación del profesorado*, 9, 2, 2005.

INHELDER, Barbara; PIAGET, Jean. *Da lógica da criança à lógica do adolescente*. São Paulo: Pioneira, 1976.

MATIAS, Patrícia; SANTOS, Missilane; PESSOA, Cristiane. Crianças de Educação Infantil resolvendo problemas de arranjo. *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. XIII CIAEM, Recife, 2011.

- MORO, Maria Lúcia; SOARES, Maria Tereza. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo: v. 8, n.1, pp. 99-124, 2006.
- PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem Dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *ZETETIKÉ*, Campinas, v.17, n.31, jan/jun, 2009. p. 105-155, 2009.
- PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. *Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, v.1, n.1, 2010. Disponível em: <http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia/article/view/4> Access in: 21 set. 2010.
- PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Do young children notice what combinatorial situations require? *36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Taipei/Taiwan. Proceedings of PME36, 2012. p. 1-1.
- PESSOA, Cristiane; SANTOS, Laís Thalita dos. Gato, Gota, Toga... A Combinatória no 5º ano do Ensino Fundamental. *UNOPAR Científica - Ciências Humanas e Educação*, v. 13, 2012. p. 35-48.
- ROCHA, Cristiane; BORBA, Rute. Formação Docente e o Ensino de Problemas Combinatórios: diferentes olhares. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Bahia, Salvador: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2010.
- SHULMAN, Lee. Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*. V.15. 1986.
- SMOLE, Kátia; DINIZ, Maria Ignez. *Matemática: Ensino Médio*. São Paulo: Editora Saraiva, 2003.
- VERGNAUD, Gérard. A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter, Thomas, Moser, Joseph & Romberg, Thomas. (Eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective*. Hillsdale, N. J.: Lawrence Erlbaum, 1982.

Recebido: 10/05/2013

Aceito: 13/07/2013