As significações algébricas, geométricas e aritméticas no processo de elaboração do sistema conceitual numérico a luz da teoria histórico-cultural.

Josélia Euzebio da Rosa[1]
Ademir Damazio
Tania Stoltz
Maria Tereza Soares

Resumo
Apresentamos um estudo de caso em que o foco foi o processo de elaboração do sistema conceitual de número, por parte de um adulto de vinte e oito anos de idade, estigmatizado em toda sua trajetória escolar como incapaz para aprendizagem matemática. Analisamos as possibilidades de atividades de ensino-aprendizagem, desenvolvidas durante vinte encontros, para a elaboração das idéias e apropriação de significações do sistema conceitual de número. O pressuposto básico é de que objetivo do ensino escolar deveria ser o desenvolvimento do pensamento teórico em detrimento do pensamento empírico. Estabelecemos um diálogo com base em noções abstratas do conceito de número com articulações de princípios e propriedades de um sistema conceitual abrangendo: número, operações, proporcionalidade, infinito, equações, reta, segmento, entre tantos.
Palavras–chave*: sistema conceitual; número; elaboração conceitual.*

Abstract
Presents a case study where the focus was the elaboration process of the conceptual system of number by a twenty-eight-year-old adult stigmatized in his school history as incapable of learning mathematics. We analyzed the possibilities of teaching-learning activities, developed during twenty meetings, for the elaboration of ideas and appropriation of significations regarding the conceptual system of number. The basic presupposition is that the objective of teaching should be the development of the theoretical thought in detriment of the empirical thought. Thus the activities proposed involved comparison of line segments. The subject gradually started to establish a dialogue based on abstract notions of the concept of number with articulation of principles and properties of a conceptual: number, operations, proportionality, infinity, equations, line and segment, among others.
Keywords: *conceptual system; number; conceptual elaboration.*

Introdução

Partindo do tema geral que é a educação matemática, o objeto do presente estudo é o processo de elaboração do sistema conceitual numérico. O objetivo é investigar, a partir de um estudo de caso, as possibilidades de atividades de ensino-aprendizagem para elaboração de idéias e apropriação de significações do sistema conceitual de número, por um adulto de vinte e oito anos.

Os dados para análise tiveram como referência o desenvolvimento de situações de ensino-aprendizagem, durante 20 encontros com duração de aproximadamente uma hora cada, os encontros foram filmados.

Fundamentamo-nos na abordagem histórico–cultural (AHC), cujo precursor é

[1] UFPR- Universidade Federal do Paraná

Vigotski[2]. Para o referido autor (1996), o conceito é um conjunto de atos de juízo, de percepção, de interação e de conhecimento que, além de refletir a realidade, sistematiza-a, inclui os dados da percepção direta em um complexo sistema de nexos e relações.

Para Vigotski (2000), na escola, não se ensina o sistema de numeração decimal como tal ao estudante. *Ensina-se a copiar números, somar, multiplicar, resolver exemplos e tarefas, e como resultado de tudo isso ela acaba desenvolvendo algum conceito de sistema decimal* (p. 324). Com a formação de conceitos o conteúdo do pensamento é renovado e reestruturado aparecendo novas formas de movimento e de operar com esse conteúdo.

Existe uma relação de generalidade entre os conceitos: *O pré-conceito é uma abstração de número a partir do objeto e uma generalização nela fundada das propriedades numéricas do objeto. O conceito é uma abstração a partir do número e uma generalização nela fundada das outras relações entre os números* (VIGOTSKI, 2000, p. 372).

No contexto do conhecimento matemático, Caraça (1984, p. 04) diz que a idéia *de número natural não é um produto puro do pensamento, independe da experiência; os homens não adquiriram primeiro os números para depois contarem; pelo contrário, os números naturais foram se formando lentamente pela prática diária de contagens*. Os números racionais, por sua vez, surgiram da necessidade prática da medida. Medir consiste em *comparar duas grandezas da mesma espécie – dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc*. (idem, p. 29). Do ponto de vista aritmético, os racionais surgiram da impossibilidade da divisão - nos casos onde o dividendo não seja múltiplo do divisor.

Medir e contar, segundo Caraça (1984, p. 29), *são operações cuja realização a vida de todos os dias exige com maior freqüência*. Da realidade prática, por meio da medida e da contagem, a humanidade tirou a idéia dos números naturais e racionais, depois, produziu todas as conseqüências dessa idéia: os irracionais, para resolver o problema teórico da medida e, por último, os números relativos para resolver o problema das grandezas que podem ser tomadas em dois sentidos opostos, concluindo o campo relativo tradicionalmente conhecido como o campo dos reais. Ou seja, *é o numero natural, surgindo da necessidade da contagem, o número racional, da medida e o número real, para assegurar a compatibilidade lógica de aquisições diferentes* (idem,

[2] Optamos por empregar a grafia VIGOTSKI, porém, nas indicações bibliográficas, vamos conservar a grafia da referência, ora aparecendo Vigotski, ora como Vygotski.

p. 125).

Assim sendo, o número natural e o racional são pré-conceitos, são uma abstração de número a partir do objeto, já o número real, por ser uma abstração a partir do número, é o conceito propriamente dito. É no conceito (números reais) que todas as operações fundamentais do cálculo são possíveis de serem realizadas.

Do exposto, pode-se inferir que é só nos números reais, tomados em sua dinâmica, atividade e movimento, que o conceito de número reflete sua verdadeira natureza teórica. A relação do número real com o objeto pressupõe a existência da relação entre os naturais, racionais, irracionais e inteiros, ou seja, um sistema de conceitos. Segundo Vigotski, cada conceito deve ser tomado em conjunto da mesma forma que uma *célula deve ser tomada com todas as suas ramificações através das quais ela se entrelaça com o tecido comum* (2000, p. 294).

Considerando o pressuposto da abordagem histórico-cultural que é papel da escola o desenvolvimento do pensamento teórico, porém sem deixar de considerar o nível intelectual do estudante, apresentamos, no presente estudo, o envolvimento de um estudante que tem uma trajetória de vida escolar marcada por julgamento depreciativo e excludente.

O sujeito de nossa pesquisa, ao qual daremos o pseudônimo de Pedro, nasceu e cresceu no campo. Trabalhou na agricultura desde criança para ajudar na sobrevivência da família e passou grande parte de sua infância hospitalizado. Freqüentou a escola regular até meados da quarta série (quinto ano) do ensino fundamental, momento em que foi convidado pela professora da classe para retornar a segunda série (terceiro ano). A professora afirmava que Pedro não teria condições de ser aprovado, se continuasse freqüentando a quarta série. Justificava sua afirmação alegando que ele não estava conseguindo acompanhar seus colegas; o mesmo aconteceria se retornasse à terceira série (quarto ano). Alertava, ainda, que ele precisava aprender a fazer contas. Na percepção da professora, era o conhecimento das quatro operações que ele iria precisar no seu dia-a-dia. Cumprindo o ritual de obediência que competia ao estudante, Pedro aceitou o convite.

Dessa forma, Pedro estava sendo educado para permanecer no campo, alijado do direito de escolha. Como ressalta Leontiev (1978, p. 276): *... os homens que constituem a massa da população, em particular da população rural, têm que contentar-se com o mínimo de desenvolvimento cultural necessário à produção de riquezas materiais nos limites das funções que lhes são destinadas*.

Pelas falas de Pedro, é possível inferir a concepção utilitarista da matemática de sua professora ao se preocupar com as aplicações diretas do conhecimento em situações reais do contexto em que o mesmo estava inserido: *A professora disse que o que eu estava estudando na quarta série eu praticamente não iria usar no meu dia-a-dia, mas o conteúdo da segunda série, que era mais as continhas eu iria precisar* (Depoimento de Pedro).

Ou seja, a professora acreditava que, com o avanço dos anos escolares, os conteúdos programáticos, por serem mais abstratos, iriam se afastando das situações reais do contexto de Pedro, revelando um equívoco se visto numa perspectiva teórica histórico-cultural. Segundo Vygotski (1996), o pensamento abstrato é o que reflete a realidade com maior profundidade e verdade, de forma diversificada e mais completa. O autor afirma ainda que a essência do conceito não pressupõe o empobrecimento da realidade, ao contrário, pressupõe o enriquecimento da realidade nele representado.

Aos dezesseis anos de idade, Pedro procurou um curso supletivo, onde concluiu o ensino fundamental e médio. Nessa modalidade de ensino, os estudantes deveriam estudar os módulos em casa. A presença na escola se dava para esclarecimentos de conteúdos não "aprendidos" e para realização das provas. A nota mínima permitida para aprovação em cada módulo era oito. Dificilmente Pedro alcançava esse feito, mas as professoras davam uma "ajudinha" e ele passava para o módulo seguinte. Essa foi a rotina para que Pedro concluísse o ensino médio aos vinte e dois anos de idade.

Após concluir o ensino médio foi morar na cidade de Curitiba-PR e resolveu prestar vestibular para o curso de comunicação digital na Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, foi quando percebeu a fragilidade de sua formação básica. Com a reprovação no vestibular, sua atitude foi procurar um cursinho pré-vestibular com a crença que ali estava a solução para a sua devida aprendizagem. No início de 2006, ingressou no cursinho, mas dois meses depois desistiu por não acompanhar a dinâmica da exposição dos conteúdos. No segundo semestre do mesmo ano, ingressou em um outro cursinho e, novamente, enfrentou as mesmas dificuldades para "aprender os conteúdos matemáticos". Ao conversar com os professores sobre as suas dificuldades e sobre o seu sonho de ingressar em um curso de engenharia, ouviu comentários do tipo: *engenharia é difícil, são cursos muito concorridos...* A sugestão desses professores foi que Pedro procurasse um curso profissionalizante para em poucos meses estar apto para exercer alguma profissão.

Mais uma vez os fatos da história estudantil se repetem e, para "resolver" o problema das dificuldades, a saída que a escola indica é simplesmente *não ir em frente*, em detrimento de um convite para aprendizagem. Diante desse contexto, nossa proposição foi alertar Pedro de que o acesso aos conhecimentos que não teve nos bancos escolares e a realização dos seus sonhos é um direito que não pode ser desrespeitado. Acreditamos que:

> O verdadeiro problema não está, portanto, na aptidão ou inaptidão das pessoas para se tornarem senhores das aquisições da cultura humana, fazer delas aquisições da sua personalidade e dar a sua contribuição. O fundo do problema é que cada homem, cada povo tenha a possibilidade prática de tomar o caminho de um desenvolvimento que nada entrave (LEONTIEV, 1978, p. 283).

As disciplinas que Pedro mais apresentou dificuldades no cursinho foram: Matemática, Química e Física. Ele afirma não entender os conteúdos escolares dessas disciplinas quando o professor *está explicando no quadro* e também em casa quando tenta estudar sozinho. Especificamente, no que se refere à matemática, ele diz: *Eu não sei interpretar os problemas e quando é só resolver eu também não consigo*. As dificuldades relatadas por Pedro para justificar o seu pedido de ajuda suscitou-nos um grande problema: por onde começar?

Optamos pelo conceito de número que, segundo Davydov (1982), conserva sua entidade durante todo o processo escolar. O objetivo final da disciplina de matemática, segundo o referido autor, é criar uma concepção circunstanciada e válida de número real.

Na elaboração das atividades, consideramos não só o conceito em estudo, mas também o sistema conceitual no qual se insere. Em concernência com a teoria, adotamos, assim, como Damazio (2000), os pressupostos do método vygotskiano de investigação do processo de apropriação e formação de conceitos. Nesse sentido, procuramos:

1) estudar não só o objeto em si – sistema conceitual de número – mas o processo em que ocorre o fenômeno em estudo, ou seja, analisamos o processo de desenvolvimento de cada atividade e as conseqüentes elaborações de raciocínios por parte do sujeito;
2) enfatizar a explicação, ao invés da descrição do fenômeno em estudo; dessa forma, solicitamos ao sujeito que nos revelasse o raciocínio utilizado na realização das atividades. Pois as respostas nem sempre manifestaram o caminho percorrido pelo pensamento, o real estado de desenvolvimento do sujeito;

3) estar atentos ao problema da conduta fossilizada, encontrada nos processos psicológicos mecanizados que são construídos por ações repetitivas. Pois isso, perdem a aparência original, dificultando que o aspecto externo revele sua natureza interna, o que gera grandes dificuldades para a análise do objeto. O seu estudo só é possível se formos às suas origens. A convivência cotidiana do sujeito com alguns conceitos matemáticos contribuiu para a automatização dos mesmos. Portanto, tomamos o cuidado de questionar aquelas respostas automáticas apresentadas no processo de elaboração das atividades.

Dois pressupostos básicos nortearam o trabalho proposto. O primeiro é que o verdadeiro ensino é aquele que constitui zona de desenvolvimento proximal, estimulando uma série de processos internos, consolidando as funções psicológicas superiores e, com isso, dando condições para interpretações das diferentes atividades sócio-culturais

Conforme Vygotski (1993), a zona de desenvolvimento proximal é indicadora das possibilidades da pessoa diante de uma situação de ensino-aprendizagem. Vygotski (1993) dá a seguinte explicação para a zona de desenvolvimento proximal:

> As divergências entre a idade mental e o nível de desenvolvimento real que se determina com ajuda das tarefas resolvidas de forma independente, e o nível que alcança a criança ao resolver as tarefas, não por sua conta, mas em colaboração, é o que determina a zona de desenvolvimento proximal (p. 239).

As ações humanas realizadas com dependência - que estão em determinado estado na zona de desenvolvimento proximal - passam, num estado seguinte, a se tornar independentes. Ou seja, as atividades realizadas num determinado período, com ajuda, criam as condições para que, num período posterior, sejam realizadas de forma independente. Portanto, a zona de desenvolvimento proximal é caracterizada por dupla disposição: da pessoa para a aprendizagem e de alguém com o qual estabelece interlocução.

O segundo pressuposto, é de que o processo de aprendizagem, em vez de ser entendido como acúmulo de dados em um arquivo mental, deve desenvolver consciência, tomada de decisões, visões de mundo, postura de vida e de trabalho (DAMAZIO, 2000).

O concreto, ponto de partida e de chegada, foi o conceito de número em sua essência teórica com a significação de grandeza. Segundo Jardinetti (1996, p. 49), “o concreto é o ponto de partida e de chegada do processo de conhecimento, não é apreensível de imediato pelo pensamento, mas é, mediatizado por abstrações". O ponto de partida refere-se ao concreto em "seu aspecto sincrético, sensorial, empírico, captado nas suas manifestações mais imediatas, o que lhe confere um conhecimento superficial e fragmentário" (idem, p. 50). E o ponto de chegada refere-se ao concreto em "seu aspecto multifacetado, revelado em sua essência, em suas propriedades não acessíveis à apreensão sensorial. Trata-se do concreto apreendido na multiplicidade de suas determinações" (ibidem).

É no concreto ponto de partida e ponto de chegada que entra em cena a relação entre conceito cotidiano e conceito científico. Vigotski (2000, p. 349), diz que os conceitos cotidianos (derivados das ações empíricas, da prática cotidiana em situações não escolares) e científicos (sistematizados em situações de aprendizagem no processo educativo) seguem caminhos contrários e inter-relacionados no desenvolvimento.

O conceito espontâneo, que passou de baixo para cima por uma longa história em seu desenvolvimento, abriu caminhos para que o conceito científico continuasse a crescer de cima para baixo, uma vez que criou uma série de estruturas indispensáveis ao surgimento de propriedades inferiores e elementos do conceito científico. De igual maneira, o conceito científico, que percorreu certo trecho do seu caminho de cima para baixo, abriu caminhos para o desenvolvimento dos conceitos espontâneos, preparando de antemão uma série de formações estruturais indispensáveis à apreensão das propriedades superiores do conceito.

Isso significa dizer que, em situação escolar, o ponto de partida não é conceito cotidiano, pois ele está à mercê de significações do conceito científico, para que ocorra o seu processo de ascensão. Para Davídov (1987) o objetivo do ensino escolar deveria ser o desenvolvimento do pensamento teórico em detrimento do pensamento empírico. Para ele, essas duas formas de pensamento produzem tipos distintos de generalização, empírica e teórica, que se diferem quanto à natureza. A generalização empírica tem por base os procedimentos que caracterizam as diferenças e semelhanças observáveis em objetos físicos e fenômenos. A categorização e classificação do objeto são expressas verbalmente. A generalização teórica dá condição para a apropriação da essência do objeto não só no plano material, mas principalmente no plano mental. Apropriar-se de um objeto teoricamente, significa o domínio de sua forma ideal.

Em situação escolar, o desenvolvimento do raciocínio teórico é atingido somente se as atividades de aprendizagem orientarem o estudante para a apropriação das relações mais gerais das características de um determinado conceito matemático e, aos poucos, conduzir para as suas expressões concretas. Ou seja, de acordo com Davydov (1982), no ato de aprender e ensinar um determinado conceito, a atividade se estrutura de uma forma tal que se parta da abstração para o concreto.

Para Davydov (1982), ao ser apropriada pelo estudante, a relação fundamental que caracteriza um conceito matemático se transforma em simbólico, convertendo-se em uma *abstração com conteúdo*. Para a ocorrência de uma efetiva aprendizagem, é necessária a exploração dos vínculos entre esta abstração e as manifestações empíricas do fenômeno em estudo, porém, de uma maneira tal que o estudante estabeleça vínculos entre a abstração original e abstração de segunda ordem. Dessa forma, a abstração original vai, ao poucos, se constituindo em verdadeiros conceitos. Os estudantes passam a aplicar o conceito em problemas empíricos e outras situações de análise e síntese.

Assim, na estruturação curricular de uma disciplina, neste caso a Matemática, faz-se necessário o estabelecimento prévio da composição da atividade conceitual genérica. É a partir dela que são introduzidos os conceitos correspondentes. Davydov (1982) explicitou a tradução desses princípios para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Implementou seu programa, em caráter experimental, em escolas russas envolvendo estudantes do primeiro ano escolar, tendo como conteúdo de ensino o conceito de número.

Davydov (1982) elaborou uma proposta para o ensino da matemática, partindo do princípio de que desde o primeiro ano escolar as crianças devem adquirir uma concepção circunstanciada e válida de número real. Para o autor, o conhecimento teórico, em relação ao conceito de número, é o conceito de número real com a idéia de medida. A preocupação não é com a seqüência numérica ou com a escrita dos signos – enfoque historicamente adotado nos meios escolares - mas com a idéia de valor, implicando nas relações de igualdade e desigualdades. As atividades propostas aos estudantes envolvem comparação (comprimento, superfície, peso, volume, etc.) com uso de materiais (tiras de papel, palitos, blocos e outros). As relações comparativas estabelecidas pelos estudantes são anotadas, inicialmente, por linhas desenhadas em um papel e, posteriormente, por letras. Neste momento, o estudante já está fazendo anotações do tipo $a = b$, $a > b$ e $a < b$. A próxima etapa se caracteriza pela apresentação de problemas em que dois objetos a e b não podem ser comparados diretamente.

O objetivo, nessa etapa, é fazer com que o estudante busque uma medida *c* para estabelecer a relação entre os dois objetos. Uma vez encontrada a unidade física *c* que se inclua várias vezes nos objetos *a* e *b*, o estudante aprende as relações multiplicativas *a/c* e *b/c*. As anotações dessas relações são feitas de três maneiras. Inicialmente, são representadas por traços. Posteriormente, os estudantes aprendem os signos numéricos (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0) e passa a usá-los. Por último, tais relações são representadas na forma algébrica do tipo $a/c = 5$. Dessa forma, a noção de número é introduzida como uma relação multiplicativa, genericamente traduzida por $a/c = n$, onde *n* é qualquer número, *c* é qualquer objeto e *a* qualquer objeto múltiplo de *c*. De acordo com Davydov, esse enfoque permite estreitar consideravelmente o divórcio entre a álgebra e a aritmética.

No presente estudo, ao elaborar a seqüência das atividades, tivemos como base:

- A estrutura do curso de matemática proposta por Davydov. Primeiro com o objeto mais geral e depois a dedução dos casos particulares de sua manifestação. Como visto anteriormente, em sua proposta de ensino, Davydov inicia o processo de elaboração do conceito de número com a noção de grandeza para depois enfocar o caso particular de representação das relações gerais entre grandezas;
- O pensamento histórico que originou a elaboração do sistema conceitual numérico apresentado por Caraça (1984). Explicitamos a lógica do desenvolvimento histórico do conceito de número visando a passagem do concreto pensado ao concreto abstrato.

As atividades foram divididas em quatro etapas, cada uma delas subdivididas em estágios conforme apresentamos na seqüência:

1 - Primeira etapa:

Iniciamos com a idéia de medida de comprimento por estar fortemente relacionada com o sistema de numeração decimal, cujo princípio de ordenação é a base 10. Apresentamos ao sujeito alguns segmentos de retas (significação geométrica), assim como sua medida genérica (significação algébrica), conforme segue a ilustração I:

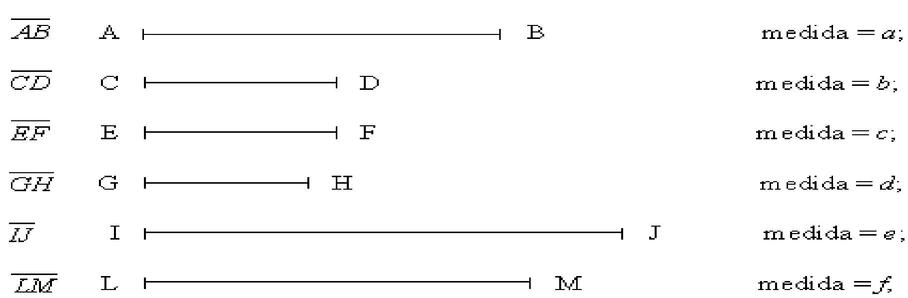

Ilustração I

1.1 - Primeiro estágio:

No primeiro estágio, sugerimos ao sujeito que analisasse os segmentos de reta e estabelecesse relações entre eles (uma das características do pensamento algébrico). O sujeito deveria determinar, por comparação, a igualdade ou a desigualdade (maior, menor) dos segmentos de reta. A produção do sujeito foi a seguinte:

$\overline{AB} > \overline{CD}$; $\overline{CD} = \overline{EF}$; $\overline{EF} > \overline{GH}$; $\overline{GH} < \overline{IJ}$; $\overline{IJ} > \overline{LM}$

Pedro adotou como referência a seqüência em que apresentamos os segmentos para fazer a comparação. Quando questionamos se havia possibilidade de fazer outras comparações ele afirmou positivamente e exemplificou oralmente:

Pedro*: sim, por exemplo,* $\overline{IJ} > \overline{AB}$; $\overline{GH} < \overline{EF}$; $\overline{LM} > \overline{CD}$.

Com base nas comparações anteriores, passamos para a utilização das medidas genéricas. Explicamos que as letras eram números privados de sua expressão concreta. Solicitamos a Pedro que representasse as comparações anteriores, usando as letras, o que prontamente atendeu com a notação a seguir:

$a > b;$ $b = c;$ $c > d;$ $d < e;$ $e > f.$

Percebemos que a introdução da linguagem simbólica abstrata, da forma como procedemos, estava carregada de significado ao sujeito. O simbolismo algébrico tem um valor comparativo conceitual com idéias numéricas e geométricas. Isso significa dizer que Pedro não estava estabelecendo relações entre situações do mundo dos seus afazeres do dia-a-dia, mas entre noções teóricas do conhecimento matemático, calcadas em abstrações. Os procedimentos adotados eram reveladores das suas possibilidades cognitivas, o que contribuiu para o desenvolvimento de todas as ações que a atividade requeria.

1.2 - Segundo Estágio:

Em seguida, apresentamos situações problemas do tipo: como será a relação de um novo segmento de reta $\overline{NO}$, de medida *g,* com o segmento $\overline{EF}$, com medida *c*, uma vez que *g* será maior que *b*?

Pedro: *g* vai ser maior que *b* e, *b* igual a *c*, então *g* vai ser maior que *c*.

A fala de Pedro é reveladora de significado e de sentido matemático, mais especificamente do pensamento transitivo que indica o potencial para a generalização, por extrapolar o estabelecimento de relação somente entre duas grandezas ou quantidades e exigir a articulação de forma combinatória dos nexos de *n* variáveis ou objetos hipotéticos. O pensamento transitivo também permite a passagem de uma equivalência a outra e o desenvolvimento dos sensos de ordenação e classificação que se tornaram fundamentais no processo histórico de produção do objeto do conhecimento matemático.

Depois de sua manifestação, explicamos que na linguagem matemática a sua resposta poderia ser apresentada da seguinte forma: *Se* $g > b$*, e* $b = c$*, então* $g > c$. Ou seja, recorremos à apresentação de um princípio elementar da lógica formal.

Ao final da primeira etapa, Pedro fez o seguinte comentário:

***Pedro**: Já dá para analisar só pelas letras, mas antes eu não conseguia (antes de iniciar as atividades). O que era uma letra maior ou igual a outra, eu não sabia que a letra, nestes casos, era um número. Às vezes, no cursinho eles dizem, por exemplo,* $a + b = c$*. E eu pensava: será que eles estão falando grego? Para quem acabou de fazer o segundo grau em uma escola regular, tudo bem. Agora para quem fez supletivo, duvido.*

Essa etapa exigiu muito esforço intelectual de Pedro e foi consideravelmente demorada. Não nos preocupamos com o tempo, nesse momento, por considerarmos que as operações com conceitos algébricos são mais livres por não depender de uma expressão aritmética determinada e era nossa pretensão contribuir para o desenvolvimento da liberdade do pensamento do sujeito.

2 - Segunda etapa

A segunda etapa consistia em transformar as igualdades em desigualdades e as desigualdades em igualdades. Esta etapa contribuiu para significativamente com o processo de apropriação dos procedimentos de solução de equações.

2.1 - Primeiro estágio

A primeira situação de análise apresentada à Pedro nesse estágio foi: O segmento com medida a é maior que o segmento com medida b, o que podemos fazer para deixar esses dois segmentos com a mesma medida? Enquanto fizemos o questionamento anterior escrevemos na folha a seguinte desigualdade: $a > b$.

***Pedro**: - Não entendi.*

Pesquisadora: - Se a é maior que b e eu quero deixá-lo igual a b, eu tenho que fazer o que com a?

Pedro: *- Isolar?*

A resposta *isolar* indicava que Pedro não estava analisando a situação, era muito mais uma forma de "adivinhar" a solução utilizando uma linguagem inadequada adquirida na escola, porém não atribuindo significado algum.

Pesquisadora: - Analise o segmento com medida a e o segmento com medida b, o que eu posso fazer no segmento com medida a para que fique com a mesma medida do segmento com medida b?

Pedro: *- Tem que diminuir.*

Pesquisadora: - E aqui? ($a > b$)

Pedro: *- É a mesma coisa.*

Combinamos que essa determinada medida seria chamada de x, produzindo a igualdade: $a - x = b$.

Pesquisadora: - E se quisermos que o segmento de medida b fique igual ao segmento de medida a?

Pedro: *- Aí eu tenho que aumentar o b. Vai ficar* $a = b + x$.

Nossa interação com Pedro mediada pelo objeto de conhecimento é o elemento fundamental para que as idéias referentes àquela situação de aprendizagem fossem elaboradas. As dificuldades iniciais não foram prenúncios de algo que necessitaria de um trabalho exaustivo para a sua superação, pois a hipótese era de que se tratava apenas de usar uma comunicação adequada. Pedro já começava transitar em princípios próprios do pensamento algébrico como: igualdade, equivalência e cancelamento.

2.2 - Segundo estágio

O segundo estágio consiste em retornar as desigualdades em igualdades e as igualdades em desigualdades sem desfazer a alteração realizada anteriormente.

Apresentamos a Pedro a seguinte situação: Você transformou a desigualdade ($a > b$) na igualdade $a - x = b$. De que forma você poderia retornar à desigualdade sem mexer na alteração que você realizou?

Pedro: *- Diminuir* x *do* b *também. Por exemplo, se o* a *fosse 8 e o* b *fosse 7, tinha que diminuir 1 do 8 para que os dois ficassem 7. Como você queria que eu voltasse na desigualdade e os dois estavam iguais, eu tinha que diminuir do* b*, é como se eu diminuísse 1 do 7. E seria 7 > 6.*

O raciocínio de Pedro tem razão de ser na lógica que ele considerou, quando recorreu à exemplificação aritmética, estabelecendo valores para a, b e x. (8, 7 e 1, respectivamente). Observa-se que sua análise leva a uma desigualdade ao subtrair x, simultaneamente de a e b. Porém, a e b assumem valores menores, ou seja, passam a ser $a - x$ e $b - x$. No exemplo por ele apresentado, a era 8, passou a ser 7, e b, ao invés de 7, fica 6. A proposição *retornar à desigualdade sem mexer na alteração* requer que os valores a *e* b permaneçam, isto é, não sejam alterados. Isso exige que se estabeleça uma relação entre as duas relações formuladas anteriormente, $a > b$ (desigualdade) e a transformação $a - x = b$ (igualdade). Se a *e* b são pré-determinados, a forma de retorno para $a > b$, agora a partir de $a - x = b$ é adicionar x em ambos os membros da igualdade, ou seja, $a - x + x = b + x$.

Vale ressaltar que a explicação dada por Pedro também volta à *desigualdade*, mas não àquela inicial que gerou as relações que se estabeleceram, fruto da análise dos dois segmentos dados.

Nosso próximo questionamento foi:

Pesquisadora: - Como você resolveria o seguinte problema: (escrevemos na folha) "Se a + x > b, e a – x = b, então..."

Pedro*: então a e b são iguais, a = b.*

Mesmo usado a linguagem lógica, Pedro observa os dois segmentos para responder. Percebia que a > b, porém se equivocou no momento de expressar sua conclusão, afirmando que a = b. É notória nesse estágio a inter-relação entre as formas do pensamento visual-imaginativo e lógico-verbal. Lúria (1987) diz que o ensino é fator preponderante para que aconteça a passagem das formas ativo-visuais do pensamento prático pelas formas abstratas, ou seja, lógico-verbais.

Continuamos a propor outras ações e novos diálogos, pois ela nos respaldava para acreditar que no processo de ensino e apropriação dos conceitos científicos, os indivíduos, aos poucos, vão substituindo a forma visual-imaginativo pela lógico-verbal sem, no entanto, superar ou desprezar aquelas de vez.

A princípio, o pensamento opera com formas *ampliadas*, utiliza as operações ativo-visuais que haviam dominado até o momento. Pouco a pouco, vão se superando os limites anteriores e o sujeito se familiariza com as novas formas mais desenvolvidas, de abstração e generalização.

3 - Terceira etapa

A terceira etapa tinha como finalidade analisar as características numéricas (significação aritmética) dos segmentos de reta como caso particular das relações entre eles. Propomos a comparação dos segmentos de reta anteriores com um único segmento, a unidade (*u*).

Entregamos a Pedro um pedacinho de cartolina que media a unidade *u*. Pedro dividiu os segmentos em unidades (*u*), conforme segue na ilustração II.

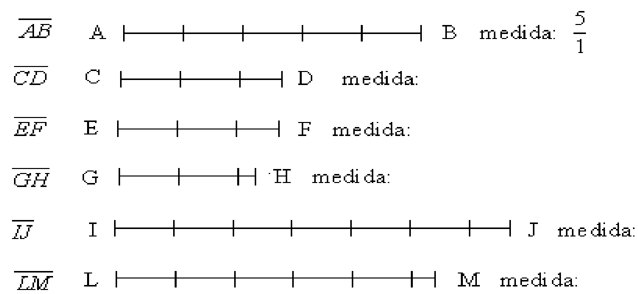

Ilustração II

Pedro*: - No segmento $\overline{AB}$ coube 5 vezes a unidade.*

Pesquisadora: - Supondo que a unidade mede um, no segmento $\overline{AB}$ coube 5 vezes o um?

Pedro*: - Sim.*

Pesquisadora: - Então, nós vamos representar essa medida assim: $\frac{5}{1}$

Pedro*: - Mas nos demais não deu certo.*

Pesquisadora: - Dos seis segmentos comparados apenas um foi possível ser medido com a unidade *u*. Qual a tua sugestão para que seja possível medir todos?

Pedro*: - Ou diminuir a unidade ou aumentar o segmento de reta.*

Pesquisadora: - De que forma você faria isso?

Pedro*: - Se eu aumentar a minha unidade para fechar no segundo, ela não vai fechar no primeiro e acho que nos outros também não. Então eu tenho que fazer uma unidade para medir cada segmento.*

As saídas encontradas por Pedro parecem revelar, à primeira vista, que são simples, no entanto, são dilemas similares ao que, por exemplo, os pitagóricos vivenciaram quando se defrontaram com tal problema da incomensurabilidade. O processo de aprendizagem, por ele vivenciado, oportunizava a manifestação de um pensamento elaborado e, concomitantemente, uma nova formação ao perceber que alguma incoerência se apresentava à sua compreensão, como pode ser identificado nas falas: *Ou diminuir a unidade ou aumentar o segmento de reta. Se eu aumentar a minha unidade para fechar no segundo, ela não vai fechar no primeiro e acho que nos outros também não. Então eu tenho que fazer uma unidade para medir cada segmento.*

As idéias emergem carregadas de significações conceituais numéricas de medidas, o que significa dizer que as atividades desenvolvidas atendiam às possibilidades intelectuais, não para deixá-lo no nível intelectual real, mas para lançar-se a novas elaborações.

Nossos questionamentos continuaram na perspectiva de superação da idéia de comensurabilidade.

Pesquisadora: - Nós vamos ter que encontrar uma alternativa que seja válida para todos os segmentos (silêncio). Se nós dividirmos a unidade em duas partes iguais, será que vai dar para medir todos?

Pedro: *- Podemos tentar.*

Essa segunda etapa está representada nos segmentos a seguir (Ilustração III) com os traços em vermelho.

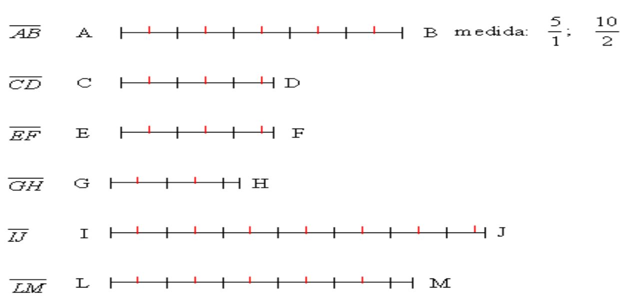

Ilustração III

Pedro iniciou a comparação entre a unidade e o segmento $\overline{AB}$, colocando ao lado a seguinte reposta: $\frac{10}{2}$. Isso ocorreu somente no segmento $\overline{AB}$ por ter um número exato de subdivisões. Os demais ficaram sem a devida escrita numérica, propiciando o desencadeamento de novos questionamentos.

Pesquisadora: - Por que vai ser $\frac{10}{2}$?

Pedro: *- Porque a minha unidade foi dividida em 2. E deu 10 pedacinhos.*

É de se destacar que Pedro adota a linguagem matemática, por nós estabelecida, com naturalidade. Sua desenvoltura com a escrita é algo produzido no seu processo de formação escolar mesmo com as falhas apontadas anteriormente. Contudo, há de se ressalvar que essa facilidade de comunicação matemática não traduz a interiorização do princípio fundamental caracterizador do conceito de número real com a significação de medidas. O foco ainda se volta para a relação entre grandezas comensuráveis, ou seja, para o teor numérico racional não periódico em detrimento do periódico e irracional.

Tal percepção fica evidente nos fragmentos do discurso a seguir, resultante da comparação de todos os segmentos com a unidade subdividida em duas partes iguais, quando o protagonista concluiu:

Pedro*: - Vamos ter que dividir por mais.*

Pesquisadora: - Por quanto.

Pedro*: - Sei lá, por cinco.*

Conforme segue, Pedro subdividiu a unidade em cinco partes iguais (Ilustração IV):

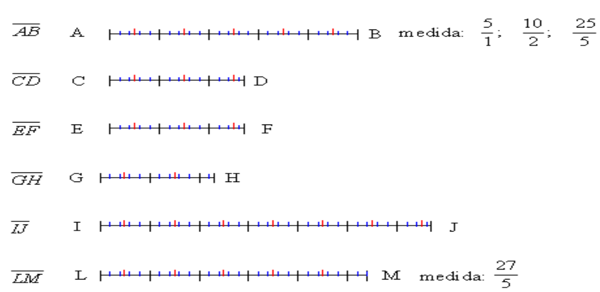

Ilustração IV

Novamente, observa-se que a escrita numérica só foi apresentada nos segmentos em que as subdivisões foram exatas. Por isso, a busca de elaborações do conceito de incomensurabilidade continuava.

Ao dividir a unidade em cinco partes e proceder à comparação com todos os segmentos, os casos de impossibilidades de medida exata ainda era maioria. Pedro sugeriu que aumentássemos as subdivisões. Questionamos em que número deveria subdividir a unidade, ele sugeriu que fosse por 10.

Pesquisadora: - Por que por 10?

Pedro*: - Porque quanto mais dividir a unidade mais vai dar certo. Então, vamos para dez de uma vez.*

Pesquisadora: - Se esse é o critério, pode ser por 15.

Pedro: *- Não porque a nossa unidade é muito pequena para fazer 15 riscos.*

Os segmentos como situação de análise passam a ser um fator limitante para a elaboração da idéia de infinitamente pequeno. A sua característica física leva a pensar, por exemplo, que é impossível segmentar a unidade em quinze partes, por não haver espaço para o traço vertical demarcatório dos intervalos. O conceito em elaboração, por Pedro, ainda está carregado de significações do conhecimento cotidiano, cuja ênfase está nas relações com características físicas. Com isso, queremos dizer que a nossa preocupação era com a formação do conceito de número não desvinculado do contexto, mas que considere sua existência para ressignificá-lo com as idéias básicas do conhecimento teórico. Ou seja, a expectativa era de que Pedro estabelecesse um diálogo entre o conhecimento adquirido no passado com seu futuro.

As interlocuções revelavam as possibilidades de Pedro para a elaboração das idéias de número como medida, porém com a necessidade de apoio da pesquisadora. Parafraseando Vygotski (2000) as ações partilhadas num determinado momento passam a ser realizadas, posteriormente, pelo sujeito que está aprendendo.

Continuamos com nossas discussões e interferências, evitando uma rotina de perguntas e respostas, para que Pedro chegasse à descoberta ou apresentasse uma saída para o problema que se apresentava. Pelo contrário, o princípio histórico-cultural nos respaldava, alertando de que a elaboração do pensamento se processa na comunicação em que o professor desempenha um papel fundamental ao fazer aflorar as significações e os princípios de um determinado conceito.

Várias hipóteses (característica do pensamento algébrico) foram levantadas para subdividir a unidade, contribuindo para que Pedro concluísse que quanto maior for o número de subdivisões mais preciso será o valor numérico que representa a medida.

Sendo ainda mais incisivos em nossas mediações, dissemos a Pedro que a unidade media um centímetro. Como sua proposição era de que a unidade fosse subdividida em 10 partes, sugerimos a ele que utilizasse a régua em vez da cartolina. O referido instrumento de medida, criado historicamente pela humanidade, dispensava aquele trabalho até então realizado nas atividades anteriores. Acatando a sugestão, ele passou a medir os segmentos e fez as representações numéricas escritas que seguem (Ilustração V):

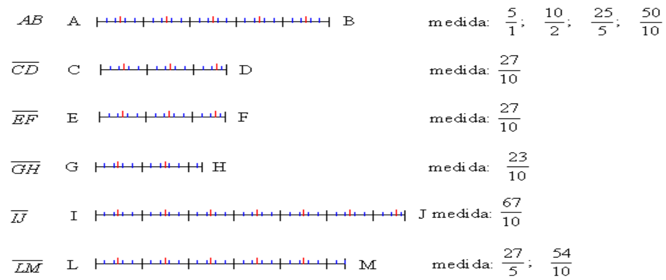

Ilustração V

Dessa forma, foi possível medir todos os segmentos. Porém, esclarecemos a Pedro que esse método de subdividir a unidade é válido para medidas da realidade física, mas que não dá conta de alguns problemas teóricos de medida. O exemplo é a possibilidade de cortarmos um fio de um metro em três partes iguais, o mesmo não ocorre ao dividirmos numericamente 100 cm (1 metro linear) pela mesma quantidade de partes.

3.2 - Segundo estágio.

Sugerimos que Pedro localizasse numa reta numérica os números encontrados. Ele traçou um segmento de reta com 14 unidades que desencadeou o seguinte diálogo:

Pesquisadora: - Quantas unidades têm uma reta?

Pedro*: - Têm muitas só que eu não vou conseguir fazer todas em uma folha.*

Pesquisadora: - E se fossem várias folhas?

Pedro*: - Mesmo que eu fique a vida inteira fazendo eu não vou terminar.*

Pesquisadora: - Para que sentido você iria aumentar a reta?

Pedro*: - Para qualquer lado.*

Nas falas anteriores há explicitação das noções intuitivas de infinito.

Pesquisadora: - Coloque os números nas unidades desse segmento de reta que você fez.

Surgiu o questionamento:

Pedro*: - Por qual número começo? A gente começa a contar do um... Ah, tá! Começa do zero.*

A prática da contagem se constituiu em uma dificuldade para a localização dos números na reta numérica. Pedro enumerou o segmento de reta do 0 ao 14. Solicitamos que ele aumentasse para os dois lados. Foi uma oportunidade para levar a noção de número relativo e de infinito do tipo numerável contínuo. O processo de construção da reta tinha a intenção de propor que Pedro localizasse os números encontrados na atividade de medida realizada anteriormente. Aos concluir essa etapa solicitamos a Pedro que também localizasse os números opostos, conforme seque na ilustração VI:

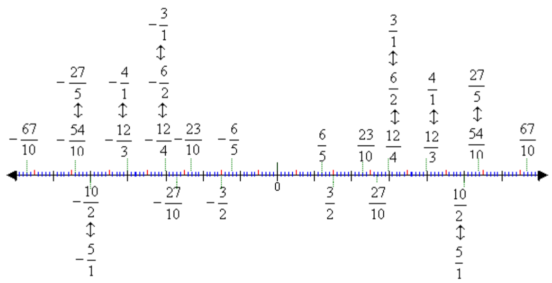

Ilustração VI

A localização dos números na reta numérica foi marcada por muitos erros, exigindo interferência com informações, explicitação de idéias conceituais e questionamentos. Só assim Pedro analisava os erros e trazia à tona alguns equívocos adquiridos na experiência escolar.

Pedro*: - Eu não estou conseguindo localizar na reta porque, por exemplo, se fosse uma barra de chocolate e eu dividisse em três partes iguais, uma parte seria um terço, duas partes seria dois terços, três partes seria três terços. Mas aqui na reta isso não fecha.*

Pesquisadora: - Quando você fala em uma barra de chocolate, você está considerando unidades inteiras, mas os segmentos de reta não medem apenas unidades inteiras.

Pedro*: - É que eu tinha parado de pensar nos segmentos.*

A experiência empírica com o conceito de número, obtida pela prática da contagem ou do estudo das frações com divisões de chocolates dificultou a compreensão das propriedades lógicas do conceito teórico de número. Davydov (1982) argumenta que a causa dessas dificuldades está no valor dado à natureza empírica do conhecimento matemático – transportado para o processo ensino-aprendizagem – em detrimento à natureza teórica.

4 - Quarta etapa

A quarta etapa consistia em transformar as igualdades em desigualdades e as desigualdades em igualdades utilizando os sinais de *adição* e *subtração*, operando com os valores numéricos, ao mesmo tempo, recorrendo ao princípio de equivalência das igualdades para a solução de equações.

Apresentamos problemas do tipo: *quanto deve ser acrescentado ao segmento*

$\overline{GH}$ para que fique com a mesma medida de $\overline{AB}$?

Pedro: Bom, d + x = a, substituindo vai ser $\frac{23}{10} + x = \frac{50}{10} \rightarrow \frac{23}{10} - \frac{23}{10} + x = \frac{50}{10} - \frac{23}{10} \rightarrow$ $x = \frac{50}{10} - \frac{23}{10} \rightarrow x = \frac{27}{10}$.

Ao encontrar o valor da incógnita foi conferir nos segmentos e concluiu que estava correto. O processo apresentado anteriormente, por Pedro com a nossa orientação, para resolver a equação foi sendo elaborado durante as atividades, não apresentando maiores dificuldades. Em todas as situações problema dessa etapa, quando se referia aos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{LM}$, ele utilizava os valores: $\frac{50}{10}$ e $\frac{54}{10}$. Quando questionamos por que não utilizava os outros números em que a unidade foi subdividida em dois ou em cinco, respondeu: *Por isso mesmo, porque a unidade foi subdividida por outros valores*.

As manifestações orais e os procedimentos adotados traziam evidências de que Pedro apreendeu algumas importantes propriedades lógicas do conceito de número. Entretanto, mais uma vez, na ilusão de que a resposta seria correta, apresentamos uma situação descontextualizada da atividade: Os números, $\frac{3}{2}$ e $\frac{6}{5}$, são iguais?

***Pedro**: Não o $\frac{6}{5}$ é maior.*

Pesquisadora: Por que você acha que $\frac{6}{5}$ é maior?

***Pedro**: Porque 3 é menor que 6, e ... bom, deixa eu olhar na reta numérica.*

Localizou os dois números na reta numérica e concluiu que estava equivocado.

Uma análise detida do processo vivido por Pedro no desenvolvimento das atividades desse estudo pode ir muito mais além das percepções que elucidamos. No entanto, os fragmentos de suas manifestações são prenúncios das possibilidades de elaboração do conceito de número com evidência para a significação de medida. É destacável que a formação desse conceito não é tão simples, mas não é impossível como os seus professores indicavam ao julgá-lo inapto para aprendizagem da matemática. É possível observar que suas falas são eminentemente matemáticas. Elas trazem em seu teor uma complexidade de conceitos em termos estruturais. Um conceito nunca está isolado ou solto, mas articulado com outros ou no sistema no qual ele se insere.

Considerações finais

Durante o desenvolvimento de todas as atividades, as convicções oriundas dos bancos escolares ou das atividades espontâneas não foram desprezadas pelo estudante. Elas estiveram ali presentes, como diz Davydov (1982) e Vigotski (1996), obstaculizando o desenvolvimento do pensamento teórico, pois a "experiência primeira" do sujeito referente ao conceito teve sua base pedagógica e epistemológica exclusivamente empírica, como por exemplo:

- A representação de frações apenas em subdivisões de unidades físicas ou desenhos (chocolates, pizzas ...), gerando dificuldade a elaboração dos números, não inteiros, maiores do que um na reta numérica;
- A prática da contagem de coleções de objetos que também dificultou a localização dos números na reta numérica no que se refere ao ponto de partida, (do zero ou do um). Afinal, não fazia sentido para Pedro contar zero objeto.

As experiências anteriores do sujeito que se apresentavam como obstáculos, não foram usadas como subterfúgios e indicadores da incapacidade intelectual para aprendizagem da matemática, mais especificamente, do sistema conceitual de número. Ao contrário, elas foram reveladoras de zonas de possibilidades para que fossem propostas atividades de forma concreta e contextualizada com elementos conceituais traduzidos nas interlocuções pesquisadora/pesquisado. O concreto foi o pensado, entendido na lógica do conceito teórico de número (medida de segmentos de reta). Dessa forma, existiu uma inter-relação dos três campos matemáticos (aritmética, geometria e álgebra) manifestadas pelo sujeito ao: medir segmentos: admitir a existência da incomensurabilidade; proceder contagem e expressar em linguagem aritmética; traduzir situações de medidas para equações de primeiro grau; adotar explicações com base no pensamento proporcional, transitivo e equivalente; entre outros.

Os pensamentos aritmético, geométrico e algébrico possuem, cada um, características próprias, mas as suas especificidades contribuem para o desenvolvimento um do outro. Nesse movimento, o conceito de número não perde sua unidade, mas revela sua verdadeira natureza. A inter-relação desses três campos matemáticos contribuiu para que Pedro percebesse a diferença entre o abstrato e o concreto e passasse a estabelecer, aos poucos, um diálogo com base em noções abstratas do conceito de número, em sua especificidade, a idéia de medida. Há, pois, uma riqueza de articulações possíveis com outros conceitos, constituindo um sistema conceitual abrangendo os diversos ramos da matemática: número, operações, proporcionalidade, infinito, equações, reta, segmento, entre tantos. Enfim, a experiência em foco trouxe evidências de que Pedro tem condições humanas para aprender matemática. Seu estigma de inaptidão é conseqüência da estrutura do processo educacional formal em detrimento de suas reais possibilidades.

Referências

CARAÇA, Bento de Jesus. *Conceitos fundamentais da Matemática*. 1. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa editora, 1984. 316p

DAMAZIO, Ademir. *O desenvolvimento de conceitos matemáticos no contexto do processo Extrativo de Carvão***.** Florianópolis, 2000. 196p. Doutorado em Educação. UFSC.

DAVÍDOV, Vasili. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In: *La psicología Evolutiva y pedagógica en la URSS*. Moscú, Progresso. 1987 p. 143-155.

_____. *Tipos de generalización en la enseñanza***.** 3ª ed. Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1982. 485p

JARDINETTI, José Roberto Boettger. Abstrato e o concreto no ensino da matemática: algumas reflexões. *Bolema***,** Rio Claro – SP, ano 11, nº 12, p. 45 - 57, 1996.

LEONTIEV, Alexis. *O Desenvolvimento do Psiquismo*. Lisboa: Livros Horizonte, 1978. 356 p.

LÚRIA, Alexander Romanovich. *Desarrollo Histórico de los Processos Cognitivos***,** 1 ed. Madrid: Ediciones Akal, 1987. 192p.

VIGOTSKI, Lev Semenovich. *A construção do pensamento e da linguagem***.** 1ª ed. Trad. Paulo Bezerra. São Paulo: Martins Fontes, 2000. 496p.

_____. *Obras Escogidas IV: Incluye Paidología del adolescente problemas de la psicología infantil*. Madrid: Visor Distribuciones, 1996.

_____. *Obras Escogidas IV: Incluye Pensamiento y Lenguaje, Conferencias sobre Psicología*. Madrid: Visor Distribuciones, 1993.