Intuições de alunos do 9º ano em probabilidade condicionada no contexto de extração de bolas de um saco[1]

Intuitions of 9th grade pupils in conditional probability in the context of drawing balls of a bag

---

PAULO FERREIRA CORREIA[2]
JOSÉ ANTÓNIO FERNANDES[3]

Resumo

Neste texto apresentam-se alguns resultados de um estudo centrado nas ideias intuitivas de probabilidade condicionada de alunos do 9º ano de escolaridade. Participaram no estudo 310 alunos portugueses do 9º ano de escolaridade (com idade de 14 anos), a quem foi aplicado um questionário com várias tarefas sobre probabilidade condicionada e independência, sendo aqui apenas exploradas algumas das que envolvem probabilidade condicionada. Em termos de resultados, estudadas as respostas, justificações e erros cometidos pelos alunos, salienta-se que as resoluções dos alunos revelam que eles possuem ideias intuitivas sobre o conceito de probabilidade condicionada no contexto de extração de bolas de um saco.
Palavras-chave: *Intuições; probabilidade condicionada; alunos do 9º ano.*

Abstract
This paper aims at describing some results of a study about intuitive ideas of conditional probability of pupils attending the 9th grade. In the study participated 310 Portuguese pupils of the 9th grade (aged 14 years), who answered a questionnaire with several tasks on conditional probability and independence. In this paper we explore just some of the tasks that involve conditional probability. In general, after studied the responses, justifications, and mistakes made by students, the pupils' resolutions show that they have intuitive ideas about the concept of conditional probability in the context of drawing balls of a bag.
Keywords*: Intuitions; conditional probability; 9th grade pupils.*

1. Introdução

Enquanto a relevância da Estatística não é discutida, sendo consensualmente reconhecida a sua importância, as Probabilidades assumem um lugar mais ambivalente. A sua redução à conceção clássica, sobretudo baseada na Combinatória, e a perceção como disciplina com conexões com a matemática mais avançada, são, por vezes, usadas como argumentos para abandonar as Probabilidades em favor da Estatística

---

[1] Este trabalho contou com o apoio de Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do projeto PEst-OE/CED/UI1661/2014 do CIEd-UM.
[2] Escola Secundária/3 de Barcelos, Portugal – ferreiracorreiapaulo@gmail.com
[3] Universidade do Minho, Portugal – jfernandes@ie.uminho.pt

(BOROVCNIK; KAPADIA, 2010) e para a sua introdução apenas em níveis mais avançados da escolarização dos alunos.

Contudo, a importância do tema, como constituinte de um saber instrumental noutras disciplinas, como conhecimento necessário em diversas profissões e pela sua intervenção na tomada de decisões (GAL, 2005), tem-se refletido na necessidade de aprofundar o seu ensino, tendo sido recentemente incluído nos primeiros anos de escolaridade dos programas escolares de muitos países. Na opinião de Falk, Falk e Levin (1980), os conceitos probabilísticos podem ser introduzidos nos primeiros níveis de ensino e a orientação determinista na instrução das crianças mais jovens deve ser atenuada com a aprendizagem de conceitos relacionados com a incerteza logo desde o início da sua escolarização (FISCHBEIN, 1975).

É assim que, segundo Batanero e Díaz (2010), conteúdos de probabilidades e estatística têm sido incluídos nos currículos escolares desde o primeiro ano de escolaridade em países como Austrália, Brasil, África do Sul, Emiratos Árabes Unidos e Estados Unidos da América. Para estes autores, a crescente procura social da educação estatística decorre de vários fatores, nomeadamente da maior atenção dada às questões do ensino pelo International Statistical Institute (ISI), do frequente uso de informação quantitativa nos meios de comunicação social e do uso generalizado de computadores pessoais.

Em Portugal, tal como noutros países, com a introdução do novo Programa de Matemática do Ensino Básico[4] (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2007) verifica-se um reforço do tema Organização e Tratamento de Dados em todos os ciclos, que inclui o estudo das Probabilidades e da Estatística. Contudo, este aprofundamento acontece mais em relação à Estatística do que às Probabilidades. Efetivamente, nas Probabilidades, e no que respeita aos tópicos a abordar, mantém-se essencialmente o que estava contemplado no programa anterior.

No que respeita ao tópico Probabilidade Condicionada, embora ele seja abordado apenas no ensino secundário, são vários os estudos (e.g., JONES; LANGRALL; THORNTON; MOGILL, 1999; TARR; LANNIN, 2005; TARR, 1997; TARR; JONES, 1997; WATSON, 1995) que referem que ele é de facto apropriado para o currículo de

[4] O ensino básico em Portugal é constituído pelos primeiros nove anos de escolaridade, distribuídos por três ciclos (1º ciclo: do 1º ao 4º ano, 2º ciclo: do 5º ao 6º ano e 3º ciclo: do 7º ao 9º ano), seguindo-se o ensino secundário constituído pelos três seguintes anos de escolaridade (10º, 11º e 12º anos).

matemática do ensino básico. Segundo Tarr (1997), a aprendizagem dos conceitos de probabilidade condicionada e independência não precisa de ser adiada até que os estudantes tenham desenvolvido destrezas robustas na comparação de frações, devendo a abordagem destes conceitos ser efetuada de uma forma intuitiva (WATSON, 1995).

Para Watson (1995) introduzir mais cedo a probabilidade condicionada no currículo do 3º ciclo e secundário é útil para desenvolver o uso de linguagem e para interpretar situações condicionadas com origem exterior à matemática. A probabilidade condicionada pode ser revisada e usada para dar sentido ao conceito de independência de acontecimentos e para interpretar dados apresentados em tabelas de dupla entrada.

No estudo realizado por Correia, Fernandes e Contreras (2011), sobre as intuições em probabilidade condicionada de 229 alunos do 9º ano de escolaridade, os resultados obtidos revelaram-se encorajadores quanto à possibilidade de introduzir o estudo deste conceito no 9º ano, pelo menos quando a informação é fornecida através de tabelas simples ou de dupla entrada, como aconteceu nesse trabalho. Também os resultados da investigação realizada por Tarr (1997) sobre probabilidade condicionada e independência, com alunos do 5º ano, suportam a ideia de que estes tópicos são realmente apropriados para o currículo de matemática do ensino básico.

Embora exista investigação substancial sobre o pensamento probabilístico de alunos do 3º ciclo, pouca dessa investigação se tem centrado no pensamento de estudantes em probabilidade condicionada. Esta ausência de investigação sobre o pensamento dos estudantes neste conceito é uma questão preocupante, dada a importância crescente que lhe é atribuída no ensino de Probabilidades no 3º ciclo (TARR; JONES, 1997). Reforçando esta perspetiva, Watson e Kelly (2007) referem que o estudo dos erros em probabilidade condicionada tem despertado o interesse dos psicólogos, enquanto o estudo do desenvolvimento do raciocínio condicional dos estudantes tem recebido pouca atenção. No caso dos erros, Shaughnessy (1992) salienta a importância de desenvolver investigação dirigida à alteração de crenças e ideias erradas dos estudantes em probabilidade condicionada. Na opinião do autor, as ideias erradas em probabilidade condicionada podem estar fortemente relacionadas com a compreensão dos estudantes acerca de acontecimentos independentes e de aleatoriedade.

Na presente investigação estudam-se as ideias intuitivas de alunos do 9º ano sobre probabilidade condicionada no contexto de extração de bolas de um saco, com e sem reposição. Ora a existência dessas ideias, conjuntamente com os resultados obtidos por Correia et al. (2011) no contexto de tabelas simples ou de dupla entrada, antes referidos, contribuirão para consolidar as possibilidades de ampliar o estudo do tema de Probabilidades no ensino básico, de modo a incluir também o conceito de probabilidade condicionada.

2. Enquadramento Teórico

2.1. Marco teórico

A matemática tem-se apoiado nas intuições desde os primeiros tempos da sua história. As intuições têm desempenhado, ao longo dos tempos, um lugar de destaque na criação matemática e na própria validação desse conhecimento. Neste último caso, é bem ilustrativo o princípio da indução matemática cuja validade assenta numa base intuitiva.

Numa perspetiva psicopedagógica, para Fischbein (1987) a atividade mental apenas é possível na medida em que confiamos automaticamente em factos existentes, objetivos e inquestionáveis, tal como acontece na atividade do dia a dia. Em consequência, uma intuição é uma ideia que possui as propriedades fundamentais de uma realidade concreta e objetivamente dada: a imediaticidade, que significa evidência intrínseca, e a certeza, que significa, não a certeza formal convencional, mas a certeza imanente, significativamente prática. Perspetivando as intuições como parte integrante da atividade regular de pensamento, Fischbein (1987) afirma que:

> durante um processo de raciocínio, temos de acreditar – pelo menos temporariamente (mas absolutamente) – nas nossas representações, interpretações ou soluções momentâneas, de outro modo o nosso fluxo de pensamentos paralisaria. É a este tipo de crença que chamamos intuição. Crenças cognitivas, elaboradas e confirmadas repetidamente pela prática, podem adquirir um carácter axiomático." (Fischbein, 1987, p. 28).

Para Fischbein (1987), as cognições intuitivas possuem um conjunto de características gerais que as distinguem de outros tipos de cognições, nomeadamente, a auto-evidência, a certeza intrínseca, a persistência, a coercividade, a condição teórica, a extrapolação, a globalidade e a natureza implícita (FISCHBEIN, 1987).

Em relação à origem das intuições, Fischbein (1987) classifica-as em primárias e secundárias. As intuições primárias "referem-se àquelas crenças cognitivas que se desenvolvem nos indivíduos independentemente de qualquer instrução sistemática e em resultado da sua experiência pessoal" (FISCHBEIN, 1987, p. 64). Na perspetiva de Piaget, estas intuições podem classificar-se, ainda, em pré-operacionais e operacionais. Porém, considerando que, na terminologia de Piaget, a palavra intuição se refere a tudo o que não é formal, Fischbein advoga que existem cognições operacionais que não são intuitivas e que as intuições não desaparecem no estádio das operações formais.

Já as intuições secundárias pressupõem a possibilidade de podermos desenvolver novas intuições com origem não natural, como acontece com o ensino formal. Estas intuições não resultam da experiência normal e natural do indivíduo e, frequentemente, contradizem as intuições primárias em relação à mesma questão. Referindo-se ao princípio da inércia, de difícil aceitação natural, Fischbein afirma que se uma "interpretação puder transformar-se de uma conceção aprendida numa crença, então podemos referimo-nos a ela como uma intuição secundária" (FISCHBEIN, 1987, p. 68).

As intuições estão longe de constituírem um critério seguro de verdade, podendo conduzir a respostas corretas ou erradas. No caso das Probabilidades, Fischbein (1975) constatou que alunos de diferentes faixas etárias, que não tinham estudado Probabilidades na escola, revelaram intuições corretas sobre o conceito de acaso, a quantificação do acaso como relação entre o número de resultados favoráveis e o número de resultados possíveis, a atribuição do valor 1 à probabilidade do acontecimento certo e do valor 0 à probabilidade do acontecimento impossível e que a probabilidade da reunião de acontecimentos mutuamente exclusivos é dada pela soma das probabilidades dos acontecimentos. Constatou-se, assim, que a definição clássica de probabilidade e os axiomas da teoria de probabilidades têm uma origem intuitiva. Já no caso da adição e multiplicação de probabilidades, em experiências compostas, observou-se uma quase total incompreensão do carácter composto destes acontecimentos e de inventariação das diferentes situações que constituem o mesmo acontecimento.

Adotando a perspetiva de Fischbein (1975, 1987), o estudo aqui apresentado centra-se no estudo das intuições primárias dos alunos sobre o conceito de probabilidade condicionada uma vez que os alunos não tinham estudado este conceito na escola. Assim, trata-se de averiguar e estudar as ideias desenvolvidas pelos alunos em contextos informais e em resultado da sua experiência espontânea sobre este conceito.

2.2. Investigação prévia

Para Spinillo (2002) o raciocínio proporcional envolve basicamente dois tipos de relações: relações de primeira ordem e relações de segunda ordem. Suponhamos que pedimos a uma criança que decida em qual de dois sacos A e B, ambos com fichas de duas cores (respetivamente, 3 azuis e 5 amarelas e 3 azuis e 3 amarelas), há maior proporção de fichas azuis. Nesta tarefa, as relações de primeira ordem (em cada saco) podiam ser estabelecidas de duas maneiras: (i) entre o número de fichas azuis e o número total de fichas (relação parte-todo); e (ii) entre o número de fichas azuis e o número de fichas amarelas (relação parte-parte). Estabelecidas as relações de primeira ordem, a criança precisa de as comparar para decidir em qual dos sacos há uma maior proporção de fichas azuis. Esta comparação entre as relações de primeira ordem constitui a relação de segunda ordem.

Além das relações parte-parte e parte-todo, no presente estudo introduzimos a relação "todo-todo" para designar as comparações estabelecidas entre o número total de elementos de um conjunto antes e após a extração com e sem reposição de um elemento desse conjunto.

Segundo Shaughnessy (1992), algumas crianças predizem o acontecimento mais frequentemente observado não atendendo à proporção da população. Por exemplo, se considerarmos uma caixa A com 3 berlindes pretos e 1 branco e uma caixa B com 6 berlindes pretos e 2 brancos, e perguntarmos a uma criança se teria a mesma *chance* ou *chances* diferentes de extrair um berlinde preto de cada uma das caixas A e B, normalmente responderia que tinha maior *chance* de extrair um berlinde preto da caixa B (PIAGET; INHELDER, 1951).

Na opinião de Tarr e Lannin (2005) os julgamentos em probabilidade condicionada requerem a habilidade para fazer comparações probabilísticas. A este respeito, há evidências contraditórias que documentam as destrezas dos estudantes do 3º ciclo para efetuarem corretamente comparações probabilísticas. Piaget e Inhelder (1951) concluíram que as crianças que carecem de compreensão de relações parte-todo revelam dificuldades na comparação de probabilidades de diferentes acontecimentos.

Outros autores identificaram várias estratégias que permitiram aos estudantes efetuar comparações probabilísticas sem recorrer a números racionais e sem atribuir probabilidades numéricas. Utilizando vantagens (*odds*) ou outra comparação parte-parte, os estudantes dos estudos de Falk (1993) e Green (1983) foram capazes de comparar a probabilidade de dois acontecimentos, o que sugere que os estudantes não necessitam de alcançar o estádio das operações formais para serem capazes de efetuar com sucesso comparações probabilísticas (TARR; LANNIN, 2005).

Num estudo com 26 estudantes do 5º ano, Tarr (1997) observou que, antes de um programa de instrução, os estudantes começaram por utilizar mais comparações parte-parte do que comparações parte-todo quando faziam julgamentos sobre probabilidades condicionadas. Na opinião do autor, se bem que as comparações parte-parte permitem a muitos alunos do nível 2 (nível transicional da hierarquia de quatro níveis da estrutura de Tarr e Jones (1997)) perceberem que a probabilidade de alguns acontecimentos se altera em situações de não reposição, tais estratégias limitam, muitas vezes, os estudantes no reconhecimento de que a probabilidade de todos os acontecimentos se altera nas situações em que não há reposição. Em consequência, durante a instrução foi enfatizada a determinação pelos alunos do número total de resultados do espaço amostral, uma vez que o número total de objetos é essencial para efetuar comparações parte-todo, tendo os alunos começado a fazer comparações parte-todo após a aprendizagem de atribuição de probabilidades numéricas.

Por outro lado, verificou-se que na falta de uma forma standard para representar a probabilidade de um acontecimento, os estudantes foram capazes de usar formas alternativas para determinar e comparar probabilidades. Algumas dessas representações inventadas estavam associadas a comparações parte-parte, enquanto outras estavam associadas a comparações parte-todo e outras a representações idiossincráticas. Em particular, Tarr (1997) refere quatro formas inventadas de representações probabilísticas nas tarefas de probabilidade condicionada, três delas exibidas antes da instrução e uma durante a instrução.

1. Os estudantes descrevem a probabilidade de um acontecimento usando a termo *chance* como unidade de medida da probabilidade. Mais do que identificar o número total de objetos (10, em que 4 caramelos são de uva, 3 de cereja, 2 de maçã e 1 de limão) quando atribuem probabilidades numéricas a vários acontecimentos, estes estudantes consideram cada objeto como unidade de *chance*. A estratégia centra-se na comparação parte-parte, em particular no número de objetos do acontecimento e do seu complementar. Por exemplo, na descrição da probabilidade condicionada quando um caramelo de uva é retirado sem reposição, os estudantes podem referir: "Extraindo um caramelo de uva, há menos uma *chance* porque foi retirado um caramelo de uva. O caramelo de limão aumenta uma *chance* porque foi retirado um caramelo de uva" (TARR; LANNIN, 2005, p. 226).

2. Os estudantes recorrem a frequências relativas, razões ou alguma forma de vantagens para descrever a probabilidade de um acontecimento. Essencialmente, estes estudantes fazem comparações parte-parte para determinar se a probabilidade de um acontecimento foi ou não alterada. Além disso, controlam as quantidades associadas aos acontecimentos no espaço amostral e prestam atenção, por exemplo, a quando é que o

número de caramelos de uva deixa de exceder o número de caramelos de cereja. Por exemplo, os estudantes que adotam esta representação argumentarão que a probabilidade de selecionar um caramelo de uva na segunda extração se alterou porque "havia mais caramelos de uva do que caramelos de cereja e agora há igual número de cada um deles" (TARR; LANNIN, 2005, p. 226).

3. Os estudantes comparam o número de maneiras de ocorrência do acontecimento pretendido com o número total de resultados possíveis, mas não de uma forma convencional. Por exemplo, eles podem descrever a probabilidade de selecionar um caramelo de limão como "uma de dez hipóteses" antes da extração sem reposição de um caramelo de uva, e depois como "uma de nove hipóteses" (TARR; LANNIN, 2005, p. 226). No entanto, esta utilização de probabilidades numéricas estava limitada a contextos em que o espaço amostral incluía apenas dois acontecimentos. Diferentemente, quando o espaço amostral compreendia mais do que dois acontecimentos, estes estudantes pareciam incapazes de descrever as probabilidades dos acontecimentos.

4. Na avaliação pós-instrução, alguns alunos combinaram o uso de percentagens e razões para criar uma forma "híbrida" de probabilidade numérica. Por exemplo, estes alunos podiam descrever (incorretamente) a probabilidade de extração de um caramelo de maçã, após a extração sem reposição de um caramelo de uva, como "20% de 90%" uma vez que 10% do espaço amostral tinha sido retirado.

Fischbein e Gazit (1984) numa experiência de ensino sobre probabilidade condicionada, envolvendo 285 estudantes do 5º, 6º e 7º ano de escolaridade, concluíram que na determinação de probabilidades condicionadas, em situações com e sem reposição, a percentagem de respostas corretas, em geral, foi mais baixa nas situações sem reposição. No 5º ano, aproximadamente 24% dos alunos determinou corretamente probabilidades condicionadas em ambas as situações; no 6º ano, a percentagem de respostas corretas em tarefas com reposição foi de 63% e em tarefas sem reposição foi de 43%; e no 7º ano, a percentagem de respostas corretas em tarefas com reposição foi de 89% e em tarefas sem reposição foi de 71%.

Num estudo posterior, Correia e Fernandes (2012) verificaram que, numa tarefa envolvendo a comparação de probabilidades na extração sucessiva de duas bolas de dois sacos com quantidades proporcionais de bolas brancas e pretas, com e sem reposição, alunos do 9º ano possuem ideias intuitivas sobre os conceitos de probabilidade condicionada, tendo-se obtido percentagens de respostas corretas superiores no caso dos itens com reposição do que no caso dos itens sem reposição, respetivamente 67 % e 48%, corroborando-se assim os resultados obtidos por Fischbein e Gazit (1984). Além disso, embora estes alunos já tivessem aprendido a definição clássica de probabilidade, eles estabeleceram predominantemente relações do tipo *parte-parte*, o que enfatiza a persistência das suas ideias para além do ensino (FERNANDES, 1990).

Com base numa ampla revisão de literatura sobre a compreensão de conceitos probabilísticos, focada em alunos do 6º ao 9º ano, Watson (2005) concluiu que, geralmente, os alunos são capazes de apreciar a incerteza e o propósito das tarefas que lhes são propostas, enquanto raciocínios sofisticados envolvendo raciocínio proporcional, independência e espaços amostrais complexos são difíceis para a maioria destes alunos. Contudo, mesmo neste último caso, a autora conjetura que a situação pode melhorar com a introdução, em muitos países, do ensino de Probabilidades no currículo de matemática deste nível de ensino, o que não acontecia aquando das investigações analisadas no seu estudo.

No que respeita às dificuldades em probabilidades, Ahlgren e Garfield (1991) referem que estimativas informais de probabilidade apoiadas na experiência são muitas vezes fortemente influenciadas por aspetos não científicos. Por exemplo, os autores referem que as pessoas recorrem com muita facilidade ao que é mais fácil de lembrar, à informação fornecida pelas suas preconceções, ao que parece especial em circunstâncias atuais e à preferência por um certo resultado, o que as leva a ignorar influências contraditórias e a exagerar outras. Devemos ter cuidado com esta tendência, quer nos outros quer em nós próprios, porque ela pode distorcer os nossos julgamentos acerca de um grupo de "situações similares".

No caso específico de probabilidade condicionada, Pollatsek, Well, Konold e Hardiman (1987) verificaram que os alunos confundem $P(A|B)$ com $P(A \cap B)$, isto é, não distinguem claramente os significados da probabilidade condicional e da probabilidade conjunta, confusão que se torna particularmente evidente aquando da interpretação de enunciados de problemas que impliquem a identificação destas probabilidades. Esta dificuldade também foi observada em alunos do 9º ano de escolaridade, com percentagens de erro a variar entre os 3% e os 8% na globalidade das questões apresentadas na investigação de Correia et al. (2011).

Falk (1986) verificou também que muitos alunos não discriminam entre uma probabilidade condicionada e a sua transposta, isto é, entre as duas probabilidades

$P(A|B)$ e $P(B|A)$, erro que designou por *falácia da condicional transposta*. No estudo de Correia et al. (2011), antes referido, verificou-se que os alunos do 9º ano aderiram a este erro com percentagens entre os 2% e os 7% na globalidade das questões apresentadas.

3. Método

No presente estudo pretendeu-se, fundamentalmente, avaliar as ideias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade acerca da probabilidade condicionada no contexto de extração sucessiva, com e sem reposição, de duas bolas de um saco.

Participaram no estudo 310 alunos do 9º ano de escolaridade, designados por A_i, com $1 \leq i \leq 310$, pertencentes a quatro escolas do Litoral Norte de Portugal, duas inseridas em meio urbano e duas em meio rural. As idades dos alunos variavam entre os 13 e os 17 anos, com 14 anos de média de idades (que é a idade normal de frequência do 9º ano); 51% dos alunos eram do sexo feminino e 49% do sexo masculino; as suas classificações na disciplina de Matemática, no final do 8º ano, numa escala de 1 a 5, variavam entre 2 e 5, com uma média de 3,1; e 79% dos alunos não tinham qualquer repetência.

A recolha de dados foi efetuada através de um questionário que, para além de algumas questões centradas na aquisição de informação pessoal, incluía várias questões sobre probabilidades, das quais trataremos neste texto apenas duas que envolvem o conceito de probabilidade condicionada. Neste estudo considera-se a definição de probabilidade condicionada decorrente da restrição do espaço amostral. Nesta perspetiva, a probabilidade condicionada de um acontecimento A dado que ocorreu o acontecimento B, ou seja, $P(A|B)$, é a probabilidade de A considerando apenas os resultados possíveis da experiência aleatória que são elementos de B. Isto é, a probabilidade do acontecimento A é avaliada nas condições de um novo espaço amostral que resulta do condicionamento da ocorrência do acontecimento B (HOGG; TANIS, 1997).

O questionário foi aplicado em aulas dos alunos, de 90 minutos, no início do 2º período escolar de 2011/2012 e os alunos tinham estudado os conteúdos de Probabilidades previstos no programa da disciplina de Matemática do 9º ano, no início do ano letivo. Esses conteúdos referem-se a aspetos de linguagem e às definições clássica e frequencista de probabilidade, não fazendo parte deles a probabilidade condicionada nem a independência.

Nas duas questões, aqui estudadas, que se apresentam na secção de resultados, tratam-se duas situações em contexto de extração, com e sem reposição, de bolas de um saco: na questão 1, de escolha múltipla e com justificação da opção selecionada, pretende-se que o aluno compare duas probabilidades; e na questão 2, de resposta curta, pretende-se que o aluno determine duas probabilidades condicionadas. Cada questão tem duas alíneas envolvendo a extração sucessiva de duas bolas, uma com reposição e outra sem reposição.

As duas questões, ao incluírem quer a extração com reposição quer a extração sem reposição, envolvem a determinação da probabilidade condicionada de acontecimentos independente e dependentes, o que, segundo Watson (2005), raramente se verifica na investigação realizada sobre a compreensão da probabilidade condicionada de alunos do 3º ciclo do ensino básico.

Por outro lado, o facto de a questão 1 se focar na comparação de probabilidades de obter bolas de uma certa cor em duas extrações sucessivas (com e sem reposição da 1ª bola extraída) e a questão 2 se focar na determinação de probabilidades condicionadas (com e sem reposição da 1ª bola extraída), leva-nos a prever que os alunos aderirão mais frequentemente a estratégias intuitivas na questão 1 do que na questão 2. Uma tal tendência dos alunos pode ser confirmada em vários estudos onde são usados itens de comparação para estudar as intuições dos alunos (e.g., CAÑIZARES; BATANERO, 1997; FERNANDES, 1999; FISCHBEIN, 1984). Em consequência, espera-se também que os alunos sintam mais dificuldades na questão 2 e que recorram mais frequentemente à regra de Laplace para determinarem os valores das probabilidades pedidas.

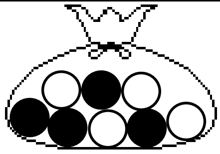
Em termos de análise de dados, estudaram-se as respostas, as justificações e os erros cometidos pelos alunos nas duas questões de probabilidade condicionada, determinando-se frequências e recorrendo-se a tabelas como forma de sintetizar os resultados.

De seguida, apresentam-se os resultados obtidos em cada uma das duas questões.

4. Resultados

4.1.Questão 1

Num saco há 4 bolas brancas e 4 bolas pretas, conforme se mostra na figura seguinte. As bolas são todas iguais exceto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente (uma a seguir à outra) **duas** bolas do saco.



a) Extrai-se uma 1ª bola do saco e **coloca-se** essa bola no saco antes de se extrair uma 2ª bola. Comparativamente com a probabilidade de a 1ª bola ser preta, a probabilidade de a 2ª bola ser branca:

☐ Aumenta
☐ Diminui
☐ Mantém-se

Justifica a tua resposta.

b) Extrai-se uma 1ª bola do saco e **não se coloca** essa bola no saco antes de se extrair uma 2ª bola. Comparativamente com a probabilidade de a 1ª bola ser preta, a probabilidade de a 2ª bola ser branca:

☐ Aumenta
☐ Diminui
☐ Mantém-se

Justifica a tua resposta.

Na análise das respostas dos alunos considerámos os acontecimentos: P_1: "a primeira bola retirada do saco é preta"; e B_2: "a segunda bola retirada do saco é branca".

Na Tabela 1 apresentam-se as percentagens de alunos segundo as opções de resposta das alíneas a) e b) da questão 1, incluindo a percentagem de alunos que não responderam a esta questão.

Tabela 1: Distribuição dos alunos (em %) segundo as opções de resposta nas alíneas a) e b) da questão 1 ($n = 310$).

Respostas	Questão 1 a)	Questão 1 b)
Aumenta	4,2	81,6*
Diminui	4,5	8,4
Mantém-se	91,3*	7,7
Não responde	0,0	2,3
Total	100	100

* Resposta correta

Da Tabela 1 destacam-se as elevadas percentagens de repostas corretas nas duas alíneas da questão 1, embora registando-se uma ligeira diminuição na percentagem de respostas corretas da alínea a) para a alínea b). Destaca-se também a reduzida percentagem de não respostas, observadas apenas na alínea b).

Na Tabela 2 apresentam-se as distribuições das justificações apresentadas pelos alunos nas alíneas a) e b), incluindo a percentagem de alunos que, embora tenham assinalado uma de três alternativas apresentadas, não justificaram a sua opção.

Tabela 2 : Justificações apresentadas pelos alunos nas alíneas a) e b) da questão 1

Justificações por opção de resposta	a)		b)	
	Frequência	%	Frequência	%
Aumenta				
1. Há menos bolas pretas do que brancas no saco	4	30,8	181	71,5
2. Razões de probabilidade	–	–	53	20,9
3. A probabilidade aumenta	–	–	4	1,6
Outra justificação	4	30,8	4	1,6
Não justifica	5	38,4	11	4,4
Total	**13**	**100**	**253**	**100**
Diminui				
4. Diminuição do número total de bolas no saco	–	–	14	53,9
5. Razões de probabilidade	–	–	3	11,5
6. A probabilidade diminui	–	–	1	3,9
Outra justificação	7	50,0	5	19,2
Não justifica	7	50,0	3	11,5
Total	**14**	**100**	**26**	**100**
Mantém-se				
7. No saco há tantas bolas brancas como pretas	213	75,3	12	50,0
8. Razões de probabilidade	43	15,2	–	–
9. Há bolas brancas e bolas pretas no saco	4	1,4	5	20,8
10. A probabilidade mantém-se	2	0,7	–	–
11. Diagrama em árvore	2	0,7	–	–
12. Ao tirar uma bola as outras mexem-se	1	0,4	–	–
13. Razão bolas brancas / bolas pretas	1	0,3	–	–
Outra justificação	8	2,8	1	4,2
Não justifica	9	3,2	6	25,0
Total	**283**	**100**	**24**	**100**

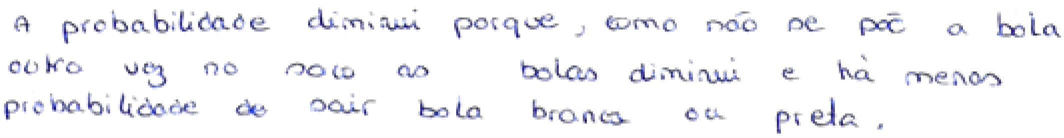
Da observação da Tabela 2 conclui-se que o número de alunos que não justificam a sua opção aumenta ligeiramente da alínea a) (21 alunos) para a alínea b) (39 alunos).

Em 91,6% das 572 justificações apresentadas pelos alunos nas alíneas a) e b) são estabelecidas relações em termos de: (i) *todo-todo* (2,7%; justificação 4), comparação entre o número total de bolas existentes no saco antes da primeira extração e o número total de bolas existentes no saco antes da segunda extração; (ii) *parte-parte* (78,4%; justificações 1, 7 e 13), comparação entre o número de bolas brancas e o número de bolas pretas existentes no saco; e (iii) *parte-todo* (18,9%; justificações 2, 5 e 8), comparação entre o número de bolas de uma cor e o número total de bolas existentes no saco.

Para a análise das estratégias dos alunos, inseridas nas três grandes categorias anteriormente definidas, considera-se o conjunto S, em que S é a união de dois subconjuntos disjuntos P e B contendo respetivamente elementos do tipo p e elementos do tipo b.

Relativamente às relações *todo-todo*, estas ocorrem apenas na alínea b) e a estratégia consiste em admitir que uma redução no número de elementos de S implica a redução tanto da probabilidade de extrair um elemento do tipo p como da probabilidade de extrair um elemento do tipo b (ver Figura 1).

Figura 1. Justificação do aluno A_{270} na alínea b).


A probabilidade diminui porque, como não se põe a bola outra vez no saco as bolas diminui e há menos probabilidade de sair bola branca ou preta.

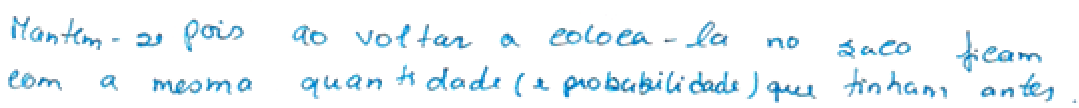
Relativamente às relações *parte-parte*, elas ocorreram associadas essencialmente a duas estratégias.

1. Uma justificação envolve uma espécie de *vantagens*, em que o aluno determinou a vantagem das bolas brancas em relação às bolas pretas, obtendo a razão $4/4$ antes e após a extração da primeira bola. Esta conclusão levou-o a escolher a opção “mantém-se” na alínea a).

2. As justificações envolvem a comparação entre o número de elementos do tipo p e o número de elementos do tipo b que compõem o conjunto S.

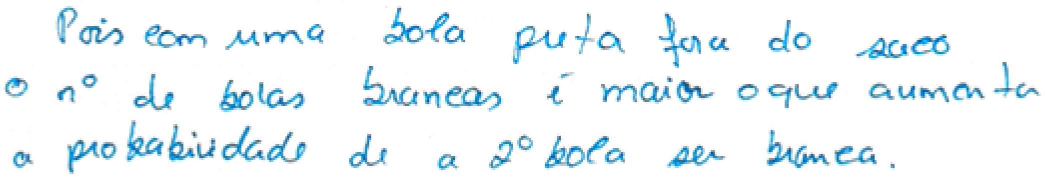
Dependendo da opção do aluno, desenham-se dois cenários distintos. No primeiro cenário, incluindo 213 alunos na alínea a) e 12 alunos na alínea b), para justificarem a opção “mantém-se”, admite-se que a probabilidade de extrair um elemento do tipo b mantém-se igual à probabilidade de extrair um elemento do tipo p, do conjunto S, desde que $\#P = \#B$ (ver Figura 2).

Figura 2. Justificação do aluno A_{49} na alínea a).


Mantem-se pois ao voltar a coloca-la no saco ficam com a mesma quantidade (e probabilidade) que tinham antes.

No segundo cenário, incluindo 4 alunos na alínea a) e 181 alunos na alínea b), para justificarem a opção “aumenta”, admite-se que a probabilidade de extrair um elemento do tipo b do conjunto S aumenta quando $\#B > \#P$ (ver Figura 3).

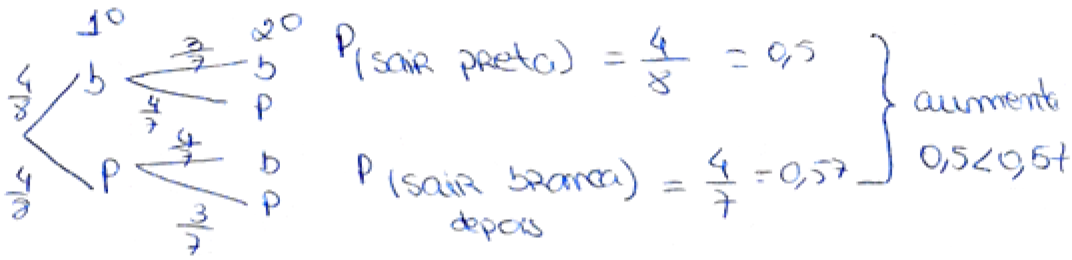
Figura 3. Justificação do aluno A_{49} na alínea b).



Quanto às relações *parte-todo*, elas ocorreram associadas à determinação de razões de probabilidade, com recurso ao conceito clássico de probabilidade, e envolvem três cenários distintos: resposta correta e probabilidades corretas; resposta correta e probabilidades incorretas; e resposta incorreta e probabilidades corretas.

O cenário *resposta correta e probabilidades corretas* (ver Figura 4) verificou-se em 67,7% dos casos, sendo que 43 casos ocorreram na alínea a) e 24 casos na alínea b). Para além das probabilidades envolvidas no procedimento correto, as justificações, por vezes, incluem uma árvore de probabilidades, o que acontece em 9 das 43 justificações da alínea a).

Figura 4. Justificação do aluno A_{39} na alínea b).

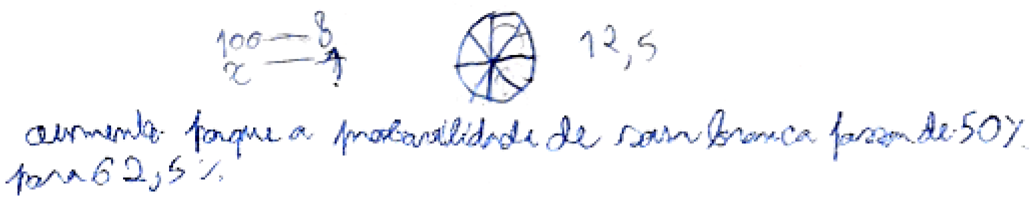


Neste cenário, os alunos justificam a sua opção com os valores corretos das probabilidades: $P(P_1)=1/2$ e $P(B_2\,|\,P_1)=1/2$, quando optam corretamente pela resposta “mantém-se” na alínea a), ou $P(P_1)=1/2$ e $P(B_2\,|\,P_1)=4/7$, quando optam corretamente pela resposta “aumenta” na alínea b), concluindo corretamente que $P(P_1)=P(B_2\,|\,P_1)$ e $P(B_2\,|\,P_1)>P(P_1)$, respetivamente.

O cenário *resposta correta e probabilidades incorretas* verificou-se em 29,3% dos casos e restringe-se à questão b). Neste cenário, os alunos justificam a sua opção através de valores incorretos para as probabilidades pedidas ou consideram probabilidades diferentes das solicitadas, nomeadamente: $3/8$ e $4/8$ (4 justificações); $3/7$ e $4/7$ (17 justificações); $3/7$ e $4/8$ (1 justificação); $1/4$ e $3/4$ (4 justificações); 50% e 62,5% (1 justificação); $2/8$ e $3/8$ (1 justificação); $3/4$ e $4/4$ (1 justificação). Ora, as razões de probabilidade consideradas permitem concluir que $P(B_2\,|\,P_1)>P(P_1)$ e, consequentemente, optar pela resposta correta “aumenta” na alínea b).

Estas razões de probabilidade, apresentadas pelos alunos, resultam de dividir a unidade em 4 ou 8 partes, de considerar ou não a redução do número de casos possíveis e de considerar outras razões de probabilidade diferentes das pedidas. Por exemplo, o aluno A_{220} (ver Figura 5), após ter considerado a unidade fracionada em 8 partes, concluído que cada parte corresponde a 12,5% e considerado a extração sem reposição da bola preta, percorreu as seguintes etapas na sua justificação: considera que a probabilidade de a primeira bola ser branca é 50%; admite que passa a haver uma vantagem das bolas brancas em relação às bolas pretas de 12,5%; e, por fim, admite que a probabilidade $P(B_2 \mid P_1)$ é de $50\% + 12{,}5\%$ (o que corresponde a $5/8$).

Figura 5. Justificação do aluno A_{220} na alínea b).

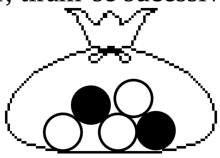


O cenário *resposta incorreta e probabilidades corretas* verificou-se em 3,0% dos casos e restringe-se à questão b). Neste cenário, os alunos justificam a opção incorreta “diminui” recorrendo a valores corretos das probabilidades $P(P_1) = 4/8$ e $P(B_2 \mid P_1) = 4/7$, o que acontece porque os alunos compararam incorretamente as razões de probabilidade obtidas ao admitirem que $4/7 < 4/8$.

As restantes justificações apresentadas pelos alunos nas alíneas a) e b) (8,4% das 572) distribuem-se da seguinte forma: 18,7% revertem para a estratégia de enviesamento de equiprobabilidade — *se é possível então é equiprovável*, para justificarem a opção “mantém-se” nas duas alíneas, com afirmações como as dos alunos A_{195}: “Pode ser branca ou preta”, A_{272}: “Porque pode sair uma das duas cores” e A_{292}: “Porque é aleatório, tanto me pode calhar novamente uma bola preta como me pode sair uma bola branca”; 14,6% são de natureza tautológica; 4,2% envolvem a construção de um diagrama de árvore, mas sem que seja percetível a influência que o mesmo tenha tido nas decisões dos alunos; 2,1% evoca aspetos físicos para justificar a sua opção “mantém-se” na alínea a), tal como refere o aluno A_{266}: “quando tiramos uma bola, as bolas vão-se mexer e depois se tirarmos outra bola é mais provável sair branca”; e 60,4% integram a categoria *Outras justificações*, por serem desprovidas de sentido na situação apresentada.

4.2. Questão 2

Num saco há 3 bolas brancas e 2 bolas pretas, conforme se mostra na figura seguinte. As bolas são todas iguais exceto na cor. Sem ver, tiram-se sucessivamente **duas** bolas do saco.



a) Considera que a 1ª bola extraída **é colocada** de novo no saco antes de se extrair a 2ª bola.
Sabe-se que a **1ª** bola extraída é branca. Qual a probabilidade de a **2ª** bola ser branca?

b) Considera que a 1ª bola extraída **não é colocada** de novo no saco antes de se extrair a 2ª bola.
Sabe-se que a **1ª** bola extraída é branca. Qual a probabilidade de a **2ª** bola ser preta?

Na análise das respostas dos alunos considerámos os acontecimentos: B_1: "a primeira bola retirada do saco é branca"; B_2: "a segunda bola retirada do saco é branca"; e P_2: "a segunda bola retirada do saco é preta".

Na Tabela 3 apresentam-se as percentagens de alunos segundo o tipo de resposta às duas alíneas da questão 2, incluindo a percentagem de alunos que não responderam a esta questão.

Tabela 3 – Distribuição (em %) dos alunos segundo o tipo de resposta às alíneas a) e b) da questão 2 ($n = 310$)

Alínea	Respostas		Não respostas
	Corretas	Erradas	
a)	66,8	25,8	7,4
b)	66,4	23,9	9,7

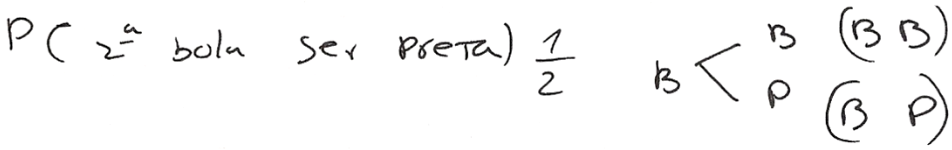
Da observação da Tabela 3 conclui-se ter havido uma considerável e muito próxima percentagem de acertos nas duas alíneas relativas ao cálculo de probabilidades condicionadas, tanto na situação em que a 1ª bola era reposta no saco antes de ser extraída a 2ª bola, isto é, no cálculo de $P(B_2 \mid B_1)$, como na situação em que não havia reposição, ou seja, no cálculo de $P(P_2 \mid B_1)$.

Comparativamente com a questão 1 observa-se uma considerável diminuição da percentagem de respostas corretas e uma maior percentagem de não respostas, mais acentuada na alínea b). Este resultado revela que os alunos apresentaram mais dificuldades na questão de determinação de uma probabilidade (questão 2) do que na questão de comparação de probabilidades (questão 1).

Em termos de obtenção das respostas, verificou-se que os alunos recorreram, quase sempre, ao cálculo das probabilidades a partir da regra de Laplace, em que estão subjacentes relações do tipo parte-todo. Os poucos alunos (22 no total) que desenvolveram outras estratégias para obter as suas respostas construíram diagramas de árvore, tabelas de dupla entrada e desenhos.

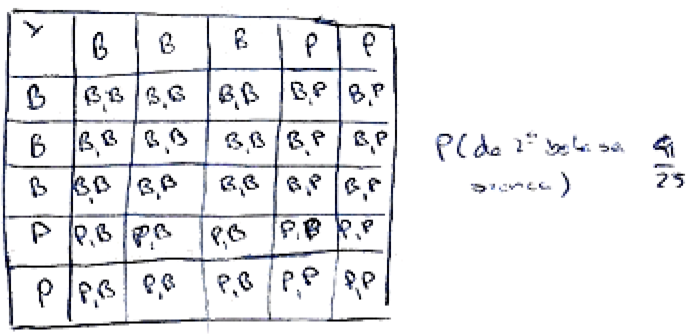
No caso dos digramas de árvore, referidos por 17 alunos nas suas resoluções, eles surgem associados a três cenários: *construção de um diagrama de árvore*; *construção de uma árvore de probabilidades*; e *diagrama de árvore e regra do produto*. Esta estratégia conduziu a 11 respostas corretas, apresentando-se seguidamente a resposta do aluno A_{244} (ver Figura 6), onde se observa que o aluno construiu um diagrama de árvore incompleto (porque faltam ramos) e correto (porque os ramos que construiu estão bem construídos). Como a primeira bola extraída não é reposta no saco e na primeira extração saiu uma bola branca, o diagrama construído conduz à resposta correta 1/2, já que $P(P_2 \mid B_1) = P(B_2 \mid B_1) = 2/4 = 1/2$.

Figura 6. Justificação do aluno A_{220} na alínea b).



Já as estratégias *tabelas de dupla entrada* e *desenhos* foram usadas por apenas um e quatro alunos, respetivamente. No caso da tabela de dupla entrada, o aluno A_{212} em vez de calcular $P(B_2 \mid B_1)$ calculou $P(B_1 \cap B_2)$ (ver Figura 7), e no caso da construção de desenhos todos os alunos obtiveram a resposta correta.

Figura 7. Resposta do aluno A_{212} na alínea a).



×	B	B	B	P	P
B	B,B	B,B	B,B	B,P	B,P
B	B,B	B,B	B,B	B,P	B,P
B	B,B	B,P	B,B	B,P	B,P
P	P,B	P,B	P,B	P,B	P,P
P	P,B	P,B	P,B	P,P	P,P

No caso das respostas erradas, apresenta-se na Tabela 4 a distribuição dos alunos segundo o tipo de erro cometido nas alíneas a) e b). Apesar de as resoluções dos alunos poderem acumular outros erros, em cada uma das categorias de erros apresentadas na Tabela 4 enfatizou-se o erro que mais influenciou a resolução do aluno.

Tabela 4 – Distribuição dos alunos segundo o tipo de erro cometido nas alíneas a) e b) da questão 2

Erros	a)		b)	
	Frequência	%	Frequência	%
Confusão entre probabilidade condicionada e conjunta	2	2,5	1	1,4
Considerar o número pretendido de bolas	7	8,8	4	5,4
Razão bolas brancas / bolas pretas ou bolas pretas / bolas brancas	20	25,0	34	45,9
Centrar a atenção na cor	–	–	4	5,4
Não considerar a reposição	37	46,3	–	–
Inverso de uma razão	13	16,2	8	10,8
Considerar a reposição	–	–	19	25,7
Outros valores	1	1,2	4	5,4
Total	**80**	**100**	**74**	**100**

De seguida descrevem-se os erros cometidos pelos alunos na resolução das duas alíneas da questão 2, apresentados na Tabela 4.

Confusão entre probabilidade condicionada e probabilidade conjunta. Este erro ocorreu sempre que os alunos não foram capazes de distinguir entre $P(B_2 \mid B_1)$ e $P(B_1 \cap B_2)$ na alínea a) e entre $P(P_2 \mid B_1)$ e $P(B_1 \cap P_2)$ na alínea b) (ver Figura 7). O facto de apenas dois alunos terem confundido a probabilidade condicionada com a probabilidade conjunta pode dever-se à própria formulação do item, que descreve uma situação de extração de bolas de um saco e não uma situação de descrição social (WATSON, 2005).

Considerar o número pretendido de bolas. Este erro consiste em admitir que a probabilidade pedida é o quociente entre o número de bolas que se pretende extrair do saco e o número total de bolas existentes no saco ou o número total de bolas de uma certa cor. Os valores obtidos pelos alunos foram $1/3$, $1/4$, $1/5$ e $2/3$ em 7 resoluções (1, 1, 2 e 3 resoluções, respetivamente) na alínea a) e $1/5$ em 4 resoluções na alínea b).

Uma vez que os alunos se limitaram a apresentar uma razão de probabilidade sem acrescentarem qualquer justificação, efetuou-se uma interpretação dos termos das frações obtidas pelos alunos. Por exemplo, em relação à resolução do aluno A_{132} na alínea a) (ver Figura 8), considerou-se que o numerador representava o número de bolas brancas pretendidas (1 – uma bola branca na segunda extração) e o denominador representava o número total de bolas existentes no saco (5 bolas), já que a primeira bola é reposta no saco antes de se extrair a segunda bola.

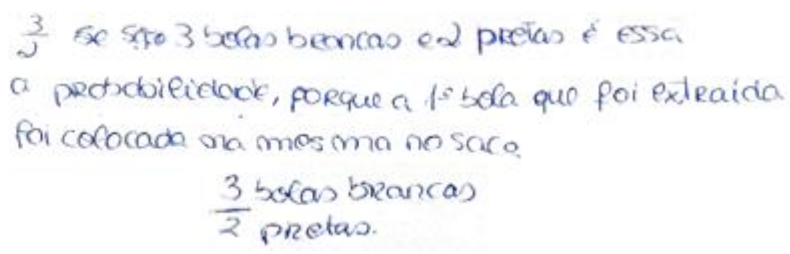
Figura 8. Resposta do aluno A_{132} na alínea a).

A interpretação efetuada dos termos das frações consideradas pelos alunos, foram: 1 – uma bola branca ou uma bola preta; 2 – duas bolas pretas; 3 – três bolas brancas; 4 – quatro bolas no saco (admitindo que depois de retirada do saco a bola não é reposta); e 5 – cinco bolas no saco.

Razão bolas brancas/bolas pretas ou bolas pretas/bolas brancas. Este erro consiste em identificar a probabilidade com uma espécie de *vantagem*, isto é, a razão entre o número de bolas brancas (pretas) e o número de bolas pretas (brancas) existentes no saco ou a razão do número de bolas brancas existentes no saco antes e depois da primeira extração. Os alunos admitiram a probabilidade como o quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos desfavoráveis a um certo acontecimento. Associados a este erro, foram identificados três cenários distintos.

Comparação do número de bolas brancas com o número de bolas pretas. Neste tipo de comparação, o aluno analisa a vantagem das bolas brancas em relação às bolas pretas (ver Figura 9). Na alínea a) este cenário verificou-se em 14 resoluções, sendo que os alunos afirmaram a razão $3/2$, considerando a reposição da primeira bola extraída antes de se retirar a segunda bola.

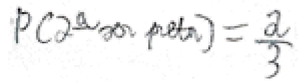
Figura 9. Resposta do aluno A_{99} na alínea a).



Na alínea b), este cenário verificou-se numa resolução, tendo o aluno obtido a razão $3/2$, sem considerar a informação de que a primeira bola extraída não volta a ser colocada no saco antes de se extrair a segunda bola.

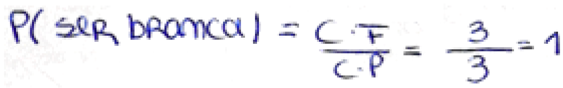
Comparação do número de bolas pretas com o número de bolas brancas. Neste tipo de comparação, o aluno analisa a vantagem das bolas pretas em relação às bolas brancas (ver Figura 10). Este cenário ocorreu na alínea b), sendo que em 4 resoluções os alunos obtiveram a razão $2/3$ e em 29 resoluções a razão $2/2$. Embora sem o afirmarem, parece que estes alunos admitem que a probabilidade condicionada de "obter uma bola preta na segunda extração sabendo que na primeira extração saiu uma bola branca" é o quociente do número de bolas pretas (ou cardinal do acontecimento condicionado) pelo número de bolas brancas (ou cardinal do acontecimento condicionante). Admitindo a reposição da primeira bola no saco, os alunos obtêm a razão $2/3$, e no caso contrário obtêm a razão $2/2$.

Figura 10. Resposta do aluno A_{152} na alínea b).



Comparação do número de bolas brancas. Neste tipo de comparação, o aluno analisa a vantagem entre as bolas brancas antes e depois da primeira extração. Ao admitir que a primeira bola extraída (que é branca) é reposta no saco, obtém a razão $3/3$ (ver Figura 11). Este cenário ocorreu em 6 resoluções na alínea a). Embora sem o afirmarem, parece que estes alunos admitem que a probabilidade condicionada de "obter uma bola branca na segunda extração sabendo que na primeira extração saiu uma bola branca" é o quociente entre o número de bolas brancas existentes no saco antes da primeira extração e após a primeira extração com reposição.

Figura 11. Resposta do aluno A_{302} na alínea a).



Centrar a atenção na cor. Este erro consiste em centrar a atenção na cor, tomando para acontecimentos elementares pares do tipo *BB*, *BP*, *PB*, … e considerando-os acontecimentos elementares equiprováveis. Dependendo do conjunto de pares considerados, os alunos obtiveram razões de probabilidade diferentes. De seguida, efetua-se uma interpretação de cada uma das razões de probabilidade obtidas pelos alunos.

A razão de probabilidade $1/4$. Esta razão de probabilidade foi obtida por 3 alunos na alínea b) (ver Figura 12). Os alunos admitiram como acontecimentos elementares equiprováveis as sequências *BP*, *BB*, *PB* e *PP*, considerando a razão $1/4$ porque extraíram da questão "Sabe-se que a 1ª bola extraída é branca [*B*]. Qual a probabilidade de a 2ª bola ser preta [*P*]?" a informação de que a sequência *BP* representa o único caso favorável de entre quatro casos possíveis.

Figura 12. Resposta do aluno A_{252} na alínea b).

A razão de probabilidade $3/4$. Esta razão de probabilidade foi obtida por apenas um aluno na alínea b). Admitindo como acontecimentos elementares equiprováveis as sequências BP, BB, PB e PP e centrando a atenção apenas na extração de uma bola branca, o aluno obteve a razão 3/4.

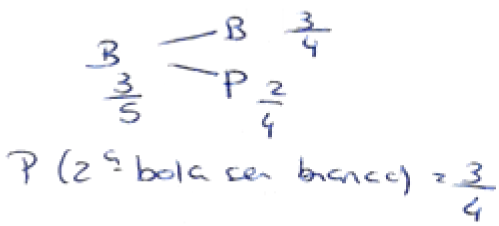
Não considerar a reposição. Este erro consiste em não considerar a reposição da primeira bola extraída do saco antes de se extrair a segunda bola. Este erro foi característico da alínea a). Neste erro foram identificados dois cenários distintos: falha de reposição total, se a mesma ocorre tanto na contagem dos casos favoráveis como na contagem dos casos possíveis e falha de reposição parcial, se ocorre apenas na contagem dos casos possíveis ou na contagem dos casos favoráveis.

Falha de reposição total. Este cenário verificou-se em 19 resoluções da alínea a), com os alunos a obterem a razão de probabilidade $2/4$ ou equivalente (ver Figura 13).

Figura 13. Resposta do aluno A_{45} na alínea a).

Falha de reposição parcial. Este cenário verificou-se em 18 resoluções da alínea a), com os alunos a obterem a razão de probabilidade $2/5$ (sem considerarem a reposição na contagem dos casos favoráveis) e $3/4$ (sem considerarem a reposição na contagem dos casos possíveis). A título de exemplo, veja-se a resolução do aluno A_{229} da alínea a) na Figura 14.

Figura 14. Resposta do aluno A_{229} na alínea a).



O erro *inverso de uma razão* consiste em obter o inverso da razão de probabilidade pedida, o inverso de uma razão de probabilidade que, embora não sendo a probabilidade solicitada, representa a probabilidade de um acontecimento com significado no contexto da situação apresentada, o inverso de uma vantagem ou o inverso de razões incluídas nos erros anteriores.

A razão 5/3 ocorreu na alínea a) na resolução de 9 alunos, a razão 4/3 foi obtida por um aluno na alínea a), a razão 5/2 por 2 alunos na alínea b), a razão 4/2 por um aluno na alínea a) e 6 alunos na alínea b), a razão $5/4$ foi obtida por um aluno na alínea a) e a razão $6/2$ foi obtida por um aluno na alínea a).

O erro *considerar a reposição* consiste em considerar que a bola retirada na primeira extração volta a ser resposta no saco antes de se extrair a segunda bola. Este erro ocorreu em 19 resoluções da alínea b), questão que envolvia a extração consecutiva de duas bolas sem reposição. Os alunos não efetuaram a redução do espaço amostral aquando da extração da segunda bola, obtendo a razão $2/5$ em vez de $2/4$ (ver Figura 15).

Figura 15. Resposta do aluno A_{19} na alínea b).

Por oposição às categorias antes referidas, incluíram-se na categoria *outros valores* as respostas desprovidas de sentido na situação apresentada, como é exemplo a resposta do aluno A_{303}na alínea a), que obteve a razão 0,12/5, sem se perceber como obteve o numerador da fração.

5. Conclusão

Embora em ambas as questões se tenham obtido percentagens de respostas corretas elevadas (2 ou mais alunos em cada 3 apresentaram a resposta correta), verificou-se que comparar uma probabilidade simples com uma probabilidade condicionada (questão 1) se revelou uma tarefa mais fácil para os alunos do que calcular probabilidades condicionadas (questão 2). No entanto, esta discrepância nas respostas dadas pelos alunos às duas questões deve ser relativizada se tivermos em consideração que, na comparação de probabilidades, alguns dos argumentos utilizados pelos alunos são limitados na sua abrangência ou não justificam de todo a opção correta selecionada.

De entre esses argumentos predominaram as comparações probabilísticas envolvendo a probabilidade condicionada, nomeadamente: *no saco há tantas bolas brancas como pretas* (alínea a), referido por 75% dos alunos que optaram pela resposta correta “mantém-se”; *há menos bolas pretas do que bolas brancas no saco* (alínea b) utilizado por 72% dos alunos que optaram pela resposta correta “aumenta”. Ora, estas estratégias, de natureza aditiva, embora nas situações abordadas tenham conduzido a respostas corretas, não garantem a seleção de respostas corretas em outras situações, como se verificou em Fernandes (1999). Já no caso dos argumentos de natureza tautológica, enviesamento de equiprobabilidade (LECOUTRE; DURAND, 1988) ou desprovidos de sentido na situação apresentada, eles não permitem justificar a opção correta.

Em termos das relações envolvendo uma parte e/ou o todo observou-se um predomínio de estratégias do tipo *parte-parte* (78,4%), comparativamente com as estratégias do tipo *parte-todo* (18,9%) e as estratégias do tipo *todo-todo* (2,7%). Muito embora os alunos já tivessem estudado probabilidades, de uma maneira geral, eles recorreram muito pouco à regra de Laplace, que implica uma relação do tipo *parte-todo*. Face às intuições secundárias (aprendidas na escola), este resultado parece mostrar a maior acessibilidade das intuições primárias (adquiridas informalmente), como vários estudos têm demonstrado (e.g., FERNANDES, 1990; FISCHBEIN, 1975; FISCHBEIN & SCHNARCH, 1997).

Em geral, os melhores resultados obtidos na situação de comparação de probabilidades (questão 1) consolidam a hipótese, antes formulada, de que a natureza mais intuitiva da questão, em virtude de se tratar de itens de comparação de probabilidades e em que a obtenção da resposta correta não requer necessariamente a determinação de valores de probabilidade, conduziria à adoção de estratégias intuitivas que, apesar de poderem ser limitadas quando aplicadas a outras situações, neste caso sustentaram a resposta correta.

Na questão 2, muito embora os alunos tenham determinado probabilidades, fundamentalmente pela regra de Laplace, observaram-se muitos erros nas suas respostas, designadamente: apresentação de frações impróprias para valores de probabilidade, o que releva a incompreensão de que a probabilidade de um acontecimento A qualquer tem de cumprir a propriedade $0 \leq P(A) \leq 1$; identificação de *vantagens* (envolvendo relações *parte-parte*) com a probabilidade de um acontecimento (envolvendo relações *parte-todo*); confusão entre probabilidade condicionada e probabilidade conjunta, também observada por Correia et al. (2011); tomar o número de bolas extraídas por casos favoráveis; centrar a atenção na cor das bolas sem considerar o seu número; e considerar ou não a reposição, contrariando o que era afirmado no enunciado.

Das situações com reposição (alínea a) para as sem reposição (alínea b) observou-se uma pequena diminuição da percentagem de respostas corretas na questão 1, enquanto se manteve na questão 2. Esta diferença de resultados, para além dos diferentes contextos de comparação e determinação de probabilidades condicionadas, pode também dever-se ao enviesamento de equiprobabilidade, que na situação de reposição da questão 1 conduz à resposta correta.

De uma maneira geral, os resultados do estudo revelam que os alunos possuem um substrato intuitivo que lhes permitirá iniciar o estudo formal da probabilidade condicionada, sobretudo no caso da definição de probabilidade condicionada por restrição do espaço amostral (HOGG; TANIS, 1997), como foi o caso do presente estudo, e no contexto de extração de bolas de um saco. Também neste contexto, Correia e Fernandes (2012) obtiveram percentagens de respostas corretas de cerca de 50% ou mais num item de comparação de probabilidades na extração sucessiva de duas bolas de dois sacos com quantidades proporcionais de bolas brancas e pretas, com e sem reposição. Por outro lado, para além do contexto da extração de bolas de sacos, abordado neste estudo, Correia et al. (2011) obtiveram percentagens semelhantes de respostas corretas, também em alunos do 9º ano, na determinação de probabilidades condicionadas quando os dados eram apresentados sob a forma de tabelas de frequências e de contingência.

Muito embora estes resultados encorajem a possibilidade de introduzir o conceito de probabilidade condicionada no 9º ano de escolaridade, aprofundando-o posteriormente em níveis de escolaridade subsequentes, é recomendável estudar o desempenho destes alunos quando a probabilidade condicionada é explorada em outros contextos. Watson (2005) distingue dois contextos: situações de amostragem relacionadas com o tempo, como é o caso da extração de bolas de um saco; e situações de descrição social, como é o caso da probabilidade que uma mulher (M) seja professora (P), isto é, $P(P \mid M)$, e a probabilidade que uma professora seja mulher, isto é, $P(M \mid P)$. Num estudo sobre este último contexto, envolvendo alunos do 6º, 7º, 8º e 9º ano de escolaridade, Watson e Moritz (2002) obtiveram percentagens de respostas corretas variando entre 13% e 27% e aumentando com o ano de escolaridade. Já em questões semelhantes formuladas num contexto de frequência, os alunos obtiveram percentagens de respostas corretas variando entre 48% e 64%.

Apesar de os resultados obtidos não serem tão encorajadores como no caso do contexto da extração de bolas de sacos, ainda assim, Watson e Moritz (2002) são de opinião que muitos alunos podem interpretar acontecimentos condicionais e conjuntivos em contextos sociais, e não apenas em contextos de extração de bolas de sacos, referindo que o raciocínio apropriado sobre estes acontecimentos pode não ser fácil para todos os alunos mas simultaneamente não ser tão difícil como alguns investigadores pensavam.

Referências

AHLGREN, A.; GARFIELD, J. (1991). Analysis of the probability curriculum. In: KAPADIA, R.; BOROVCNIK, M. G. (Eds.), *Chance encounters: probability in education* (pp. 107-134). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

BATANERO, C.; DÍAZ, C. (2010). Training teachers to teach statistics: What can we learn from research? *Statistique et Enseignement*, v. 1, n. 1, p. 5-20.

BOROVCNIK, M. G.; KAPADIA, R. (2010). Research and developments in probability education internationally. In: JOUBERT, M.; ANDREWS, P. (Eds.), *Proceedings of the British Congress for Mathematics Education* (pp. 41-48). On line: www.bsrlm.org.uk/IPs/ip30-1/BSRLM-IP-30-1-06.pdf4

CAÑIZARES, M. J.; BATANERO, C. (1997). Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en la comparación de probabilidades. *Uno*, n. 14, p. 99-114.

CORREIA, P. F.; FERNANDES, J. A. (2012). Comparação de probabilidades condicionadas no contexto de extração de bolas de um saco. In: PINTO, H.; JACINTO, H.; HENRIQUES, A.; SILVESTRE, A.; NUNES, C. (Orgs.), *Atas do XXIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 429-442). Lisboa: APM.

CORREIA, P. F.; FERNANDES, J. A.; CONTRERAS, J. M. (2011). Intuições de alunos do 9º ano de escolaridade sobre probabilidade condicionada. In: NUNES, C.; HENRIQUES, A.; CASEIRO, A.; SILVESTRE, A.; PINTO, H.; JACINTO, H.; PONTE, J. (Orgs.), *Actas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM.

FALK, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In: DAVIDSON, R.; SWIFT, J. (Eds.), *Proceedings of Second International Conference on Teaching Statistic* (pp. 292-297). Victoria, BC: University of Victoria.

FALK, R. (1993). *Understanding probability and statistics: a book of problems*. Wellesley, Massachusetts: A K Petrers.

FALK, R.; FALK, R.; LEVIN, I. (1980). A potential for learning probability in young children. *Educational Studies in Mathematics*, v. 11, n. 2, p. 181-204.

FERNANDES, J. A. (1990). *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de mestrado, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

FERNANDES, J. A. (1999). *Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga, Portugal.

FISCHBEIN, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel.

FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

FISCHBEIN, E.; GAZIT, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, v. 15, n. 1, p. 1-24.

FISCHBEIN, E.; SCHNARCH, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 28, n. 1, p. 96-105.

GAL, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemas. In: JONES, G. (Ed.), *Exploring probability in schools: challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). New York, NY: Springer.

GREEN., D. R. (1983). A survey of probability concepts in 3000 pupils aged 11-16 years. In: GREY, D. R.; HOLMES, P.; BARNETT, V.; CONSTABLE, G. M. (Eds.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics* (vol. 2, pp. 766-783). Sheffield, UK: Teaching Statistics Trust.

HOGG, R. V.; TANIS, E. A. (1997). *Probability and statistical inference* (5th ed.). New Jersey: Prentice-Hall.

JONES, G. A.; LANGRALL, C. W.; THORNTON, C. A.; MOGILL, A. T. (1999). Students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 30, n. 5, p. 487-519.

LECOUTRE, M.; DURAND, J. (1988). Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics,* v. 19, n. 3, p. 357-368.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO (2007). *Programa Ajustado de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

PIAGET, J.; INHELDER, B. (1951). La Genèse de l'idée de hasard chez l'enfant. Paris: Presses Universitaires de France.

POLLATSEK, A.; WELL, A. D.; KONOLD, C.; HARDIMAN, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organitation, Behavior and Human Decision Processes*, v. 40, n. 2, p. 255-269.

SHAUGHNESSY, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In: GROUWS, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 465-494). New York: Macmillan.

SPINILLO, A. G. (2002). O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção. *Psicologia: Reflexão e Crítica,* v. 15, n. 3, p. 475-487.

TARR, J. E. (1997). Using middle school students' thinking in conditional probability and independence to inform instruction. (Doctoral dissertation, Illinois State University, 1997). *Dissertation Abstracts International, 49,*Z5055.

TARR, J. E.; JONES, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal,* v. 9, n. 1, p. 39-59.

TARR, J. E.; LANNIN, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? In: JONES, G. A. (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 215-238). New York, NY: Springer.

WATSON, J. M. (1995). Conditional probability: its place in the mathematics curriculum. *Mathematics Teacher*, v. 88, n. 1, p. 12-17.

WATSON, J. M. (2005). The probabilistic reasoning of middle school students. In JONES, G. A. (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 145-169). New York, NY: Springer.

WATSON, J. M.; KELLY, B. A. (2007). The development of conditional probability reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 38, n. 2, p. 213–235.

WATSON, J. M.; MORITZ, J. B. (2002). School students' reasoning about conjunction and conditional events. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* v. 33, n. 1, p. 59-84.