ASSOCIANDO PESQUISA E INTERVENÇÃO EM UMA DISCIPLINA DE INTRODUÇÃO AO CÁLCULO: UM ESTUDO DE CASO NA UFRJ

ASSOCIATING RESEARCH AND INTERVENTION IN A DISCIPLINE OF CALCULUS INTRODUCTION: A CASE STUDY AT UFRJ

VALÉRIA MOURA DA LUZ[1]
ÂNGELA ROCHA DOS SANTOS[2]

Resumo

Esta pesquisa teve como objetivo investigar uma proposta de intervenção em uma disciplina de Introdução ao Cálculo, que aconteceu concomitantemente com as aulas tradicionais de Cálculo I, em um curso de graduação da UFRJ. Neste estudo, buscou-se investigar como o uso da abordagem por resolução de problemas em um ambiente computacional pode contribuir para o enriquecimento das imagens de conceitos dos estudantes relativo às funções e inequações lineares. Os dados foram levantados segundo a metodologia estudo de caso. A análise final sugere que a visualização e a articulação das múltiplas representações proporcionadas por um ambiente em que as interações entre os participantes e as mídias foram constantes, podem enriquecer as imagens de conceito dos estudantes relativos aos conceitos supracitados.
Palavras-chave*: Introdução ao Cálculo; Tecnologia da Informação e Comunicação; Resoluções de Problemas no Ensino Superior.*

Abstract

This research aims was to investigate a proposed intervention in a subject Introduction to Calculus, which happened concomitant with traditional course of Calculus I in an undergraduate degree from UFRJ. In this study, we sought to investigate how the use of the approach for solving problems in a computing environment can contribute to the enrichment of students' images of concepts concerning functions and linear inequalities. The data were collected according to the case study methodology. The final analysis suggests that visualization and coordination of multiple representations provided by an environment in which the interactions between the participants and the media were constant, can enrich students' concept images related to the concepts involved.
Keywords*: Calculus Introduction; Information and Communication Technologies; Problems Solving in Higher Education.*

Introdução

---

[1] Mestre em Ensino de Matemática (IM/PEMAT/UFRJ) e professora do Colégio Militar do Rio de Janeiro. E-mail: profvaleria.luz@gmail.com

[2]Doutora em Matemática (IM/UFRJ), professora da UFRJ e orientadora da dissertação de mestrado, finalizada em 2011, da primeira autora desse artigo. E-mail: angela@im.ufrj.br

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral vem se configurando, ao longo dos anos, praticamente em todas as Instituições do Ensino Superior do país, dentre aquelas que mais reprovam. Muitos pesquisadores brasileiros se preocuparam com os altos índices de reprovação dos alunos em Cálculo (BARUFI, 1999; REIS, 2001; REZENDE, 2003; OLÍMPIO JÚNIOR, 2006; PEREIRA, 2009; entre outros). As dificuldades dos alunos universitários na aprendizagem de Cálculo também têm sido o foco de diversas pesquisas nacionais e internacionais (TALL, 1989; GIRALDO, 2004).

Com base na problemática aqui citada, surgem algumas perguntas: Qual é razão de tantas reprovações? O problema se concentra no professor e na sua metodologia de ensino? Ou no aluno que chega aos “bancos” universitários com muitas deficiências na matemática do ensino básico? Ou ambas as possibilidades são facetas, causa e consequência, de um mesmo problema? (REZENDE, 2003).

De um modo geral, os discursos dos professores universitários remetem a críticas em relação à qualidade de ensino nos níveis Fundamental e Médio (BARRETO, 1995, apud REIS, 2001). De fato, concordamos que a formação matemática dos alunos da escola básica é muito deficiente, como comprovam os dados estatísticos de avaliações institucionais, tais como o Sistema de Avaliação de Educação Brasileira (SAEB), a Prova Brasil, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA). No entanto, temos um importante ponto que não devemos e nem podemos desconsiderar: ainda que fossem propostas alterações significativas nos níveis fundamental e médio, teríamos toda uma geração de estudantes em déficit com a aprendizagem. Nesse sentido, aliamo-nos a Gomes et al. (2005, p.7), quando esses, ao se reportarem ao aluno iniciante de cursos superiores, da área de Ciências Exatas, especialmente de Engenharia, comentam: “É certo que uma reforma deveria ser iniciada nos ensinos fundamental e médio, no entanto, esse aluno está chegando ao curso superior e nós, professores universitários, não podemos enviá-los de volta”. Por outro lado, na visão dos estudantes, o problema está relacionado à forma como o professor conduz sua prática pedagógica (CABRAL, 1992, apud REIS, 2001). Fato é que independente do ângulo por que se enxerga a questão, o problema existe e muitas respostas e encaminhamentos têm sido apresentados, em vários países, por diversos e importantes pesquisadores da área, no âmbito de solucioná-lo.

Segundo Rezende (2003), uma solução bastante usual nas instituições de ensino superior em nosso país para o enfrentamento dos resultados catastróficos no ensino de

Cálculo é a realização de cursos preparatórios para um curso inicial de Cálculo I. Tais cursos têm como objetivo, em geral, possibilitar ao aluno rever conceitos importantes da matemática da escola básica, reconstruindo-os quando necessário, e, consequentemente, aprofundá-los.

No presente trabalho, trazemos um recorte de nossa pesquisa de mestrado (LUZ, 2011), que teve por objetivo investigar uma proposta de intervenção em uma disciplina de Introdução ao Cálculo, oferecida concomitantemente com as aulas de Cálculo Diferencial e Integral I, em um curso de graduação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). A disciplina de Introdução ao Cálculo foi desenvolvida sob a perspectiva da Resolução de Problemas, em um ambiente computacional, utilizando a coordenação de múltiplas representações semióticas (DUVAL, 2009) de um mesmo objeto matemático.

Vale ressaltar que o nosso objetivo foi criar uma proposta que alterasse o ambiente da sala de aula, fazendo-se necessária a construção de uma nova dinâmica. Foi preciso passar de uma organização em que o professor é o centro para outra, em que os alunos interagem com os outros estudantes, o professor e as mídias[3], de forma a facilitar a construção do conhecimento. Em nossa visão, a busca por uma melhora no ensino de Cálculo passa também pela mudança nas relações entre professor, aluno e conteúdo.

Dentro dessa perspectiva, algumas possibilidades de abordagem para um curso de Introdução ao Cálculo (ou Cálculo) puderam ser encontradas na nossa revisão bibliográfica (LUZ, 2011). Destacamos a metodologia via resolução de problemas (ONUCCHI, 1999; ALLEVATO, 2005; etc.), a aprendizagem em pequenos grupos (NASCIMENTO, 2000) e o uso de tecnologias no ensino (VILLARREAL, 1999; BORTOLOSSI, 2010; entre outros). Algumas pesquisas (NASCIMENTO, 2000; DOERING et al., 2004) apontaram também para a necessidade de um conhecimento mais aprofundado das dificuldades ou barreiras que se interpõem à aprendizagem da disciplina do cálculo que poderá contribuir para a elaboração de estratégias didáticas mais efetivas; como também a importância que deve ser enfatizada sobre a abordagem dos pré-conceitos do Cálculo em detrimento dos procedimentos técnicos (NASCIMENTO, 2000; REZENDE, 2003).

[3] Nesse presente estudo, designaremos por mídias lápis, papel e o computador.

Na disciplina objeto da intervenção, os assuntos e atividades desenvolvidos abordaram conceitos relativos às funções, equações e inequações elementares. No entanto, no presente artigo traremos, como exemplo, do trabalho realizado durante toda a pesquisa de campo, somente uma atividade que aborda os conceitos de funções e inequações lineares em duas variáveis.

Assim, a partir do nosso objetivo, nos propusemos investigar como o uso da abordagem por resolução de problemas, utilizando como recurso a visualização e, também, a coordenação de múltiplas representações (DUVAL, 2009) proporcionadas pelo ambiente informatizado pode contribuir para o enriquecimento das imagens de conceitos (TALL & VINNER, 1981) dos estudantes envolvidos na pesquisa.

Para isso, desenvolvemos – em parceria com a professora[4] da disciplina de Introdução ao Cálculo (IC) –, uma proposta de ensino na qual o ambiente tecnológico ofereceu contexto propício para a realização de atividades voltadas para a visualização e a coordenação de múltiplas representações semióticas, referentes aos conceitos supracitados.

1. Opções Metodológicas

Optamos por utilizar duas metodologias organizadas da seguinte forma: [I] Para a aplicação da intervenção – metodologia didática: abordagem por Resolução de problemas, em um ambiente computacional; [II] Para coleta dos dados[5] da pesquisa – metodologia da pesquisa: estudo de caso de observação.

Por meio da primeira metodologia, buscamos escolher problemas (ou atividades) nos quais a visualização e a coordenação entre as múltiplas representações (numérica, algébrica e geométrica), proporcionadas pelo ambiente computacional, se complementassem, no sentido de estimular, nos alunos, a capacidade de explorar, conjecturar, refutar, concluir e demonstrar.

Vale ressaltar que tais atividades foram baseadas no tripé "*explorar-conjecturar-concluir/demonstrar*" promovendo, dessa maneira, uma mudança no esquema tradicional "*definição - teorema - demonstração-corolário (aplicação)*" (SANTOS, KUBRUSLY & BIANCHINI, 2004).

[4] A professora da disciplina de Introdução ao Cálculo foi também a regente do curso de Cálculo Diferencial e Integral I. No entanto, em nossa pesquisa, pesquisamos somente o curso de IC.
[5] Foram utilizados três instrumentos de coleta de dados: os registros escritos dos alunos, as gravações dos encontros em áudio e o diário de campo da pesquisadora.

Em nossa pesquisa, ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas (ONUCHI, 1999; ALLEVATO, 2005) se constituiu em um caminho para se aprender Matemática de forma mais significativa. Assim, o problema foi visto como um elemento que disparou um processo de construção do conhecimento tendo o professor como um guia e os alunos como co-construtores. O ensino-aprendizagem de um tópico matemático em nossas aulas, então, começou com um *problema* que expressava aspectos-chave e técnicas matemáticas que deveriam ser desenvolvidas na busca por respostas razoáveis ao problema proposto (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009).

Já a segunda metodologia empregada foi embasada em uma abordagem qualitativa que objetivou avaliar os resultados da pesquisa em si, por meio do possível enriquecimento das imagens de conceito dos estudantes envolvidos. Além disso, a opção pela metodologia de estudo de caso possibilitou também uma visão ampla e profunda do fenômeno estudado podendo ser de muita valia para outros cursos de "Introdução ao Cálculo" ou "Pré-Cálculo", não importando o nome que se dê a esses cursos, levantando a seguinte questão: "o que eu posso (ou não aplicar) deste caso na minha situação?" (LUDKE & ANDRÉ, 1986).

Para dinamizar a metodologia de trabalho ensino-aprendizagem de matemática por meio da resolução de problemas em sala de aula, seguimos uma organização didática sugerida por Onuchic (1999): [a] *Formar grupos:* propor uma atividade cujos participantes organizados em grupos tentarão resolver o problema proposto; [b] *O papel do professor*: o professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários; [c] *Resultados na lousa*: anotar ou comentar os resultados obtidos pelos grupos quer sejam certos ou errados e aqueles feitos por diferentes caminhos; [d] *Plenária:* assembleia com todos os grupos, onde os alunos procuram defender seus pontos de vista e participam; [e] *Análise dos resultados*: nesta fase são trabalhados os pontos de dificuldade e os problemas secundários, além disso, o aspecto exploração é bastante considerado nesta análise; [f] *Consenso*: com a devida retirada de dúvidas, busca-se um consenso sobre o resultado pretendido; [g] *Formalização*: faz-se uma síntese daquilo que se objetivava "aprender" a partir do problema e são colocadas as devidas definições, identificadas as propriedades e feitas as demonstrações. Ao adotarmos essa organização didática, tivemos como meta desenvolver nos alunos a capacidade de justificar procedimentos e estratégias usadas na resolução de problemas, incentivando, também, a oralidade e a escrita.

O público alvo foi formado pelos alunos que ingressaram no curso de Ciências Matemáticas e da Terra da UFRJ pelo Concurso Vestibular de 2010. Todas as aulas desse curso de IC aconteceram no Laboratório de Ensino e Programação (LEP n.02) do Centro de Ciências Matemáticas (CCMN) e da Natureza da UFRJ, utilizando *mathlets*[6]. Nesse laboratório contávamos com dois projetores multimídias e 40 computadores. Os encontros transcorreram em quatro horas/aula semanais. Participaram desta pesquisa inicialmente 34 alunos, entretanto, após algumas reclassificações no vestibular daquele ano este número atingiu a marca de 52 estudantes.

2. Referencial Teórico

O referencial teórico fundamentou a análise dos dados coletados, sob a perspectiva dos alunos, e foi composto por duas teorias[7], a saber: a teoria das Imagens de Conceito (TALL & VINNER, 1981) e, também, pela teoria dos Registros das Representações Semióticas (DUVAL, 2009).

2.1 Representações Matemáticas em uma Perspectiva Semiótica e sua relação com a Visualização

Em nossa visão, não é possível conceber a abordagem das representações matemáticas por meio de um programa computacional sem trazer ao debate a necessidade de se utilizar elementos visuais, o que implica dar à visualização um significado no processo de compreensão e interpretação dos conceitos matemáticos.

Segundo Borba & Villarreal (2005), "a abordagem visual de um conceito ou objeto, em Matemática ou em qualquer outra área do conhecimento, pode ser considerada hoje, como um dos elementos que caracterizam novos estilos de construção do conhecimento".

Arcavi & Hadas (2000), por exemplo, afirmam que os ambientes de geometria dinâmica (ou outros ambientes computacionais) constituem verdadeiros laboratórios virtuais em que os estudantes podem investigar e aprender matemática. Os autores enumeram uma

[6] Pequenas atividades interativas desenvolvidas dentro de um ambiente computacional.

[7] Optamos por utilizar essas duas fundamentações teóricas por acreditarmos fortemente, em concordância com Quintaneiro (2010), que as teorias de imagem de conceito e dos registros de representações semióticas possam ser complementares no sentido de a primeira direcionar o foco nas imagens mentais que o indivíduo tem de objetos matemáticos, e a segunda teoria tratar do que entendemos como a mediação entre o objeto e o indivíduo: as múltiplas representações matemáticas.

série de características que esses laboratórios têm a possibilidade de desenvolver, desde que acompanhados de materiais curriculares e práticas de ensino em sala de aula. Tais características são: visualização, experimentação, surpresa, resposta da máquina e necessidade de demonstração. Em relação à visualização, especificamente, Arcavi & Hadas, citando Fishbein (1987)[8], afirmam que a concretude de imagens visuais é um fator essencial para criar o sentimento de autoevidência e, portanto, não apenas organiza informações em estruturas munidas de significado, como também é um importante fator conduzindo o desenvolvimento analítico de uma solução.

Em nossa investigação, consideramos que a visualização é um processo importante na elaboração de conjecturas, que podem ser refutadas, testadas, interpretadas, reinterpretadas e, finalmente, demonstradas. Assim, a possibilidade de integração das representações gráficas, algébricas e numéricas com a oralidade e a escrita e a nova forma de interação com as imagens, que passam a ser tratadas de forma dinâmica, colocam o processo de ensino-aprendizagem da matemática sob uma nova perspectiva, desempenhando um papel essencial na compreensão dos conceitos envolvidos.

Segundo Machado (2009), Raymond Duval estudou as diversas representações mobilizadas pela visualização matemática. Esta autora ainda acrescenta:

> Na perspectiva de Duval, uma análise do conhecimento matemático, é essencialmente, uma análise do sistema de produção das representações referentes a esse conhecimento. [...]
> A maneira matemática de raciocinar e de visualizar está intrinsecamente ligada à utilização das representações semióticas, e toda comunicação em matemática se estabelece com base nessas representações. (p.9)

A diversidade de representações semióticas se apresenta como um papel primordial na compreensão da matemática, nas premissas de Duval. Assim, ele introduziu um termo específico para designar os diversos signos utilizados para representar o conhecimento matemático, os Registros de Representação Semiótica.

Em matemática há uma grande variedade de registros de representações, tais como: os variados sistemas de numeração, as variadas formas de visualização e também argumentação visual, gráficos, diagramas e os esquemas, as escritas algébricas ou mesmo a linguagem natural.

Conforme Duval (2009), as transformações de representações semióticas podem ser efetuadas de dois modos: *tratamento* – não ocorre mudança no sistema de

[8] E. Fishbein. Instituiton in Sicience and Mathematics: An Education Approach. Reidel, 1987.

representação, correspondendo aos processos de justificação; e *conversão* – envolve a troca do sistema de representação.

De forma geral, acredita-se que a compreensão de um dado objeto deve ser puramente mental, independendo de suas representações semióticas. Entretanto, Duval defende, e nós também, que a compreensão em matemática está intimamente ligada ao fato de existir mais de uma representação para um objeto e que a articulação entre elas – que ocorre durante as *conversões* – é uma condição primordial de acesso à compreensão de um determinado conceito.

2.2 Imagem de Conceito e Definição de Conceito

Segundo Tall & Vinner (1981), imagem de conceito é definida como:

> [...] a estrutura cognitiva total associada ao conceito, que inclui todas as figuras mentais, processos e propriedades associados. Ela é construída ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (p.152, tradução nossa)

Para Giraldo (2004, p.8): "A imagem de conceito compõe de atributos de diferentes naturezas e graus de generalidade, e que podem ser representações visuais, bem como coleções de impressões ou experiências". Assim, incluem-se na imagem de conceito de um indivíduo todos os atributos associados ao conceito em questão. Entretanto, a imagem de conceito de um indivíduo não é uma estrutura estática: ela sofre transformações de acordo com o desenvolvimento cognitivo do sujeito, podendo ter atributos incluídos, excluídos ou modificados no decorrer de suas experiências cognitivas (Ibidem).

Para Tall & Vinner (1981), a *definição do conceito* é um arranjo de palavras usadas para especificar este conceito. Esta sentença pode tanto ser simplesmente decorada como aprendida de forma mais significativa pelo estudante, podendo, inclusive, ser uma construção pessoal do próprio aluno, por meio de uma adaptação de palavras usadas por ele para explicar o conceito segundo a sua compreensão, utilizando para isso de sua imagem de conceito. Nesse caso, uma definição de conceito pessoal pode diferir da definição formal[9] aceita pela comunidade da área de estudo.

[9] Entendemos aqui por definição formal aquela largamente aceita pela comunidade acadêmica matemática em geral, em um dado contexto histórico e social.

3. Exemplo de uma atividade desenvolvida - O problema do agricultor: custo mínimo x necessidades do terreno

3.1. Formas de Apresentação e Convenções Utilizadas

Utilizamos três formas de registro dos dados levantados: diário de campo da pesquisadora, documentos escritos pelos alunos e gravações das aulas. Nos momentos da análise dos dados, realizamos cuidadosas leituras do conteúdo do diário de campo, dos documentos escritos e das interações dos alunos com a professora.

Assim, foi selecionada, para ser apresentada nesta seção, uma atividade que foi julgada relevante. Essa atividade integra as análises que serão apresentadas no decorrer deste artigo, aparecendo de duas maneiras: (1) na forma de narrativa de um fato ou conjunto de fatos ocorridos em aula, ou (2) de comentários, explicações e esclarecimentos necessários para possibilitar uma melhor compreensão dos dados apresentados ao leitor. Consideramos conveniente, esclarecer que, para melhor organização e apresentação, destes diálogos, um conjunto de convenções foi criado com o qual o leitor se deparará na sua leitura: para o professor será utilizada a sigla Pr, Turma para um conjunto de alunos da turma, e para os alunos An, Bn, Cn, etc, onde:

- A, B, C... denotam cada aluno que participou do diálogo, ou seja, aluno A, aluno B, aluno C, etc.;
- a letra n refere-se ao grupo que ele pertence; por exemplo A1 para o aluno A que pertence ao grupo de número 1, A2 para o aluno A que pertence ao grupo de número 2 , B1 é o aluno B que pertence ao grupo 1, B2, é o aluno que pertence ao grupo 2, C3, é o aluno que pertence ao grupo 3, etc.
- o grupo n, é o grupo de número n.

Para melhor organizar a análise desta atividade a dividimos em dois momentos: **(I)** resolução do problema sem auxílio do computador, **(II)** resolução do problema com o auxílio do computador utilizando um roteiro[10] didático baseado em *mathlets* e um encaminhamento da solução[11]. De fato, tal roteiro foi utilizado como suporte para que os alunos pudessem visualizar e entender geometricamente a solução de um sistema de inequações lineares em duas variáveis como uma região do plano.

Alunos presentes: 32, divididos em 8 grupos.

[10]Este roteiro se encontra nos anexos do presente artigo.
[11] Este encaminhamento se encontra nos anexos deste artigo.

Data: 20/04/2010	**Local**: LEP n.º 02 do CCMN/UFRJ
Mídias utilizadas: Lápis, papel e lousa. site: http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/Atividades/capitulos/reta13.htm	
Objetivos Específicos: Utilizar os conhecimentos relacionados a um sistema de inequações lineares em duas variáveis em uma situação-problema. A abordagem do roteiro didático baseado nos *mathlets* consiste em identificar as regiões do plano determinadas por inequações lineares em duas variáveis e, em seguida, interpretar geometricamente a solução de um sistema composto por estas inequações como uma região que satisfaz, simultaneamente, a todas as desigualdades.	
Problema: Suponhamos que um agricultor queira adubar a sua plantação e disponha de dois tipos de adubo. O primeiro contém 3g de fósforo, 1g de nitrogênio e 8g de potássio e custa R$ 10,00 por quilo. O segundo tipo contém 2g de fósforo, 3g de nitrogênio e 2g de potássio e custa R$ 8,00 por quilo. Sabe-se que 1 kg deste adubo é suficiente para 10 m^2 de terreno e que o solo onde estão as plantações necessita de pelo menos 3g de fósforo, 1,5 de nitrogênio e 4g de potássio para cada 10 m^2. A questão que se coloca é saber quanto o agricultor deve comprar de cada adubo, para cada 10 m^2 de terreno, de modo a gastar o mínimo possível.	

Quadro 1: O problema do agricultor
Fonte: (Luz, 2011, p. 105)

3.2 Resolução do problema sem o uso do computador e nem do encaminhamento da solução

Começamos este dia de atividades no laboratório de informática entregando um problema aos alunos da turma de IC. Além dos objetivos específicos, queríamos também investigar sobre o conhecimento que estes alunos traziam, do ensino básico, relativo às inequações lineares em duas variáveis.

3.2.1 Resultados

Na resolução deste problema ficou nítido que os alunos estavam "perdidos" e não sabiam nem por onde começar. Esperamos 40 minutos para ver se alguma tentativa de solução surgia, no entanto nenhuma solução foi levantada pelos grupos.

3.2.2 Discussão

Na resolução do problema sem nenhum auxílio, os alunos apresentaram muitas dificuldades na conversão da língua natural para o registro algébrico, não conseguindo fazer a articulação entre os dois registros, ilustrando um típico exemplo de variação de não congruência de uma conversão. Além do mais, tal fato sugere que as imagens de conceitos destes estudantes estavam vazias, provavelmente por falta de experiências prévias com este tipo de exercício.

Tradicionalmente no ensino de matemática, encontramos uma grande ênfase no registro algébrico. E, na resolução de inequações não é diferente, pois o tratamento nesse registro pressupõe a utilização de propriedades das desigualdades, que muitas vezes carecem de significação para muitos estudantes. Dificilmente, nos livros didáticos, pede-se a solução gráfica, com a comparação dos gráficos das funções envolvidas na desigualdade dada. De fato, foi natural prever a dificuldade encontrada pelos estudantes ao se defrontarem com um problema como este.

3.3 Resolução do problema com o auxílio dos *mathlets* e de um encaminhamento da solução

Para melhor orientar os grupos pedimos que entrassem em uma página do site Novas Tecnologias[12] que contém o roteiro didático sobre inequações lineares em duas variáveis, visando à identificação destas desigualdades, por meio da visualização proporcionada pelos *mathlets*, como uma região do plano. Como já era esperado que os grupos tivessem muitas dificuldades para resolver o problema proposto, foi preparado um encaminhamento de solução de modo que eles conseguissem, por meio deste, interpretar a situação. Tal encaminhamento só foi entregue após o uso do computador.

Assim, com mais 50 minutos os alunos já conseguiam esboçar as retas e determinar a região do plano. Mas a dificuldade foi realmente grande, ratificando que estes alunos recém egressos do ensino médio, não tinham a mínima experiência com este tipo de problema.

Como ilustração, apresentamos o diálogo entre a professora e o grupo que chamaremos de 1:

Pr.: Quando vocês receberam a primeira folha que tinha o problema, vocês

---

[12] Site intitulado '*Novas tecnologias para o ensino – introdução a funções reais'*. Segundo, seus autores, Santos, Kubrusly & Bianchini (2004), este site tem como objetivo servir como modelo para disciplinas on-line, além de ser parte integrante de projeto de educação à distância e de formação continuada do Instituto de Matemática da UFRJ. Assim, tais autores propõem o desenvolvimento de um ambiente interativo de aprendizagem, baseado no binômio Java - web onde a linguagem java é usada para o desenvolvimento de *mathlets*. Endereço eletrônico: http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/index.htm

pensaram em alguma estratégia para resolver o problema ou ficaram perdidos?

A1: Perdidos. E, somente ao receber a segunda folha com o encaminhamento e ver a aula de inequação no computador é que deu uma clareada legal!

Pr.: Parou aí?

B1: Não, aí achamos a primeira equação $10x + 8y = C$

Pr.: O que você quer achar no problema?

A1: Quero que este custo seja mínimo.

Pr.: Mas para este custo ser mínimo tem uma condição, não é?

B1: Tem que estar dentro das três condições do problema.

Pr.: Isso, tem que satisfazer as necessidades do solo.

A1: Então fizemos a separação da equação de cada um, potássio, nitrogênio e fósforo. [...] Então, do enunciado vamos ter $\begin{cases} 3x + 2y \geq 3 \\ x + 3y \geq 1.5 \\ 8x + 2y \geq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \\ y \geq -\frac{1}{3}x + \frac{1}{2} \\ y \geq -4x + 2 \end{cases}.$

Pr.: Então, se a necessidade do solo fosse exatamente igual a 3, então a gente ia procurar a solução sobre a reta, por exemplo. Como é maior ou igual, qual a região do plano que satisfaz as três desigualdades?

B1: Aí, colocamos no gráfico as retas de potássio, nitrogênio e fósforo. [...] Aí, como são inequações vamos pintar a região que é a interseção das três [pintando na lousa de forma correta a região determinada pelas três desigualdades]

Pr.: Esta região que ele está pintando, a gente chama de região factível, o que quer dizer isso? Se a solução do problema existir, esta aí dentro! Incluindo as fronteiras, porque o terreno deve ter pelo menos igual a 3g de fósforo, 1,5g de nitrogênio e 4g de potássio.

B1: Aí pensamos que a reta do potássio ia ser paralela a função custo.

Pr.: Mas porque vocês pensaram que fosse paralela?

Pr.: Mas, elas não são paralelas, veja [indicando a declividade da "reta custo"].

A1: É mesmo, a declividade é diferente, mas é que pensamos que as soluções *seriam nos pontos* $\frac{6}{7}$ e $\frac{3}{14}$*. Achamos estes pontos como a interseções das retas.*

Pr.: Então, porque seriam esses pontos?

B1: Eles seriam os primeiros pontos onde a "reta custo", se fosse "andando", tocaria a região.

Pr.: Está melhorando, agora vocês estão raciocinando! Vocês quase foram lá! Então desenha a reta de "custo zero". Quem quer vir desenhar a "reta de custo" zero? [...]

A professora foi ao quadro e ajudou a aluna, e, ao mesmo tempo se dirigindo à turma, seguiu perguntando:

Pr.: Se o custo for zero, ela passa na origem. Mas aí eu não compraria nada. [...] mas à medida que este "C" varia [...] vamos formar uma família de retas paralelas. Como eu sei que elas são paralelas? Porque, quando eu vario o "C", geometricamente o que varia?

A1: Esta reta se "desloca" paralelamente, porque tem a mesma declividade.

Pr.: Isso, mas como eu vou saber qual vai ser o custo mínimo? Fala por palavras.

A1: Assim que ela "bater" no primeiro ponto daquela região.

Pr.: Isso, quanto mais ela "andar", mais o custo está "subindo" [...]. À medida que "C" aumenta a reta "sofre" uma translação no sentido vertical. O custo será mínimo no primeiro ponto em que a reta "interceptar" a região factível.

B1: Aí professora, vai "tocar" primeiro no [ponto] de baixo [se referindo ao ponto que tem como abscissa x= 6/7]

Pr.: Isso, esta é a interpretação geométrica. Assim, visualmente no computador vai ficar melhor. Mas, como eu resolvo algebricamente, para ter certeza?

A1: Tem igualar, tem que fazer as interseções das retas e testar os pontos para ver qual é.

Pr.: Exatamente, tem que resolver um sistema de equações. [...] e tem mais: se a "reta custo" fosse paralela a uma daquelas retas, não teria um ponto e sim um conjunto de pontos da região que iam satisfazer. Agora, vocês têm que terminar as contas para ver se a nossa intuição é verdadeira. Então vamos visualizar no *computador a região do plano factível. [...] Agora, porque esta aula é importante? Porque aqui pensamos nos exercícios antes, no entanto, lá na F2 [se referindo à sala de aula onde ocorre o curso de Cálculo], vocês não pensam antes e ficam, muitas vezes, sem saber o que estão fazendo, né?!*

Assim, naquele momento da aula, a professora entrou em uma página do site Novas Tecnologias para o Ensino acessando um ***construtor de mathlets***[13] visando exibir aos estudantes a região factível (região azul), a função custo (reta preta) (ver figuras 1 e 2) e, por fim, a solução gráfica do problema (ver figura 2).

Figura 1: Região factível e função custo – problema do agricultor
Fonte: (Luz, 2011, p. 109)

No entanto, um fato interessante ocorreu: os alunos pediram à professora que esta os ensinasse a configurar os *mathlets* para que todos juntos pudessem determinar a solução gráfica do problema.

Desta maneira, à medida que a representação gráfica da situação problema foi sendo construída pela professora em conjunto com os estudantes, estes ficavam "empolgados", pois afinal eles estavam participando ativamente na construção da solução de um problema que, em um momento inicial daquela aula, havia sido considerado extremamente difícil de ser resolvido, um grande desafio.

[13] Um construtor de *mathlets* é uma biblioteca de *mathlets* configuráveis, onde a alteração de alguns parâmetros é capaz de produzir uma nova aplicação, completamente diferente da anterior. (Paixão, 2008). Com o objetivo de esclarecer o leitor, existem *mathlets* que não são configuráveis e para fim de identificação, todos os *mathlets* que são construtores configuráveis apresentam o botão "*config*" em sua janela.

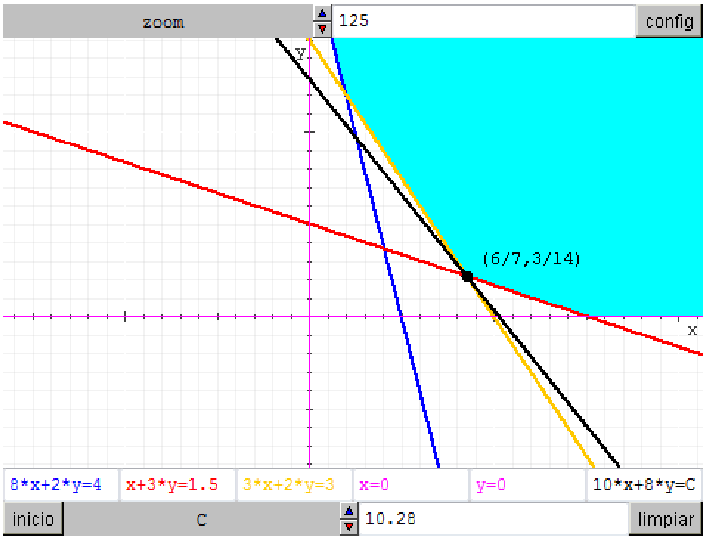


Figura 2: Solução gráfica para o problema do agricultor
Fonte: (Luz, p. 110)

3.3.1 Resultados

Na resolução do problema com o auxílio do computador e de um encaminhamento, 5 grupos ($\frac{5}{8}$ do total), que vamos chamar de 1, 2, 3, 4 e 5 –, determinaram as inequações lineares, a função custo e, em seguida, a região do plano comum as todas a estas desigualdades, obtendo a resposta correta. O grupo 7 ($\frac{1}{7}$ do total) cometeu um equívoco na declividade de uma das retas e, consequentemente, não obteve a resposta correta, resolvendo parcialmente o problema. Já os grupos, que chamaremos por 6 e 8 ($\frac{2}{8}$ do total) – não conseguiram resolver o problema. Esses dois últimos grupos não identificaram a região do plano corretamente e nem determinaram graficamente a função custo.

3.3.2 Discussão

A maioria dos grupos ($\frac{6}{8}$ do total) após o uso dos *mathlets* e o encaminhamento fornecido, foi capaz de apresentar três representações e fazer duas conversões (da língua natural para o registro algébrico, e do algébrico para o gráfico), revelando que ocorreu um enriquecimento de suas imagens de conceito relativo às inequações lineares em duas variáveis. Os demais grupos ($\frac{2}{8}$ do total), apesar de terem conseguido fazer a conversão da língua natural para o algébrico, não foram capazes de realizar a conversão entre um registro discursivo (língua natural) para um não discursivo (gráfico) da forma adequada, mostrando que as suas imagens de conceito relativo à inequações se mantiveram ainda restritas, mesmo depois da intervenção ter sido aplicada. Uma observação adicional é que o insucesso de muitos alunos neste tipo de problema, segundo Duval, pode ser justificado porque a conversão semiótica se depara com dificuldades como o fenômeno de não congruência, pois os alunos não reconhecem o mesmo objeto por meio de duas representações diferentes.

Considerações Finais

Concluímos de uma forma geral que o processo de visualização, não estando subordinado à Álgebra (VILLARREAL, 1999), proporcionado pelo uso de roteiros didáticos apropriados em um ambiente em que as interações entre os participantes e as mídias foram constantes, teve um papel de destaque no enriquecimento da imagem de conceito dos estudantes (LUZ, 2011).

Dessa forma, mostramos que os aspectos visuais, algébricos, tabulares (numéricos) e verbais se complementaram no processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Introdução ao Cálculo. Somando-se a esses fatores está a importante atuação da professora na mediação pedagógica, auxiliando os alunos a interpretarem da melhor forma os gráficos projetados na tela do computador e a coordenar os diversos tipos de registros de representações semióticas. A presente abordagem também estimulou a participação do aluno no seu processo de aprendizagem de forma participativa, crítica e criativa.

Referências

ALLEVATO, N. S. G. *Associando o computador à resolução de problemas fechados*: análise de uma experiência. (2005). Tese (Doutorado. em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R (2009). Ensinando Matemática na Sala de Aula através da Resolução de Problemas. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, Ano XXXIII, n.55, p.1-19, jul./dez. Disponível em <http://www.ufrrj.br/SEER/index.php/gepem/article/view/54/87>. Acesso em: 03 jul. 2011.

ARCAVI, A.; HADAS, N. (2000) Computer mediated learning: An exemple of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5: 25-45.

BARUFI, M. C. B. (1999). *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral.* São Paulo. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, E. M. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. New York: Springer.

BORTOLOSSI, H. J. (2010). Cálculo a Uma Variável: Diferenciando Problemas e Integrando Ações. In: *V Encontro Estadual de Educação Matemática do Rio de Janeiro*.

DOERING, C. I; NÁCUL, L. B. C.; DOERING, L. R. (2004). O programa Pró-Cálculo da UFRGS. In: CURY, H. N. (Org) *Disciplinas matemáticas em cursos superiores:* reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS. p. 201-223.

DUVAL, R. (2009). Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machadado, S. D. A. (Org) *Aprendizagem em Matemática* – Registros de Representação Semiótica, Campinas, Editora Papirus. p. 11-33.

GIRALDO, V. (2004). *Descrições e conflitos computacionais:* o caso da derivada. Tese (Doutorado em Ciências) – COPPE. Rio de Janeiro: UFRJ.

GOMES, G. H.; LOPES, C. M. C.; NIETO, S. S. (2005). Cálculo zero: uma experiência pedagógica com calouros nos cursos de engenharia. In: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 33, 2005, Campina Grande. *Anais...* Campina Grande: UFPB. CD-ROM.

LUZ, V. M. (2011). *Introdução do Cálculo:* Uma Proposta Associando Pesquisa e Intervenção. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

MACHADO, S. D. A. (2009) (Org). *Aprendizagem em Matemática:* Registros de Representação Semiótica. Campinas, S.P: Papirus.

NASCIMENTO, J. L. (2000). Uma Proposta metodológica para a disciplina de Cálculo I. *VI Encontro de Educação em Engenharia,* UFRJ. Disponível em: <http://www.dee.ufrj.br/VIIEEE/VIEEE/artigos/4/04.doc>. Acesso em: 3 set. 2010.

ONUCHIC, L. R. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.(Org.). *Pesquisa em Educação Matemática.* São Paulo: Editora UNESP. cap. 12. p.199-220.

OLIMPIO JUNIOR, A. (2005). *Compreensões de Conhecimentos de Cálculo Diferencial no primeiro ano de Matemática* – Uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

PAIXÃO, V. C. P. S. (2008). *Mathlets:* Possibilidades e Potencialidades para uma Abordagem Dinâmica e Questionadora no Ensino de Matemática. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

PEREIRA, V. M. C. (2009). *Cálculo no Ensino Médio:* Uma proposta para o problema da variabilidade. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

QUINTANEIRO, W. (2010). *Representações e definições formais em trigonometria no ensino médio*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

REIS, F. da S. (2001). *A Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise:* A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos. Tese de Doutorado em Educação. Campinas: UNICAMP.

REZENDE, W. M. *O Ensino de Cálculo:* Dificuldades de Natureza Epistemológica. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

SANTOS, A. R.; KUBRUSLY, R. S.; BIANCHINI, W. (2004). *Mathlets*: Applets Java para o Ensino de Matemática*; Anais II HTEM;* UERJ: Rio de Janeiro.

TALL, D.; VINNER, (1981). S. *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, vol. 3, n. 12. p. 151-169.

TALL, D. (1989). *Concept Images, Generic Organizers, Computers, and Curriculum Change*. For the Learning of Mathematics*,* p.37-42.

VILLARREAL, M. E. *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas.* (1999). 402f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

7. Anexos

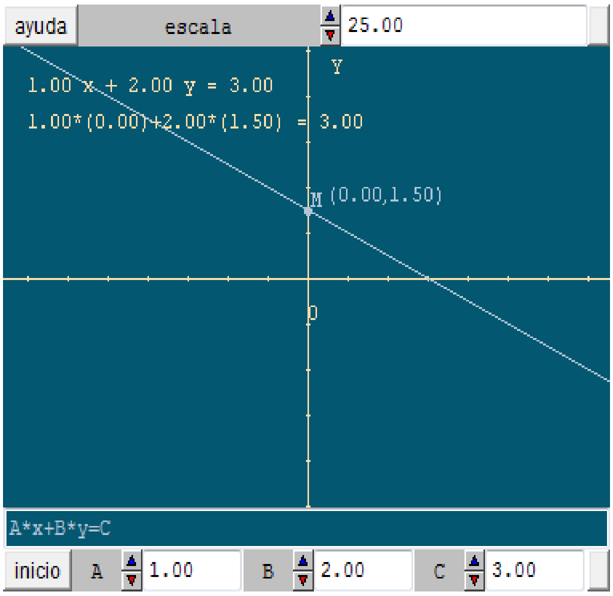
Neste anexo podemos observar como se dá a utilização dos mathlets para identificar as regiões do plano determinadas por inequações do 1º grau em duas variáveis ou como um sistema de inequações do mesmo tipo. O roteiro didático abaixo está disponível na internet[14] e faz parte do Projeto Novas Tecnologias no Ensino – Santos, Kubrusly e Bianchini (2004) e forneceu suporte ao “Problema do Adubo”.

7.2 Gráficos de inequações de primeiro grau com duas incógnitas

Na cena abaixo representamos uma reta de equação $A x + B y + C = 0$. O objetivo desta atividade é caracterizar as regiões do plano determinadas pelas desigualdades $A x + B y + C > 0$, $A x + B y + C < 0$, $A x + B y + C \leq 0$, $A x + B y + C \geq 0$.

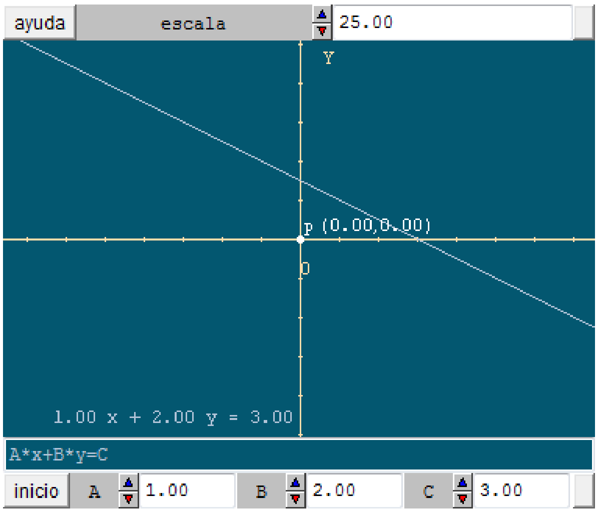
(a) Clicando nas setinhas correspondentes, modifique o valor dos parâmetros A, B e C e observe o efeito dessas modificações sobre o gráfico da reta. Observe também como varia a equação da reta dada.
(b) Relacionando as constantes A, B e C com as constantes m e b que aparecem na equação da reta escrita na forma $y = mx + b$, você é capaz de justificar as variações observadas no item (a)?
(c) Arraste o ponto M sobre a reta. O que você pode concluir? Como podemos caracterizar os pontos que pertencem a uma dada reta?

[14] http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/Atividades/capitulos/reta12.htm



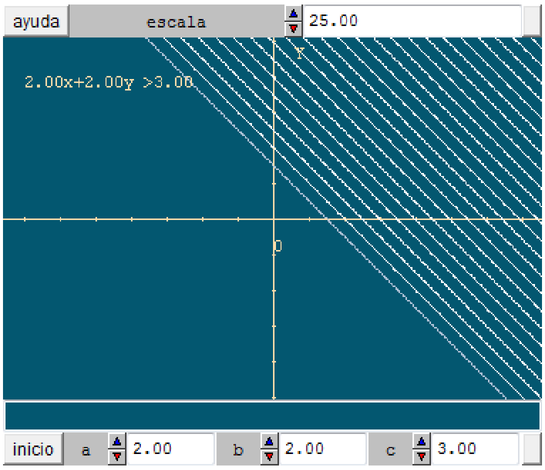
(d) Em quantas regiões uma reta qualquer divide o plano?

Uma reta qualquer divide o plano em duas regiões, ditas semi-planos. A atividade abaixo tem como objetivo caracterizar estas regiões. Nesta cena, o ponto P é móvel. Você pode arrastá-lo por todo o quadro.



(a) Faça o ponto P coincidir com um dos pontos da reta. Como você pode ter certeza de que o ponto P está realmente sobre a reta?
(b) Qual a desigualdade satisfeita pelas coordenadas do ponto P, quando o mesmo se encontra na região acima da reta dada?
(c) Qual a desigualdade satisfeita pelas coordenadas do ponto P, quando o mesmo se encontra na região abaixo da reta dada?
(d) Varie os valores dos parâmetros A, B e C e repita as atividades propostas nos itens anteriores.
(e) Dada uma reta de equação Ax + By + C = 0, como é possível caracterizar os pontos que pertencem a esta reta? Como é possível descrever, algebricamente, as duas regiões distintas (semi-planos) em que esta reta divide o plano?
(f) Como podemos interpretar, geometricamente, as regiões do plano determinadas pelas desigualdades $A\,x + B\,y + C \geq 0$ e $A\,x + B\,y + C \leq 0$.

Observe a cena a seguir. Como já vimos, a reta Ax + By + C = 0 divide o plano em duas regiões: uma delas formadas pelos pontos que satisfazem à desigualdade Ax + By > C e a outra, pelos pontos que satisfazem à desigualdade Ax + By > C.



Modifique os valores dos parâmetros A, B e C e observe o efeito sobre a cena. Conclua:

(a) Que desigualdade é satisfeita pelos pontos da região hachurada?

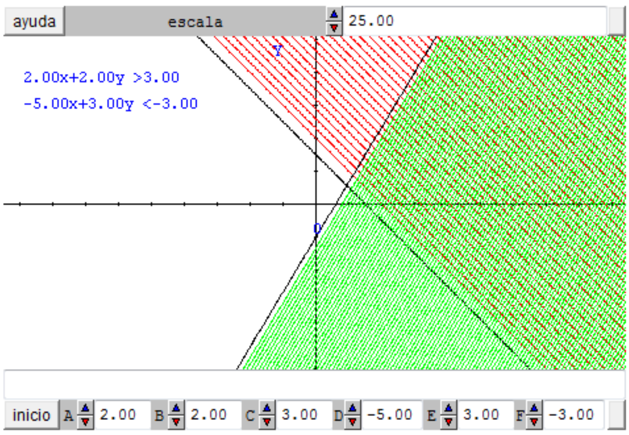
(b) Como é possível caracterizar estes pontos?

(c) Que regiões do plano são representadas por inequações do tipo Ax + By + C > 0 e Ax + By + C < 0?

(d) Como é possível interpretar, geometricamente, as soluções de uma inequação do primeiro grau em duas variáveis x e y?

7.2 Sistemas de Inequações Lineares com duas Incógnitas

Na cena abaixo representamos as regiões do plano determinadas pelas desigualdades A x + B y + C > 0 (em vermelho), D x + E y + F < 0 (em verde). O que representa a interseção das duas regiões hachuradas?



(a) Modifique os parâmetros correspondentes para obter a representação gráfica das inequações $x + 2y > 2$ e $x + 2y < -2$. O que ocorre neste caso? O que você pode concluir?

(b) Descreva com suas próprias palavras como podemos interpretar, geometricamente, a solução de um sistema de inequações lineares com duas incógnitas?

7. 3 Encaminhamento da solução para o problema do adubo

Encaminhamento da solução:

a) Sendo x quantidade a ser comprada do adubo A e y a quantidade a ser comprada do adubo B, escreva uma expressão matemática que determina o custo total da compra.

b) Pelo enunciado acima é fácil perceber que x e y devem obedecer a determinadas restrições de modo que as necessidades de minerais do terreno sejam atendidas.

Escreva as desigualdades que traduzem, matematicamente, estas restrições.

c) Esboce a região do plano definida pelas desigualdades obtidas no item anterior.

d) Esboce no mesmo desenho a curva de custo zero.

e) Você é capaz de conjecturar em que pontos dessa região o custo será mínimo?

f) Resolva o problema.