

**Presencia de interpretaciones bayesiana y frecuentista de la
probabilidad en libros de estudio en francia**
**Présence des interprétations bayésiennes et fréquentistes de la probabilité dans les
manuels scolaires français**
**Presence of bayesian and frequentist interpretation of probability in french's cours
books**

PABLO FABIAN CARRANZA¹

Resumen

En esta comunicación nos interesamos de manera general a las interpretaciones en Estadística. Para ello, abordamos uno de los conceptos claves en toda inferencia, el de probabilidad y sus dos posibles interpretaciones, la bayesiana y la frecuentista. En particular aquí nos centramos en la presencia de ambas interpretaciones de la probabilidad en los libros de curso franceses vigentes en el año 2007. Para tal estudio, se construyó un conjunto de variables dicotómicas que luego fueron tratadas mediante el Análisis Estadístico Implicativo. Las reglas de implicaciones parciales obtenidas con tal método nos permitieron identificar tendencias de presencia de tales interpretaciones en los ejercicios y problemas propuestos por los libros de curso retenidos.

Palabras-claves: Probabilidad, Bayesiana, Frecuentista, Enseñanza, Estadística.

Resume

Dans cette communication, nous nous intéressons de manière générale aux interprétations en Statistique. Pour cela, nous abordons un des concepts clefs dans toute inférence, celui de la probabilité et de ses deux interprétations : bayésienne et fréquentiste. En particulier, nous nous centrons ici sur la présence des deux interprétations de la probabilité dans les manuels scolaires français en vigueur en 2007. Pour cela, nous avons construit un ensemble de variables dichotomiques que nous avons ensuite étudié en nous servant de l'Analyse Statistique Implicative. Les règles d'implication partielles ou quasi-règles ainsi obtenues nous ont permis d'identifier des tendances relatives à la présence des deux interprétations de la probabilité dans les exercices et problèmes proposés dans l'échantillon de manuels scolaires retenus.

Mots-clés: Probabilité, Bayésienne, Fréquentiste, Enseignement, Statistique.

Abstract

In this paper we are interested, in a general way, on statistics interpretations. For that, we focused our attention on a key concept in inferencial statistic: probability notion and its two interpretations: bayesian and frequentist. More precisely, our subject for this study was to analyse the presence of these two interpretations on french textbooks used in 2007 year. For that, we build a set of dichotomical variables that we treat with Implicatif Statistics Analyse. The rules of partial implications obtained allow us to identify tendencies of presence of these two interpretations on problems and exercises of textbooks analyzed.

Keywords: Probability, Bayesian, Frequentist, Teaching, Statistique.

Universidad Nacional de Río Negro. Brentana 350. Allen, Río Negro. Argentina, pcarranza@unrn.edu.ar

Introducción

Interesados en la enseñanza de la probabilidad a nivel secundario nos hemos interrogado primeramente sobre los posibles significados de este término en Estadística. Para ello y a modo de referencia, llevamos a cabo un estudio epistemológico sobre este concepto en el cual consideramos sus orígenes y evolución hasta nuestros días.

Una de las principales conclusiones a las que nos permitió llegar este estudio fue la referida a la dualidad de significado de la probabilidad. En efecto, los diferentes autores consultados (Bayes, 1763; Bernoulli, 1713; Condorcet, 1805; Dale, 1999; De Finetti, 1974; Driesbeke, Fine, & Saporta, 2002; Hacking, 1990, 2002; Keynes, 1921; Laplace, 1771; Leibniz, 1765) nos confirman que el concepto de probabilidad fue concebido admitiendo dos significados y que esa dualidad de interpretaciones permanece aún hoy vigente. Estos dos significados son los conocidos como frecuentista y bayesiano. Los presentaremos, al menos brevemente, pues ellos serán centrales en nuestro trabajo.

La dualidad de la probabilidad

El concepto de probabilidad en Estadística puede interpretarse de dos grandes maneras posibles. Cada una de estas interpretaciones está asociada a enfoques estadísticos inferenciales bien precisos, tanto por su métodos como por sus marcos filosóficos respectivos (Jaynes, 1980; Popper, 1959). Aquí solo nos contentaremos con una somera presentación de las dos interpretaciones en Estadística.

Enfoque frecuentista

Para esta corriente estadística, la probabilidad representa, grosso modo, la proporción de aparición de un fenómeno dado cuando una experiencia se la reproduce un número infinito de veces y bajo condiciones similares (en teoría). Así, la probabilidad es una tendencia a largo plazo de la frecuencia de aparición de un evento. En este sentido, la noción frecuentista de la probabilidad se encuentra fuertemente asociada a la ley de los grandes números.

Enfoque bayesiano

Para esta corriente la probabilidad representa una medida de certeza que un individuo porta sobre una proposición dada. De esta manera, los valores 0 y 1 son interpretados como certeza de la falsedad y de la veracidad respectivamente de una proposición. Con

el mismo criterio, valores de probabilidad cercanos a 0 representan grados de certeza menores que aquellos cercanos a 1. Para este enfoque, un teorema pilar lo constituye el llamado teorema de Bayes (Bayes, 1763).

En alguna época irreconciliables estos enfoques, hoy se admite una natural coexistencia de ambos enfoques producto de las condiciones históricas de su concepción (Hacking, 2002), al punto que es bastante reconocido hoy la imbricación de ambas interpretaciones (Carranza, 2009).

Esta dualidad resulta sin dudas compleja, sin embargo nos parece determinante a la hora de interesarnos en temas relacionados a la interpretación de tomas de decisiones y procedimientos estadísticos tales como los tests estadísticos y su proceso de enseñanza - aprendizaje (Borovcnik, 2005; Carranza, 2009; D'Agostini, 2004; Dale, 1999; Lecoutre, 2005; Oriol & Régnier, 2003).

La dualidad en la enseñanza secundaria

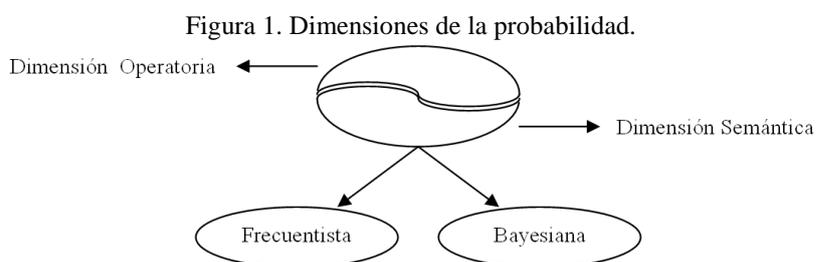
Partiendo entonces de una dualidad de significado de la probabilidad, nos interrogamos sobre su transposición didáctica (Chevallard, 1985). Es decir, nos interesamos al tipo de transformaciones que ella sufre a lo largo del natural proceso de modificaciones, adaptaciones, simplificaciones, etc., que se ejercen sobre, en este caso, un concepto dual como es el de probabilidad en Estadística.

Ahora bien, durante nuestro estudio epistemológico sobre la noción de probabilidad en Estadística se fue consolidando una suerte de hipótesis que podríamos caracterizar como de persistencia de la dualidad en la transposición didáctica. En efecto, este estudio nos permitió identificar no solo la existencia de dos interpretaciones de la probabilidad sino también la estrecha relación que las une, al punto tal de considerarlas indisociables. En otras palabras, considerábamos que la dualidad del objeto epistemológico, persistiría y resistiría su transposición didáctica manifestándose inevitablemente en el objeto a enseñar.

Pero antes de continuar con el estudio de su transposición didáctica, nos parece necesario consagrar algunas líneas a la caracterización del concepto de probabilidad. Consideramos dos dimensiones en él, una llamada operatoria y la otra semántica. Ambas dimensiones constitutivas del concepto de probabilidad, por lo que resulta imposible reducirlo a solo una de ellas. Por ejemplo, y a modo ilustrativo de la importancia de estas dos dimensiones, diremos que la definición de la probabilidad en

tanto que cociente de casos favorables y casos posibles resulta incompleta pues carece de referencias a la dimensión semántica, en otras palabras, se encuentra ausente el significado estadístico del valor calculado.

Ambas dimensiones están estrechamente relacionadas, sin embargo podemos decir que aquellos aspectos referidos al cálculo de una probabilidad pertenecen en principio a la dimensión operatoria y los relacionados con lo interpretativo, a la dimensión semántica. Esta última a su vez, se subdivide en dos posibles interpretaciones, las llamadas frecuentista y bayesiana. El esquema (Figura 1) representa estos distintos elementos del concepto de probabilidad.



Es precisamente el estudio de la transposición didáctica de esa dualidad la que nos interesó analizar, testeando nuestra hipótesis de su persistencia en la transposición didáctica.

Ahora bien, en los programas escolares a nivel secundario de muchos países la probabilidad es presentada como frecuentista, sin mención a la interpretación bayesiana. Esto parecería refutar de manera inmediata nuestra hipótesis de persistencia de la dualidad en la transposición didáctica. Sin embargo, nosotros dudábamos de la desaparición efectiva de la noción bayesiana por omisión originada en los programas. Nuestra hipótesis era que la dualidad es una característica intrínseca a la probabilidad y que ella reaparecería en las aulas, más allá de la desaparición en programas oficiales.

Dada la complejidad de la tarea de observación de la reaparición de la dualidad en las aulas, restringimos nuestro objeto a estudiar los recursos didácticos frecuentados por alumnos y profesores. Más precisamente, nos centramos en el tipo de ejercicios y/o problemas habitualmente propuestos a los alumnos. De esta manera, nuestro objeto de estudio se tradujo en observar la presencia potencial de cada una de las interpretaciones de la probabilidad en ejercicios y problemas propuestos a los alumnos.

El carácter potencial de tales observaciones se refiere al hecho de que, al nosotros desconocer el uso que profesores y alumnos harían de esos problemas, nos resultaba

imposible predecir si efectivamente tal o cual interpretación de la probabilidad sería efectivamente tratada.

Como fuente de ejercicios y problemas, hemos tomado los libros de texto, centrándonos en aquellos correspondientes al nivel de escolaridad donde la probabilidad es introducida en los programas oficiales.

Para determinar la presencia potencial de una u otra interpretación de la probabilidad en un ejercicio o problema dado, nos servimos de un conjunto de elementos característicos asociados a cada una de las interpretaciones. Así por ejemplo, si en un ejercicio o problema identificábamos los elementos característicos asociados a la noción bayesiana, concluíamos que el abordaje en clase de ese ejercicio o problema facilitaría la construcción de la noción bayesiana de la probabilidad; lo mismo para la noción frecuentista.

En este esquema subyace una nueva hipótesis, ella se refiere a una suerte de biyección entre dos conjuntos, por un lado el de ejercicios y problemas y por el otro el de interpretaciones. Quien permite establecer la relación es el conjunto de elementos característicos. El detalle y justificación de tales elementos característicos es principalmente de orden epistemológico, el lector podrá encontrar desarrollada su fundamentación en otros trabajos (Carranza, 2009).

Para este estudio de la potencial presencia de la dualidad de la probabilidad en los ejercicios y problemas en los libros de texto, estos elementos característicos tomaron forma de variables dicotómicas (presencia o ausencia de una característica). De esta manera y mediante un estudio estadístico, fueron analizados los ejercicios y problemas. El estudio se realizó en el año 2007 y por razones contextuales, fue llevado a cabo sobre manuales franceses de escuelas secundarias, aunque consideramos que las conclusiones a las que hemos arribado son relativamente extrapolables a otros países, en particular a Argentina. Presentaremos de manera resumida este estudio llevado a cabo sobre los manuales o libros de texto en vigencia en ese año en Francia.

Un estudio estadístico sobre la presencia de la dualidad en libros de texto franceses

Al momento del estudio (año 2007), la probabilidad era introducida en los programas franceses en el penúltimo año de la educación secundaria (aproximadamente alumnos de 16 años). Nosotros nos hemos centrado en libros de texto de dos

orientaciones, las llamadas ES y S. La primera por economía y ciencias sociales, la segunda por científica (matemática, biología, física, química).

Para el estudio estadístico, tuvimos un conjunto de variables, todas dicotómicas. Un grupo de estas variables correspondía a aspectos pedagógicos (rol en los aprendizajes, su extensión, su ubicación en el capítulo, etc.), otro grupo de variables tendía a analizar cuestiones vinculadas a la articulación entre significante y significado (Duval, 2006; Peirce, 1932). Un último grupo orientado a identificar la interpretación subyacente al ejercicio o problema en términos frecuentista o bayesiano.

La metodología utilizada fue la del análisis estadístico implicativo. Este tipo de análisis (Gras et al., 1996), (Gras, Bailleul, 2000) (Gras, Régnier, Guillet, 2009) (Orus, Zemora, Gregori, 2009) (Gras, Régnier, Marinica, Guillet, 2013) nos permitió modelizar el estudio bajo la forma de reglas de inferencia parcial en los ejercicios analizados. Por ejemplo, una regla que de forma general responde a la estructura « si a entonces casi b » se materializó en nuestro caso en « si las características del problema responden al enfoque bayesiano, entonces el enunciado no realiza preguntas sobre la interpretación asociada al problema».

Este tipo de reglas nos permitió descubrir tendencias en los ejercicios de los dos libros de texto retenidos para este estudio. Como comentamos anteriormente, las variables a priori consideradas no son suficientes para determinar la interpretación que efectivamente se presentaría en clase para un ejercicio dado. La gestión de profesor y alumnos determinan la evolución de los conceptos subyacentes en un ejercicio o problema. Este estudio pretende solamente bosquejar tendencias en lo que se refiere a potencialidades en los ejercicios y problemas que los manuales proponen a profesores y alumnos. Presentaremos brevemente el conjunto de variables utilizadas.

Presentación de las variables retenidas

Los dos libros de clase observados fueron editados en 2001: el manual de Première ES, por la editorial Bréal (Breal ES a partir de ahora) y el de Première S por Nathan (Nathan S).

El manual Breal ES propone en el capítulo probabilidad, treinta y un ejercicios (pagina 98 a 103) repartidos en tres secciones. « Nociones principales »: Ejercicios 1 a 12. « Técnicas fundamentales»: Ejercicios 13 a 19. « Ejercicios»: Ejercicios 20 a 31.

Para el manual NathanS, el número de ejercicios es significativamente mas importante, hay setenta y tres (página 224 a 234) repartidos en cuatro secciones: «Nociones principales»: Ejercicios 1 a 20. «Para aprender e investigar»: Ejercicios 21 a 25. «Para progresar»: Ejercicios 26 a 67. «Problemas de síntesis»: Ejercicios 68 a 73. Hemos considerado 21 variables, de las cuales todas toman valores dicotómicos (0 o 1). A continuación detallaremos los criterios que deben satisfacerse para que las variables tomen el valor 1, para ello se han considerado las condiciones de aplicación del método, como por ejemplo la existencia de 10 individuos.

- Variables relacionadas a la extensión del texto del ejercicio (A):

Código	Etiqueta	Descripción
A1	Líneas (1-10)	El ejercicio tiene 10 líneas como máximo
A2	Líneas (11-40)	El ejercicio tiene mas de 10 líneas

- Variables relacionadas al número de preguntas (B):

Código	Etiqueta	Descripción
B1	Preguntas(1-2)	El ejercicio tiene menos de tres preguntas
B2	Preguntas(3-4)	El ejercicio tiene tres o cuatro preguntas
B3	Preguntas(5-plus)	El ejercicio tiene mas de cuatro preguntas

Con estas dos variables, hemos pretendido observar la posible relación entre la noción subyacente de la probabilidad en un ejercicio y el tamaño en líneas de texto del ejercicio.

- Variables relacionadas al contexto del ejercicio (E):

Esta categoría nos informó del tipo de contexto propuesto al alumno para cada ejercicio. Con estas categorías describimos la tendencia de tipos de problemas a los que se asociaría la probabilidad, según los manuales.

Código	Etiqueta	Descripción
E1	Contexto (Urnas-Juegos)	Urnas, juegos, etc.
E2	Contexto (Clase - Vida cotidiana)	Referencia al entorno del alumno o de un trabajo
E3	Contexto (Sin o Matemática)	Ausencia de contexto o contexto matemático

- Variables relacionadas a las hipótesis del modelo (F):

A partir del estatuto atribuido a las hipótesis en cada ejercicio, buscamos identificar el tipo de razonamiento asociado. Más precisamente, si se probabiliza (Carranza, 2009):

- ✓ en el sentido deductivo (desde las hipótesis hacia la serie infinita), razonamiento asociado al enfoque frecuentista.
- ✓ en el sentido inductivo (desde las hipótesis hacia un elemento de la serie infinita), razonamiento típico del enfoque bayesiano, con un posible aporte del principio frecuentista
- ✓ en el sentido abductivo de Peirce (desde las evidencias hacia las hipótesis), razonamiento también asociado al enfoque bayesiano de la probabilidad.

Para el nivel educativo en cuestión, no está previsto en los programas ninguna herramienta inferencial, por lo que no es de esperar entonces que una probabilidad porte sobre una hipótesis de un modelo.

Código	Etiqueta	Descripción
F1	Hipótesis (Admitidas)	Se admiten hipótesis del modelo, se especifica el conjunto de eventos posibles
F2	Hipótesis (AdmitidasFrecuen o P(A))	Se admiten hipótesis por la proporción en una muestra importante o explícitamente dadas
F3	Hipótesis (para decidir)	Para decidir hipótesis a partir de la proporción de una pequeña muestra...

- Variables relacionadas con un eventual pedido de cálculo de probabilidad (H): Aquí observamos si el ejercicio se interesa o no a los aspectos calculatorios de la probabilidad. Esta variable será confrontada con el eventual pedido de interpretación de cálculo de probabilidad realizado (J).

Código	Etiqueta	Descripción
H1	CalculoProbabilidad(Oui)	Calculo de P se demanda explícita o implícitamente
H2	CalculoProbabilidad(Non)	Calculo de P no se demanda

- Variables relacionadas con características de cada enfoque de la probabilidad (I): Con estas variables buscamos complementar la información obtenida de otras variables, en particular sobre la noción subyacente de la probabilidad.

Código	Etiqueta	Descripción
--------	----------	-------------

I1	RepeticiónExper(Oui)	Mención explícita o implícita para la repetición de la experiencia aleatoria
I2	RepeticiónExper(Non)	Ninguna mención

- Variables relacionadas al pedido interpretación de la probabilidad (J):

Esta variable confrontada a las variables I (repetición de la experiencia), F (naturaleza de las hipótesis) y K (naturaleza de los eventos) nos informa sobre la noción subyacente de la probabilidad en un ejercicio y el eventual interés por su interpretación.

Código	Etiqueta	Descripción
J1	InterprProbabilidad(Oui)	La interpretación de P es explícita o implícitamente demandada
J2	InterprProbabilidad(Non)	No hay interpretación demandada

- Variables relativas a la naturaleza del evento a probabilizar (K):

Estas variables pretenden observar particularmente la naturaleza del evento A en una probabilidad $P(A)$. Tres casos son posibles:

- ✓ A es una serie infinita de eventos susceptibles de reproducirse: objeto de naturaleza frecuentista.
- ✓ A es un evento en el que la reproductibilidad o bien es imposible o bien ella conduce a modificar los valores otorgados a la probabilidad, objeto de naturaleza bayesiana.
- ✓ A es un caso genérico o evento simple. Desde un enfoque frecuentista, no correspondería interesarse en esta cuestión, ella es de naturaleza bayesiana.

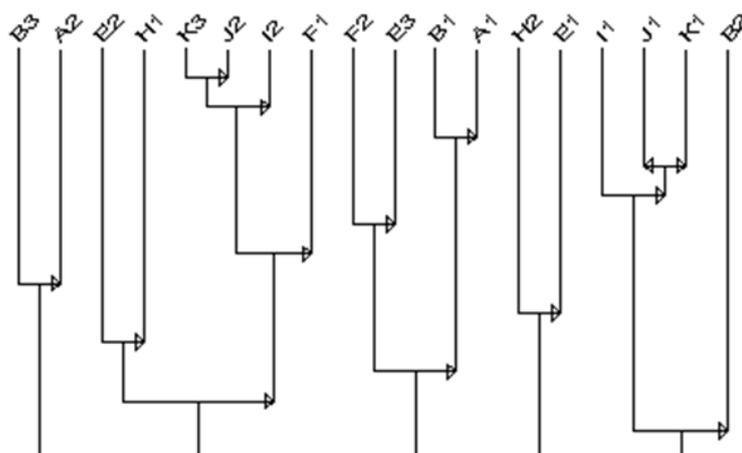
Código	Etiqueta	Descripción
K1	NaturaA(Serie)	El evento sobre el que se probabiliza es la tendencia a largo plazo
K2	NaturaA(CasoUnico)	
K3	NaturaA(Caso Genérico)	
K4	NaturaA(Ambigüo)	

Estudio de datos

Comenzamos la presentación de los resultados con el análisis de los ejercicios y problemas del libro Nathan. Sin duda se prestó mejor para un estudio estadístico, dado

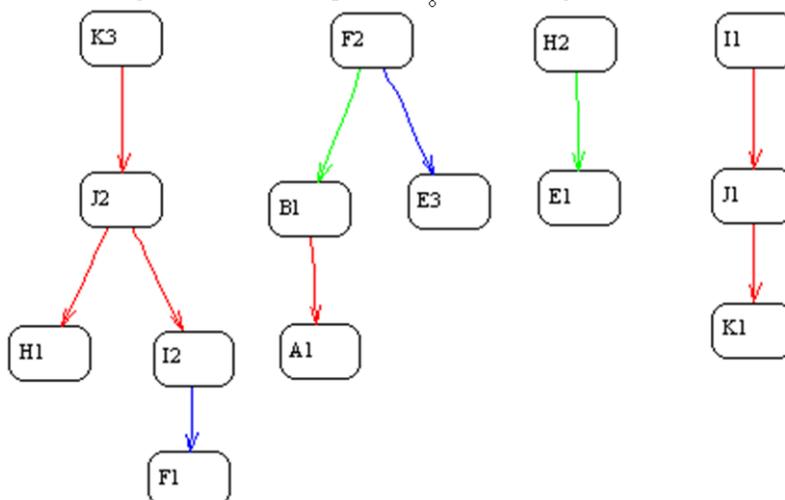
el numero importante de ejercicios en el capítulo probabilidad. La Figura 2 representa el árbol cohesitivo para este manual.

Figura 2. Árbol cohesitivo nathan.



Con el análisis implicativo a un sesgo de 0.90, se retienen cuatro conjuntos dando lugar a tipologías de ejercicios diferentes (Figura 3).

Figura 3. Gráfico implicativo. Nathan Sesgo 0,90.



Ejercicios genéricos (bayesianos)

El primer conjunto [K3, J2, I2, F1, (H1)] representa cerca de dos tercios de los ejercicios del capítulo probabilidad de este manual. Este grupo da cuenta del ejercicio tipo al que se confrontan los alumnos que recurren a este manual. En ellos, se trata de razonar acerca de un caso genérico (K3) sin que se sugiera la repetición de la experiencia y sin que se demande ninguna interpretación del resultado. Por otro lado,

los ejercicios que se apoyan en un contexto escolar o del mundo laboral implican la rama H1 representando la explicitación de un cálculo de la probabilidad.

Así, el conjunto mas típico de los ejercicios propuestos en esta clase, por interesarse a eventos simples, corresponde al enfoque bayesiano. Sin embargo, la tendencia es de no interrogar sobre el significado de la probabilidad sino de ejercitar al alumno en estrategias de cálculo.

Ejercicios frecuentistas

La clase [K1, I1, J1] es muy homogénea en este manual y presenta ejercicios basados en una secuencia (K1) con una repetición de la experiencia (I1) et una demanda de interpretación (J1). Este grupo, reducido en número (seis ejercicios) se corresponde con las consignas del programa de asociar el cálculo de la probabilidad a una interpretación frecuentista.

Ejercicios de práctica

Observamos también un pequeño conjunto de ejercicios (una decena) [F2, E3, B1, A1] típicamente cortos en texto, sin contexto y con el dato de la probabilidad $P(A)$ suministrado en el enunciado. Se trata de ejercicios de aplicación de aspectos calculatorios de la probabilidad.

Ejercicios sobre urnas y juegos

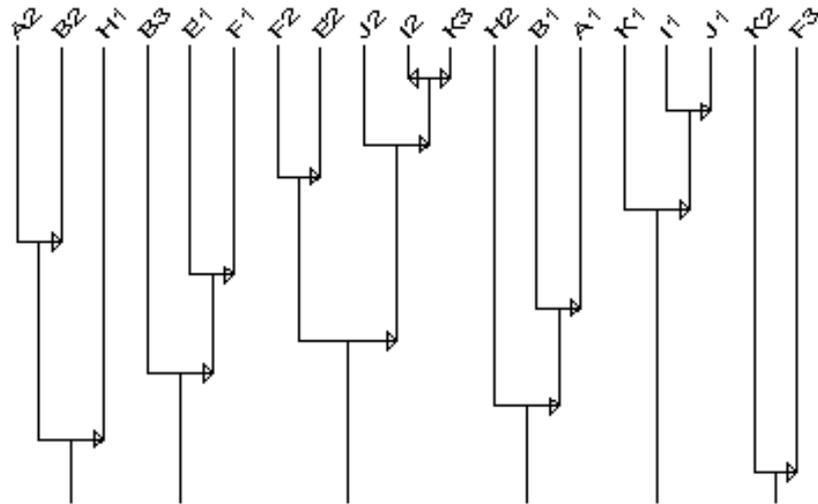
La clase [H1, E1] solo muestra que los ejercicios con juegos y urnas forman una entidad autónoma y que en ellos las hipótesis del modelo son admitidas a partir del enunciado.

Así, en este manual encontramos pocos ejercicios de naturaleza frecuentista. Los más numerosos resultaron ser los de naturaleza bayesiana. Sin embargo, en estos últimos, la atención está centrada en los aspectos calculatorios de la probabilidad. De esta manera, el eventual significado construido a partir de su resolución quedaría enteramente a cargo del alumno, pues en principio, la interpretación subyacente no forma parte de los elementos a institucionalizar.

Por otro lado, de las tendencias de los ejercicios de este manual, se desprende una asociación de la noción de probabilidad a actividades lúdicas o recreativas y no vinculado a tomas de decisiones del tipo laboral o personal.

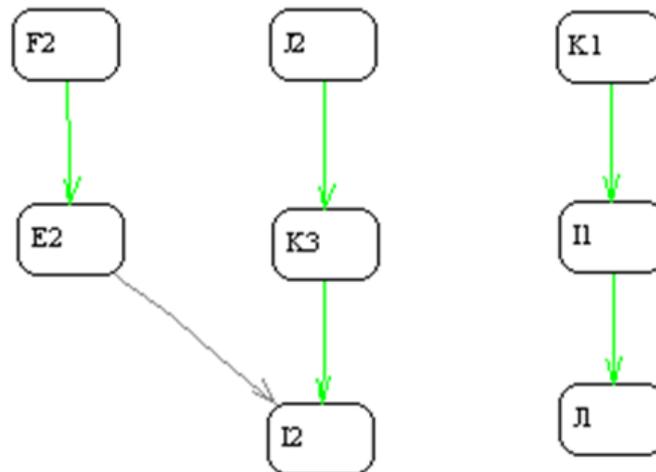
Presentamos ahora nuestro análisis de la obra de Première ES.

Figura 4. Árbol cohesitivo Breal.



El árbol cohesitivo (Figura 4) confirma la impresión que nos ha dado este libro bastante atípico, que propone un número acotado de ejercicios pero de una gran variedad. La combinación de estos dos factores impide la emergencia de tendencias significativas. Este manual se caracteriza también por proponer ejercicios abiertos, de esta manera, la influencia del profesor en la gestión de la clase sería determinante para el sentido de los objetos trabajados en estos ejercicios. Analizaremos ahora el gráfico implicativo para este mismo manual.

Figura 5. Gráfico implicativo. Breal es Sesgo 0,9.



Aplicando a este manual de la orientación ES los mismos valores de sesgo que para el manual precedente de la orientación S, observamos la aparición de algunas clases ya

identificadas en el otro manual, aunque de manera menos evidente. Es así que volvemos a encontrar la clase frecuentista [K1, I1, J1] donde la repetición de la experiencia es explícita y la otra clase de ejercicios de naturaleza genérica [J2, K3, I2], pero de manera menos marcada que en el manual de orientación S.

La última clase vinculada a la precedente por I2 (no se solicita una interpretación del cálculo de la probabilidad efectuado), pero ya a un sesgo de 0.82 es la clase [F2, E2]. Ella es nueva y específica de la orientación ES, se trata de ejercicios donde el contexto sería en principio la vida cotidiana ciudadana (escolar o trabajo), estos ejercicios son relativamente importantes en número (más de la mitad de los ejercicios del capítulo). Probablemente porque estos alumnos no continuarían con carreras científicas, estos conceptos tendrían entonces un enfoque más bien práctico, vinculado a la vida cotidiana. Sin embargo, en cierta manera, los autores se encuentran en una contradicción, la interpretación oficial de la probabilidad sigue siendo la frecuentista, mientras que los problemas propuestos y vinculados a la vida cotidiana de los alumnos son principalmente bayesianos.

Límites del estudio

Como lo hemos señalado, el estudio solamente ha tomado una muestra de dos manuales o libros de texto. Y si bien se ha realizado un análisis exhaustivo de todos sus ejercicios y problemas, el número de ejercicios del capítulo probabilidad del manual Bréal orientación ES es significativamente inferior al de Nathan de la orientación S (treinta y uno y setenta y tres respectivamente) esta diferencia pondera fuertemente las conclusiones relativas al libro de clase Bréal si se prevee una generalización del tipo comparación entre libros de clase de ES y S. Toda pretensión de comparación entre orientaciones ES y S conlleva a un análisis de un número significativamente mayor de manuales. Este último objetivo escapa a los fines de este estudio donde la intención fue la de analizar la presencia de las interpretaciones frecuentista y bayesiana en los manuales franceses.

Conclusión

Analizando de manera exhaustiva los ejercicios propuestos en los manuales del penúltimo año de clase de la escuela secundaria en Francia esperábamos bosquejar el tipo de ejercicios y problemas a los que los estudiantes se verían confrontados, en particular en lo que respecta a las interpretaciones frecuentista y bayesiana. Nuestros

resultados parecen confirmar la prioridad que se daba (en el año 2001) en Francia a la enseñanza de la probabilidad frecuentista y su vínculo con la axiomática de Kolmogorov.

Este estudio nos sugiere que si los alumnos hubieran abordado estos ejercicios y problemas, ellos hubieran profundizado en aspectos calculatorios de la probabilidad en detrimento de los semánticos.

En lo que respecta a esta última dimensión de la probabilidad, podemos concluir que, a juzgar por los ejercicios y problemas analizados, la dualidad pareciera reaparecer en clase, contorneando la prescripción que sufrió la interpretación bayesiana en los programas escolares vigentes en ese momento. Así, ambas interpretaciones han estado potencialmente presentes en los ejercicios y problemas, solo que una alcanza el estatuto de objeto a institucionalizar (frecuentista) y la otra permanecía oculta (bayesiana), con una eventual construcción del concepto enteramente a la carga de cada alumnos por falta precisamente de una institucionalización. Más aún, los ejercicios de interpretación frecuentista fueron menores en número que los bayesianos. Este fenómeno lo hemos podido observar en otros manuales no analizados aquí (Carranza, 2009). En efecto, los ejercicios y problemas del tipo bayesiano parecen orientados a profundizar la dimensión calculatoria, ellos fueron los más numerosos y tuvieron como objeto la ejercitación de los axiomas de Kolmogorov. Por su lado, los frecuentistas fueron los menos y en general tendieron a asociar la noción de probabilidad con la noción de estabilización de frecuencias.

Este estudio sobre la presencia de la dualidad de la probabilidad en la transposición didáctica se inscribió en uno más amplio, el de las posibilidades de institucionalizar en clase ambas interpretaciones de la probabilidad. Respecto a este último, llevamos a cabo en Francia durante el año 2008 una serie de experimentaciones con alumnos de nivel secundario donde se les propuso abordar problemas tanto frecuentistas como bayesianos. En todos los casos, entre los objetivos de las experimentaciones, se encontraba el de analizar en conjunto la interpretación de la probabilidad subyacente al problema abordado.

Los resultados de dichas experimentaciones nos sugieren que la enseñanza de la dualidad de la probabilidad es posible y que ambas pueden cohabitar sin conflictos significativos en los alumnos (Carranza, 2009). Si bien tales experimentaciones fueron reducidas en número (tres) los datos recolectados nos indican que los alumnos toman con naturalidad tal dualidad. Más aún, el hecho de haber podido caracterizarlas junto a

los alumnos significó darles un estatuto reconocido a ambas interpretaciones en la clase. Ello permitió a los alumnos poder abordar y debatir claramente tanto sea sus interpretaciones como sus tomas de decisiones. Y esto, precisamente porque al estar explicitadas ambas interpretaciones, los debates entre los grupos de alumnos resultaron profundos y claros, lo que les permitió a su vez construir fundamentaciones a sus tomas de decisiones, las cuales difícilmente se hubieran logrado de no haber existido el espacio para explicitar las interpretaciones de la probabilidad en cuestión en cada problema.

Si bien consideramos indispensable la profundización de estos estudios, en particular tomando en cuenta la realidad de cada país y región, creemos que estos resultados resultan relativamente extrapolables y brindan una base de análisis para estudios que se interesen a la enseñanza de la Estadística en todos los niveles, dada la importancia filosófica que tal concepto representa en los métodos estadísticos inferenciales más difundidos, como lo son la inferencia clásica y la bayesiana, nivel medio.

Además, cada interpretación de la probabilidad convoca tipos de razonamientos diferentes, en particular la bayesiana moviliza argumentaciones del tipo abductivas (Carranza, 2009, 2012; Hacking, 2002). El reconocimiento de tal tipo de razonamiento por medio de la institucionalización de la noción bayesiana, permite no solo una mejor fundamentación de las tomas de decisiones estadísticas sino también la interrelación con otras disciplinas tales como física, biología, astronomía, donde este tipo de razonamiento es fuertemente utilizado.

Referências

BAYES, T. (1763). An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philosophical Transactions of The Royal Society*.

BERNOULLI, J. (1713). *The art of conjecturing* (E. D. Sylla, Trans. 2006 ed.). Bâle: Johns Hopkins.

BOROVCNIK, M. (2005, 17 - 21 February 2005). Probabilistic and statistical thinking. Paper presented at the CERME 4, Sant Feliu de Guíxols, Espagne.

CARRANZA, P. (2009). Dualidad de la probabilidad en la enseñanza de la estadística. Paper presented at the XXXVI Semana de la Matemática, Valparaíso. Chile.

CARRANZA, P. (2009). La dualité de la probabilité et enseignement de la statistique. Une expérience en BTS. Paris VII Denis Diderot, *Savoirs Scientifiques: Epistemologie, histoire des sciences, didactique des disciplines*.

- CARRANZA, P. (2012). Les abductions en statistique et des possibles sensibilisations en classe, réflexion autour d'expérimentations menées en France et en Argentine. Lyon: IFE.
- CHEVALLARD, Y. (1985). La transposition didactique (1991 ed.). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- CONDORCET, J.-A.-N. (1805). Eléments du calcul des probabilités (F.-J.-M. Fayolle, Trans.). Paris: Fayolle, F.-J.-M.
- D'AGOSTINI, G. (2004). From observations to hypotheses: Probabilistic reasoning versus falsificationism and its statistical variations. Paper presented at the Frontier Objects, Vulcano, Italie.
- DALE, A. (1999). A history of inverse probability: From thomas bayes to karl pearson. New York: Springer-Verlag.
- DE FINETTI, B. (1974). Theory of probability: Wiley classics library.
- Droesbeke, J.-J., Fine, J., Saporta, G. (2002). Méthodes bayésiennes en statistique. Paris: SFDS.
- DUVAL, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et les productions mathématiques. *Relime. Numéro Especial*, 45-81.
- GRAS, R., Ag Almouloud, S., Bailleul, M., Larher, A., Polo, M., Ratsimba-Rajohn, H., et al. (1996). L'implication statistique : La Pensée Sauvage.
- GRAS, R., & Bailleul, M. (Eds.). (2000). La fouille dans les données par la méthode d'analyse statistique implicative. Caen: ARDM.
- GRAS, R., Régnier J.-C., Guillet F. (Eds) (2009) *Analyse Statistique Implicative. Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*. RNTI-E-16. Toulouse : Cépaduès Editions
- GRAS R., Régnier J.-C., Marinica, C., Guillet F. (Eds) (2013) *Analyse Statistique Implicative. Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités*. Toulouse : Cépaduès Editions
- HACKING, I. (1990). The taming of chance. Cambridge: Cambridge University Press.
- HACKING, I. (2002). L'émergence de la probabilité. Paris: Seuil.
- JAYNES, E. (1980). What is the question in bayesian statistics? Valencia Univ. Press: J. M. Bernardo, M. H. deGroot, D. V. Lindly, and A. F. M. Smith.
- JAYNES, E. (1995). Probability theory: The logic of science (2003 ed.). St. Louis, U. S. A.: Washington University.
- KEYNES, J. M. (1921). A treatise on probability. London: MacMillan and Co.
- Laplace, P. S. (1771). Mémoire sur la probabilité des causes par les événements. Mémoires de l'Académie royale des sciences de Paris, VI.
- LECOUTRE, B. (2005). Et si vous étiez un bayésien qui s'ignore? *Modulad*, 1(32), 92-105.
- LEIBNIZ, G. W. (1765). New essays concerning human understanding (A. Langley, Trans. 1916 ed. Vol. 1). Chicago: The Open Court Publishing Company.

ORIOU, J.-C., Régnier, J.-C. (2003). Fonctionnement didactique de la simulation en statistique. 35e Journées de la Société Française de Statistique 2 (2003) 743-754, Lyon, France. [<http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00407555>]

ORUS P., Zemora L., Gregori P. (Eds) (2009) Teoria y Aplicaciones del Analisis Estadístico Implicativo. Universitat Jaume-1, Castellon (Espagne)

PEIRCE, C. S. (1932). Collected papers: Cambridge Mass.

POPPER, K. R. (1959). The logic of scientific discovery. London: Hutchinson.