El problema de la Educación Matemática entre la Secundaria y la Universidad[1]

JOSEP GASCÓN[2]

Resumen
En el paso de la enseñanza secundaria a la enseñanza universitaria se pone de manifiesto, de forma especialmente cruda, el problema de la Educación Matemática. Este cambio de institución hace más claramente visibles muchos de los factores que inciden de forma negativa sobre el proceso de estudio escolar de las matemáticas. En este trabajo describiremos algunos de esos factores, analizaremos su influencia y sugeriremos algunas propuestas que, según nuestro análisis, permitirían mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje escolar de las matemáticas y, en particular, facilitarían el paso de la Secundaria a la Universidad. Pero nuestro objetivo principal es el de contribuir a abrir un debate sobre el problema de la Educación Matemática que, si bien debe iniciarse en el seno de nuestra comunidad científica (la comunidad matemática entendida en un sentido amplio) debería llegar a involucrar a toda la Sociedad.

Resumo
A passagem do ensino secundário para o universitário, expõe de forma especialmente "crua, um problema da Educaçao Matemática. Esta mudança de instituição torna claramente visíveis muitos dos fatores que incidem de forma negativa sobre o processo de estudo escolar das matemáticas. Neste trabalho descreveremos alguns desses fatores, analisaremos sua influência e sugeriremos algumas propostas que, segundo nossa análise, permitiriam melhorar o processo de ensino e aprendizagem escolar das matemáticas e, em particular, facilitariam a passagem do ensino secundário à universidade. Porém, nosso objetivo principal é o de contribuir para a abertura de um debate sobre um problema da Educação Matemática que, embora deva iniciar no seio de nossa comunidade científica (a comunidade matemática entendida no sentido amplo) deveria envolver toda a Sociedade.
Palavras-chave: Educação Matemática; ensino e aprendizagem; transição ensino secundário/universitário.

1. Un marco para interpretar los datos

Con el objetivo de interpretar de una forma relativamente integrada el inmenso caudal de datos que concurren en este problema, enunciaremos cuatro hipótesis que vertebrarán el análisis que sigue y le proporcionarán una estructura explícita y, por lo tanto, criticable y mejorable. Las tres primeras hipótesis hacen referencia a lo que podríamos denominar análisis "*externo*" a la práctica matemática escolar, esto es, al análisis de la incidencia que tiene sobre dicha práctica la manera de interpretar las matemáticas y la

[1] Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto EDU2008-02750/EDUC del Ministerio de Ciencia e Innovación de España. Algunas de las ideas que aquí se desarrollan fueron expuestas por el autor en el ámbito de las Jornadas sobre Educación Matemática celebradas en Santiago de Compostela los días 9-11 de septiembre de 2004 y organizadas por la Consellería de Educación y Ordenación Universitaria (Xunta de Galicia) con la colaboración de las asociaciones AGAPEMA, FESPM y RSME.

[2] Departamento de Matemáticas, Universitat Autònoma de Barcelona, gascon@mat.uab.cat

enseñanza de las matemáticas por parte de la cultura escolar[3]. También forma parte importante de este análisis externo el estudio de las funciones que la Sociedad asigna a la Escuela. La cuarta hipótesis hace referencia al análisis "*interno*" de la práctica matemática escolar, esto es, al análisis detallado de las *discontinuidades* entre la estructura de las organizaciones matemáticas que se estudian (y a cómo se estudian) en Secundaria y las que se proponen para ser estudiadas en la Universidad.

Hipótesis (1): El problema del paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad es un aspecto especialmente visible de un problema mucho más general que llamamos el "*problema de la Educación Matemática*". No es posible abordar el problema del paso de Secundaria a la Universidad sin dar algunarespuesta al problema más amplio de la Educación Matemática. Éste puede formularse, en primera instancia, como sigue:

Problema de la Educación Matemática: Si la actividad matemática es una *actividad humana*, esto es, una actividad propia y específica del "hombre" en cuanto tal[4]: ¿Por qué la inmensa mayoría de los estudiantes son *ajenos* a dicha actividad? ¿Por qué es tan difícil que los estudiantes *entren* en la disciplina matemática a lo largo de toda la enseñanza obligatoria (y más allá)? ¿Por qué los estudiantes no *piensan por si mismos* los problemas matemáticos? ¿Por qué no *plantean preguntas* que vayan más allá de lo que se va a pedir en los exámenes? ¿Por qué no utilizan las matemáticas para *resolver problemas que ellos mismos plantean*? ¿Cómo puede explicarse, en definitiva, el fenómeno relativamente universal de la *alienación matemática*?

Se trata de un viejo problema que *ha estado presente desde los orígenes de la institucionalización de la enseñanza de las matemáticas*, y que se ha ido haciendo más visible a medida que ha ido avanzando la universalización de la educación matemática obligatoria[5] a pesar de que, con ella, han aumentado objetivamente las posibilidades de formación matemática de la mayoría de los jóvenes[6].

---

[3] En todo el texto el adjetivo "escolar" y el sustantivo "escuela" hacen referencia a las instituciones educativas de todos los niveles, incluyendo explícitamente la enseñanza universitaria.

[4] Alan J. Bishop defiende que las matemáticas, al igual que el lenguaje, son un fenómeno pancultural, distinguiendo entre este fenómeno pancultural y la forma particular de matemáticas que ha generado la disciplina internacional que en la actualidad se enseña en las escuelas (BISHOP 1991).

[5] Así, por ejemplo, en España, antes de la promulgación en 1970 de la Ley General de Educación el problema de la Educación Matemática era socialmente mucho menos visible que en la actualidad y, por tanto, no parecía tan acuciante, aunque en realidad era mucho más grave. De hecho, en 1967 sólo el 39% de los jóvenes de 14 años tenía una plaza escolar, para los de 15 años el porcentaje era del 25%, para los de 16 años bajaba al 16% y para los de 17 años era sólo del 12%. (Libro Blanco para la Reforma del

Pero, paradójicamente, coincidiendo con la extensión de la obligatoriedad de la enseñanza fue creciendo, a partir de los años 70 y 80, la percepción social de la gravedad del *problema* de la Educación Matemática, y esta percepción ha continuado creciendo con la extensión de la obligatoriedad hasta los 16 años. Entre las posibles causas del *aumento de la conciencia social del problema* podemos citar, entre otras: la creciente ambición social de universalización de una formación matemática no meramente "utilitaria" (ya no se considera suficiente que los ciudadanos sepan "las cuatro reglas" y la "regla de tres"); la constatación de que el "fracaso" se extiende a una gran parte de los jóvenes de 15-16 años; y el cambio del estatus que la Sociedad asigna a la Escuela y que comporta, en particular, una pérdida del prestigio social de ésta que conlleva que el fracaso escolar de muchos alumnos sea interpretado como un "fracaso de la Escuela".

Esta creciente conciencia de la importancia del problema de la Educación Matemática provocó en la década de los 70 y principio de los 80 la emergencia en España (y en otros países) de un importante movimiento de *renovación de la enseñanza de las matemáticas*. Surgieron así las primeras alternativas a la enseñanza tradicional de las matemáticas que se concretaron en nuevos *materiales curriculares* que pretendían superar la separación ficticia entre teoría y práctica matemática y ayudar a los alumnos a participar en el *proceso de modelización de situaciones reales*. Una de las ideas básicas compartidas dentro de este amplio movimiento era la de "sumergir" al alumno en las matemáticas *verdaderas* por medio de *problemas abiertos*, relacionados con hechos concretos que permitiesen hacerle vivir la relación de las matemáticas con las ciencias experimentales, con la tecnología y, en definitiva, con la realidad (GASCÓN y LLADÓ 1998).

Sistema Educativo, MEC 1989, p. 32). El porcentaje de jóvenes que estudiaban matemáticas en el "Bachillerato superior" en 1967 era casi insignificante (inferior, sin duda, al 10% de los jóvenes en edad de estudiarlo). Además, las dificultades con las que se encontraban esos pocos alumnos para aprender matemáticas eran consideradas "normales" tanto por la institución escolar como por la Sociedad en general. Por todo ello el problema de la Educación Matemática no era percibido como tal "problema" y, en consecuencia, no se sentía la necesidad imperiosa de darle una respuesta a pesar de que, objetivamente, la alienación matemática de los ciudadanos era enorme y, desde luego, mucho mayor que en la actualidad.

[6] Con la puesta en marcha de la Ley General de Educación, promulgada en 1970 en España, el porcentaje de jóvenes que estudiaban Bachillerato aumentó muy significativamente hasta alcanzar casi el 50%. Así, por ejemplo, durante el curso 86/87 los jóvenes de 15 años se repartían de la siguiente forma: un 45% cursaba el Bachillerato, un 22% la Formación Profesional y el resto, el 33%, estaba fuera del sistema educativo.

Pero pronto empezaron a surgir dudas e insatisfacciones relacionadas con los resultados prácticos de los nuevos materiales. Empezó a crecer la convicción de que era necesario criticar algunos de los presupuestos que se habían aceptado implícitamente. Se empezaron a plantear cuestiones de carácter más básico y para las que no se tenía ninguna respuesta:

-¿Cómo fundamentar los criterios que deben utilizarse para decidir el tipo de material y la metodología didáctica más adecuada en una situación dada?

-¿Debe recaer sobre los propios profesores la responsabilidad de llevar a cabo esta transformación global de la enseñanza de las matemáticas?

-¿Cuáles son los límites de la responsabilidad del profesor de matemáticas como tal profesor?

Nació así la necesidad de fundamentar de una manera más racional los criterios didácticos adoptados y de justificar la "nueva" práctica docente. En este punto se produjo una dispersión del movimiento de renovación de la enseñanza de las matemáticas que, simplificando mucho las cosas, podríamos decir que ha dado origen por una parte al desarrollo de un amplio movimiento asociativo de profesores de matemáticas (muy vivo en todo el mundo) y, por otra, a una incipiente comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas.

Como consecuencia del fracaso de la respuesta proporcionada por el movimiento de renovación de materiales al problema de la Educación Matemática y, también, debido de la debilidad inicial de las propuestas didácticas, empezó a tomar fuerza una respuesta que podríamos denominar "psicopedagógica" y que hasta entonces había estado circunscrita al ámbito de la enseñanza infantil y primaria. Se trata de una respuesta que se ha ido construyendo a lo largo de los últimos 25 años y que ha acabado siendo la respuesta dominante. Es en este punto en el que se sitúa nuestro análisis: pretendemos empezar a clarificar cómo ha influido esta respuesta dominante sobre la evolución del problema de la Educación Matemática y, en particular, sobre el desencuentro actual entre las matemáticas que se estudian en Secundaria y las que se estudian en la Universidad.

Dado que las respuestas didáctico-matemáticas han tenido hasta la fecha una influencia relativamente pequeña sobre el sistema educativo[7] no las utilizaremos para explicar el desencuentro actual entre las matemáticas de Secundaria y las que se estudian en la Universidad. Cuando se trate de hacer propuestas encaminadas a superar esta situación será el momento de utilizar algunos resultados aportados recientemente por la didáctica de las matemáticas.

Hipótesis (2): Para dar cuenta del estado actual del problema de la Educación Matemática y de su incidencia sobre el paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad, se debe partir del análisis de un fenómeno que está en la base de dicho problema y que consiste en separar radicalmente la *enseñanza de las matemáticas de la actividad generadora de las matemáticas* que se enseñan. En la medida que dicha separación se lleva a cabo *en la práctica escolar*, la enseñanza de las matemáticas acaba reduciéndose a la transmisión de conocimientos cristalizados, transparentes, no problemáticos y muertos porque están desprovistos de las cuestiones a las que responden.

Si el problema de la Educación Matemática se hace especialmente visible en el paso de Secundaria a la Universidad se debe, precisamente, a que la separación *entre enseñar y hacer* matemáticas, que está en la base de dicho problema, se hace especialmente sensible en el tránsito de la enseñanza "no universitaria" (en la que se enseñan las matemáticas construidas en otra institución), a la enseñanza universitaria (que se desarrolla en la institución en la que se recluye actualmente la comunidad productora del saber matemático).

Hipótesis (3): La separación radical entre *enseñar* matemáticas y I matemáticas está sustentada y legitimada culturalmente por la ideología *psicopedagógica* dominante en la cultura escolar. Y, recíprocamente, dicha separación posibilita el mantenimiento y refuerza la posición dominante de la ideología *psicopedagógica*.

La dependencia mutua entre ambas ideologías surge de la naturaleza misma de la Pedagogía como disciplina. En efecto, la Pedagogía se ha construido sobre una ficción histórica fundada en la *disociación* entre lo "*matemático*" (considerado clásicamente

[7] Hay que tener en cuenta, entre otras cosas, que la constitución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica es muy reciente (su emergencia no va más allá de 30 años). Además, su carácter experimental ha reducido el ámbito de aplicación de muchas de las investigaciones didácticas realizadas hasta la fecha lo que ha retardado su incidencia sobre la práctica docente.

como el *contenido* de la enseñanza de las matemáticas, transparente, incuestionable e independiente de la forma de enseñar) y lo "*pedagógico*" (considerado como la *forma* de enseñar, independiente del contenido que se enseña). Se trata de un *mito cultural*[8] fuertemente arraigado en nuestra sociedad y del que todavía no nos hemos librado:

> [...] l'illusion qu'il existerait, a priori, en matière scolaire, un domaine de décision affranchi de toute contrainte émanant des contenus de l'étude, et n'entraînant en retour aucune contrainte sur ces contenus et leur traitement « didactique » (CHEVALLARD 2000, p. 107).

Este mito es el que legitima culturalmente la existencia de un ámbito propio de "lo pedagógico" y, por tanto, a la Pedagogía como disciplina.

Hipótesis (4): Dentro de la problemática general de la Educación Matemática el problema del paso de Secundaria a la Universidad presenta características específicas que requieren explicaciones particulares relativas a las *discontinuidades* entre las matemáticas que es posible estudiar en Secundaria y las que se proponen para ser estudiadas en la Universidad. Postulamos que la vía privilegiada para investigar dichas discontinuidades no es otra que el análisis de las *prácticas matemáticas que se llevan a cabo en las instituciones docentes*, lo que comporta simultáneamente una "despersonalización" y una "matematización" del problema de la Educación Matemática (FONSECA 2004).

En lo que sigue utilizaremos el marco que proporcionan estas cuatro hipótesis para desarrollar una interpretación de los datos en los dos niveles citados anteriormente y que, como veremos, están fuertemente relacionados entre si.

- El análisis "externo" abarcará dos apartados:

  (a) La *ideología psicopedagógica* y la separación entre enseñar y hacer matemáticas.

  (b) Incidencia de la ideología psicopedagógica sobre el *problema de la Educación Matemática* y sobre el paso de Secundaria a la Universidad.

- El análisis "interno" se centrará en el estudio de las discontinuidades *matemáticas* (relativas a la manera de organizar las cuestiones matemáticas que

[8] Se trata, en realidad, de un mito interesado: "[...] nier le plus possible la dépendance réciproque de l'organisation scolaire et des questions à étudier afin d'étendre le plus possible le champ de l'intervention légitime des pouvoirs – d'Église ou d'État selon les époques– en matière scolaire […]" (CHEVALLARD 2000, p. 106).

se estudian) y *didácticas* (relativas a la forma de organizar el proceso de estudio de dichas cuestiones) entre la Secundaria y la Universidad.

Este análisis "interno", aunque no puede separarse del que hemos denominado "externo", constituye el punto de partida del *análisis didáctico-matemático* del problema que nos ocupa y, como tal, es el que deberá sustentar en última instancia las propuestas de modificación de las organizaciones matemático-didácticas escolares.

2 La ideología *psicopedagógica* y la separación entre *enseñar y hacer* matemáticas

La separación escolar entre el *enseñar* y el *hacer* matemáticas y la preponderancia de la ideología *psicopedagógica* en la cultura escolar son dos caras de la misma moneda. Ambos fenómenos se alimentan mutuamente de tal manera que cada uno de ellos puede ser considerado como la causa y el efecto principal del otro. Describiremos a continuación un conjunto de hechos que ponen de manifiesto esta dualidad.

2.1 Separación legal e institucional entre la comunidad productora del saber matemático y la comunidad de profesores "no universitarios" de matemáticas[9]

Esta *escisión de la comunidad matemática*, junto a la creciente afluencia de profesores de matemáticas de enseñanza secundaria cuya formación básica es la de "químicos", "biólogos", "economistas" y hasta "maestros de educación infantil y primaria" y "pedagogos", comporta que los profesores de matemáticas de los niveles "no universitarios" sean considerados cada vez más como "*profesores*" y cada vez menos como "*matemáticos*" y, lo que es más grave, que se desvincule su condición de *matemáticos* de su condición de *profesores*.

Como consecuencia de todo ello se está imponiendo la convicción de que ante un problema didáctico, esto es, ante un problema relativo al *estudio de las matemáticas*, el matemático como tal matemático no tiene nada que decir. Así, por ejemplo, las dificultades que tienen los alumnos para dar sentido al concepto de "límite de una

[9] Dieudonné (1987) indica que antes de 1940 el número de puestos de trabajo en la enseñanza universitaria de las matemáticas era muy reducido (menos de 100 en Francia) y, en consecuencia, hasta 1920 algunos matemáticos de la categoría de Weierstrass, Grassmann, Killing y Montel fueron, durante toda o parte de sus carreras, profesores de Enseñanza Secundaria. Pero, en la actualidad, los productores del conocimiento matemático han desaparecido prácticamente de la Enseñanza Secundaria. La escisión legal entre enseñanza universitaria y no universitaria aumentó dicha separación en España (y, presumiblemente, en otros países).

función en un punto" o la persistencia de los errores que cometen los alumnos cuando intentan utilizar el "lenguaje algebraico" se intentan explicar mediante apelando a causas psicopedagógicas tales como: "falta de motivación", "rigor o abstracción excesivos" o "desarrollo cognitivo insuficiente".

Pero un análisis didáctico-matemático más respetuoso con los hechos muestra que no es posible "dar sentido" a la noción de límite en la actual organización matemática de la enseñanza secundaria puesto que su "*razón de ser*", esto es, la cuestión matemática a la que dicha noción responde, no puede plantearse propiamente (y, de hecho, no se plantea) en la enseñanza secundaria (BOSCH, ESPINOZA y GASCÓN 2003). Por su parte, las dificultades que tienen los alumnos para manipular y utilizar adecuadamente el lenguaje algebraico no son independientes de la ausencia casi absoluta de la actividad de *modelización algebraica* en el currículum de matemáticas de la enseñanza secundaria (fenómeno de la "desalgebrización" de la matemática escolar) y, sobre todo, de la identificación curricular entre "álgebra elemental" y "aritmética generalizada" (BOLEA, BOSCH y GASCÓN 2001).

Resulta, en definitiva, que sin negar la existencia de factores cognitivos, podemos explicar en gran medida muchos hechos didáctico-matemáticos en términos de la estructura de las organizaciones matemáticas escolares y del tipo de actividad matemática que las restricciones institucionales permiten llevar a cabo. En consecuencia, el profesor como miembro de la comunidad matemática, responsable última de la legitimación de las matemáticas que se enseñan en la Escuela, no debería renunciar a interpretar (aunque sólo sea parcialmente) los hechos didácticos escolares desde su posición de *matemático* y colaborar así con los investigadores en didáctica de las matemáticas.

2.2 Ampliación progresiva del ámbito de influencia de la psicopedagogía sustentada por el poder académico y político

El ámbito tradicional de influencia de la ideología psicopedagógica estaba circunscrito a la enseñanza infantil y primaria. Con la "primarización" de toda la enseñanza obligatoria esta influencia se extendió a todo el currículum de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) y con la integración de la ESO en los Institutos de Enseñanza Secundaria, abarcó de manera progresiva todos los niveles de enseñanza impartidos en dichos Institutos, incluyendo el Bachillerato. Entre los hechos que muestran este "avance" de la influencia de la ideología psicopedagógica podemos citar, entre otros:

- La enorme influencia de los postulados y de los eslóganes psicopedagógicos en el *diseño del currículum* de Primaria y Secundaria (tanto de matemáticas como de las demás materias).
- La creación de la nueva especialidad de "Psicopedagogía" en los Institutos de Enseñanza Secundaria españoles (con un conjunto de funciones muy importantes).
- La imposición legal de criterios psicopedagógicos para *evaluar la calidad de la enseñanza de las matemáticas* en todos los niveles educativos. Así, por ejemplo, se han creado los *inspectores "generalistas*" que pretenden evaluar la calidad de la enseñanza de manera independiente del contenido específico de la misma.
- El peso de las materias con contenido psicopedagógico en la *formación del profesorado* de todos los niveles educativos. Así, la formación profesional del profesorado de Primaria y Secundaria (y esta tendencia está alcanzando la incipiente formación profesional del profesorado universitario) se diseña como una formación esencialmente psicopedagógica, independiente de la disciplina que dichos profesores deben impartir.

2.3. Predominio del modelo epistemológico "popular" del quehacer matemático.

En muchos ámbitos académicos relacionados con la enseñanza de las matemáticas predomina una forma de interpretar la actividad matemática que se desprende de la estructura de múltiples libros de texto y parece imponerse en aquellas instituciones que consideran las matemáticas como algo dado de antemano y que no requiere ningún tipo de esclarecimiento especial. El matemático norteamericano William P. Thurston habla, a este respecto, del *modelo popular* de las matemáticas, muy extendido en la comunidad matemática, y lo caracteriza como el modelo *definición-especulación-teorema-prueba* (DSTP) (THURSTON 1994).

La consecuencia más importante de este modelo abusivamente simplificador consiste en que, al ignorar la influencia de la *difusión* y la *comunicación* del conocimiento matemático sobre la *construcción* y el *progreso* de dicho conocimiento, separa de una manera radical la producción del conocimiento matemático de su *utilización*, su *difusión* entre instituciones y, en particular, de su *enseñanza* en el ámbito de las instituciones docentes[10].

2.4. Dejación de responsabilidades por parte de la comunidad matemática

Dado que, en coherencia con el modelo popular de las matemáticas, "hacer matemáticas" no tiene nada que ver con "enseñar matemáticas", la *comunidad matemática nuclear* – formada por los investigadores en matemáticas – se ha desentendido del diseño del currículum de matemáticas de la enseñanza "no universitaria". Así, las decisiones respecto a cuáles serán las matemáticas que deberán estudiar obligatoriamente todos los ciudadanos (hasta los 16 años) y sobre qué matemáticas deben estudiar en el Bachillerato (16-18 años) los futuros matemáticos, físicos, biólogos, ingenieros, informáticos, economistas, psicólogos, lingüistas, etc., se toman al margen de la comunidad matemática. Por las mismas "razones" la comunidad matemática abandona en manos de "quien corresponda" la formación del profesorado de matemáticas de todos los niveles educativos[11].

2.5. Comodidad del nicho pedagógico para el progreso de la especie de los didácticos

La didáctica de las matemáticas se fundó para estudiar de manera integrada "lo pedagógico" y "lo matemático" y se vio llevada muy pronto a cuestionar la transparencia de "lo matemático" y a modelizarlo conjuntamente con los procesos de comunicación y difusión institucional de las matemáticas. La didáctica de las matemáticas, entendida como la disciplina que estudia las *condiciones de creación y difusión de los conocimientos matemáticos*, es una disciplina muy próxima a las matemáticas y los matemáticos deberían estar implicados, en tanto que matemáticos, en las investigaciones "didácticas" puesto que en los procesos de difusión de los

[10] La ideología psicopedagógica no formula explícitamente ningún modelo epistemológico de las matemáticas. Pero, al abordar el problema de la Educación Matemática centrándose únicamente en las estrategias docentes supuestamente independientes de las cuestiones a estudiar, postula implícitamente que "lo matemático" no es problemático y que, por tanto, puede considerarse como un "dato" de dicho problema y ponerse entre paréntesis. Esta posición es perfectamente compatible con el modelo popular de las matemáticas y, en cierto sentido, contribuye a reforzarlo.

[11] 10 Este "abandono" de la formación de los futuros profesores de matemáticas españoles por parte de la comunidad matemática ha posibilitado, por ejemplo, la desaparición casi absoluta de los contenidos matemáticos en los planes de estudio de las Escuelas del Formación del Profesorado de Educación Primaria: "Una revisión posterior de los Planes de estudio (RICO y CARRILLO, 1999), [...] señalaba que "en la especialidad de Maestro de Primaria, la formación en Matemática y su didáctica apenas alcanza el 8% de la carga lectiva total; en el resto de las especialidades sólo es del 2%" (RICO, 2000), lo que mostraba la progresiva desaparición de la Educación Matemática en los planes de estudio en la formación inicial del Profesorado de Enseñanza Primaria [...]." (BLANCO 2001, p. 412).

conocimientos matemáticos existen actividades *irreductiblemente matemáticas* cuya investigación científica es responsabilidad, en última instancia, de los propios matemáticos (BROUSSEAU 1994).

Pero hay que reconocer que la *comodidad del nicho pedagógico* para el progreso de la especie de los didácticos ha provocado que una parte importante de la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas renunciase implícitamente al principio fundador de la disciplina y, huyendo de la *hostilidad del hábitat matemático*, se refugiase en el nicho pedagógico. En este punto es necesario subrayar de nuevo la *responsabilidad histórica de la comunidad matemática nuclear*, esto es, de los productores del conocimiento matemático, en la escisión de la comunidad matemática (tanto en lo que hace referencia a los profesores de matemáticas de los niveles "no universitarios", como en relación a los investigadores en didáctica de las matemáticas) y en sus nefastas consecuencias. Creemos que la rigidez y el conservadurismo de una parte importante de dicha comunidad nuclear, al convertir el "nicho matemático" en un hábitat especialmente hostil para los didácticos, ha impedido que "los profesores de Didáctica de las Matemáticas pudieran establecerse, de manera generalizada y en pie de igualdad, en los Departamentos y Facultades de Matemáticas" (RECIO 2002), lo que está retrasando objetivamente la obtención de *criterios matemáticamente fundados* para el análisis de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

3 Incidencia de la ideología psicopedagógica sobre la Educación Matemática y sobre el paso de Secundaria a la Universidad

Hasta aquí hemos caracterizado la ideología psicopedagógica de una manera muy general como uno de los factores que provoca la separación entre el *hacer matemáticas* y el *enseñar matemáticas*. Pero para analizar las restricciones que impone sobre el estudio escolar de las matemáticas y, en particular, sobre el desencuentro entre las matemáticas de Secundaria y las de la Universidad, necesitamos describirla con mucho más detalle.

La ideología psicopedagógica se concreta en postulados que hacen referencia al papel que deben jugar los sujetos de la institución escolar (alumnos y profesores) a lo largo del proceso de "enseñanza-aprendizaje", sin hacer distinciones en función del conocimiento específico que está en juego. Nosotros, por el contrario, subrayaremos las *restricciones específicas* que impone cada uno de estos postulados o eslóganes psicopedagógicos sobre el *estudio escolar de las matemáticas*. Para ello describiremos en lo que sigue algunos de los postulados básicos de dicha ideología y analizaremos a continuación sus consecuencias.

3.1 "Educar" versus "instruir": La Escuela debe educar "de forma integral y global" en contraposición a una Escuela que instruya en las diferentes disciplinas.

Este postulado psicopedagógico potencia, en la práctica escolar actual, la tendencia a reemplazar la *actividad matemática* por una supuesta "*cultura matemática*" que forzosamente quedará vacía si no se fundamenta en un trabajo matemático sometido a las restricciones de un proceso de estudio sistemático y estructurado. Llevado a su extremo este postulado provoca el debilitamiento de las disciplinas escolares y su substitución por un magma informe de "cultura" superficial que puede ser impartida por cualquier profesor independientemente de su formación. Este fenómeno ha sido denunciado por Agustín García Calvo quien interpreta que la tendencia de ir reemplazando sistemáticamente la enseñanza del griego y el latín por una "cultura clásica" en los (sucesivos) "nuevos" planes de estudio se apoya en una *idea dominante* (falsa como todas) respecto a las relaciones entre lenguaje y cultura, idea que atribuye a esta última una importancia desmesurada y paradójica al presentarla como independiente de la actividad que la genera (el estudio de las lenguas clásicas en este caso) (GARCÍA CALVO 1992).

La contraposición entre "educar" e "instruir" se basa en el supuesto de que es *el profesor, como persona, el que educa al alumno como persona*, recogiendo una noción de "educar de forma integral y global" impulsada por el hecho de que la familia ha perdido, en gran medida, la capacidad de educar a los hijos. Este fenómeno social, que es muy complejo, ha provocado que la Educación Infantil y, por extensión, la enseñanza primaria intenten paliar el vacío educativo de los niños hasta los 12 años, asignando al profesor, como *persona*, una funciones que no puede asumir como *sujeto* que es de la institución escolar. En particular el profesor no puede (ni debe) comprometerse a tener una relación afectiva y emocional con los alumnos que es el presupuesto básico de la educación "personal".

Pero, además, al identificar al alumno, *sujeto de la institución escolar*, con la *persona* se pervierten (o, cuanto menos, se diluyen) todas las funciones de la Escuela. En estas condiciones el alumno no puede ser evaluado negativamente porque el fracaso escolar sería un *fracaso personal*, no se pueden hacer distinciones entre los alumnos (unos aprueban y otros suspenden, unos pasan al curso siguiente y otros deben repetir el curso, etc.) porque esto sería una *discriminación personal* injusta.

Por último, y no menos importante, digamos que "educar" no significa lo mismo a los 3 que a los 15 o a los 17 años. De hecho, si aceptamos que la "instrucción" da la posibilidad de llevar a cabo una genuina actividad disciplinar (por ejemplo matemática, filosófica o musical), entonces *instruir* no sólo no está reñido con *educar* sino que es una condición imprescindible y el único medio de que dispone el profesor para educar "de forma integral y global". Como sugiere García Calvo, no es el profesor como persona el que educa, sino que, *en tanto que profesor* y a través de la enseñanza de las disciplinas creadas por la humanidad para responder a las cuestiones vitales, es como puede contribuir a educar a los alumnos.

Si el postulado psicopedagógico que contrapone "educar" a "instruir" se lleva a sus últimas consecuencias en la enseñanza secundaria, dificultaría grandemente el tránsito a estudiar matemáticas en la Universidad porque en esta institución las matemáticas se presentan con un carácter fuertemente disciplinar (lo que no significa que se deban presentar forzosamente "aisladas"). Incluso en aquellos estudios universitarios en los que las matemáticas juegan un papel "instrumental" se requiere que los estudiantes tengan cierta experiencia en la actividad matemática genuina, que hayan *"entrado" en la disciplina matemática*.

3.2. Personalizar la enseñanza

Cada alumno tiene su propio ritmo de aprendizaje que debe respetarse. La educación matemática debe ser cada vez más *individualizada y personalizada* para responder a la exigencia creciente de *atención a la diversidad*. El profesor debe "individualizar los objetivos", "individualizar los contenidos" e "individualizar el método de aprendizaje".

Este postulado psicopedagógico ignora dos hechos fundamentales que rigen todo proceso de aprendizaje. En primer lugar, aunque se pueda considerar el aprendizaje como un logro individual, se olvida que es el resultado de un *proceso colectivo*: el proceso de estudio se desarrolla *en el seno de una comunidad*, sea ésta una clase o un grupo de investigadores. En segundo lugar, el proceso de estudio sólo puede llevarse a cabo si el aprendizaje es algo bien compartido dentro del grupo: *para que el individuo aprenda es necesario que el grupo aprenda.*

El tratamiento individualizado constituye un eslogan pedagógico muy influyente en la actualidad. Consiste en adaptar la enseñanza a las particularidades de cada alumno en cuanto individuo singular. Se da por supuesto que son las *diferencias* individuales de los alumnos – su capacidad, motivación, interés, actitud, formación previa, etc.– las que determinan el éxito o fracaso del proceso didáctico y se concluye que la organización ideal a la que debería tenderse pasa por la individualización absoluta de la enseñanza. En contra de esta visión, el análisis didáctico de las *condiciones reales* del aprendizaje conduce a basar la organización de la enseñanza más en las características *compartidas* por los estudiantes que en las *singularidades* de cada individuo (CHEVALLARD, BOSCH y GASCÓN 1997, pp. 199-200).

De nuevo hay que decir que en la medida en que se implante la individualización de la enseñanza de las matemáticas, se potenciará la diversidad de intereses, capacidades y conocimientos dentro del grupo, lo que dificultará objetivamente la constitución de éste como verdadera *comunidad de estudio* y, por lo tanto, se debilitará la posibilidad de estudiar matemáticas. En la medida que la enseñanza secundaria se adapte a las particularidades de cada alumno, en cuanto individuo singular, aumentará enormemente la dificultad para constituir verdaderas comunidades de estudio lo que provocará un efecto de "torre de Babel" en el primer curso universitario, agravado por el hecho de que los estudiantes provienen de instituciones distintas y de ámbitos culturales y sociales muy dispares.

3.3. Individualizar los métodos de evaluación

La evaluación de los alumnos debe ser "continua, global e integradora". Además, los criterios de evaluación deben ser "individualizados y diversificados". "Se toma la persona y su evolución como principal referencia a la hora de evaluarla". Hay que incorporar el punto de vista del alumno (autoevaluación). Es preferible recoger la información en forma cualitativa (es mejor un informe que una nota).

Si la evaluación del aprendizaje de cada alumno no se rige por ningún criterio "externo" al propio alumno (como sugiere este postulado psicopedagógico) entonces los progresos de los diferentes alumnos no pueden compararse de ninguna manera (por eso es preferible un informe cualitativo que una nota que pretenda cuantificar el nivel alcanzado por cada uno de ellos) y, en particular, hay que eliminar todo tipo de competitividad entre ellos.

De aquí emerge otro de los dogmas pedagógicos más influyentes a principios de los años 90, aunque actualmente está fuertemente contestado por la experiencia: se trata de la convicción de que durante la enseñanza obligatoria hay que prohibir cualquier tipo de agrupación por niveles de conocimiento -. Los alumnos deben mantener su grupo "natural" porque cualquier separación, y hasta cualquier distinción entre ellos, sería una discriminación.

Este eslogan complementa al de la individualización de la enseñanza y tiene consecuencias que agravan las de éste. En efecto, si la individualización de la enseñanza (al potenciar la diversidad de intereses, capacidades y conocimientos dentro del grupo) ya dificultaba enormemente la constitución de *comunidades de estudio*, la prohibición de reestructurar los grupos hace prácticamente imposible que éstos funcionen como tales comunidades.

Además, en el caso de las matemáticas, el principal criterio para distinguir o diferenciar entre los estudiantes es el que suele designarse por "comprender" o "no comprender" y en la capacidad de "resolver problemas". También podríamos proponer una distinción más radical: la que se establece entre los alumnos que han "entrado" en la actividad matemática y aquellos otros que, a lo sumo, han realizado algunos ejercicios propuestos por el profesor sin llegar a plantearse por ellos mismos ninguna cuestión matemática.

Pero si no se debe distinguir, para no separar ni segregar a los alumnos, entonces tampoco se podrá utilizar ninguno de estos criterios, puesto que todos los criterios que permitan diferenciar unos alumnos de otros son "represivos". Resulta, en definitiva, que la individualización de los métodos de evaluación llevada a sus últimas consecuencias acaba haciendo desaparecer las distinciones entre los alumnos que "hacen matemáticas" y aquellos otros que, a lo sumo, siguen las consignas del profesor.

La individualización de los métodos de evaluación que se ha implantado esencialmente en la ESO (limitación y casi prohibición en la práctica de que los estudiantes repitan curso independientemente de su rendimiento escolar, elaboración de un "currículum adaptado a cada alumno con dificultades", etc.) ya ha empezado a producir consecuencias muy importantes que se materializan en un fenómeno didáctico relativamente nuevo: el abismo creciente entre las matemáticas que *se estudian* *efectivamente* en la ESO (no las que figuran en el currículum ni en los libros de texto) y las que *deberían estudiarse*, como mínimo, en cualquiera de las modalidades del Bachillerato[12]. La incidencia de este fenómeno sobre el paso de estudiar matemáticas en Secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad es ya notable, dada la enorme dificultad de estudiar las matemáticas del Bachillerato para los alumnos que han tenido una evaluación individualizada durante la ESO, y no dejará de crecer mientras se mantengan o se acentúen las consecuencias de la evaluación individualizada.

3.4. Evitar la alienación de los alumnos

A fin de evitar que los alumnos se alienen de la institución escolar deben eliminarse aquellos aspectos *disciplinares* que por su especial dureza y exigencia dificultan la vida escolar de la mayoría de los alumnos. En el caso de las matemáticas este postulado psicopedagógico, que por ser implícito no es menos operativo, tiene muchas consecuencias entre las que destaremos las siguientes:

- *Disminución progresiva de los objetivos a largo plazo y afianzamiento del mito de la comprensión inmediata y casi instantánea.*

Este mito está relacionado con la desaparición del *estudio* como corazón del proyecto educativo de nuestra sociedad y con la disminución paulatina y sistemática de las *matemáticas efectivamente enseñadas* (en el aula) tanto en la ESO como en el Bachillerato. Entre los indicadores objetivos de estos fenómenos podemos citar la disminución del número de horas semanales dedicadas al estudio de las matemáticas – tanto en la ESO como en el Bachillerato –, la desaparición de todo tipo de exámenes "globales", la obligada "eliminación de materia" en todo examen parcial y la "imposibilidad" de retomar las cuestiones o los problemas planteados en un curso anterior con objetivo de integrarlos en una organización matemática más amplia y completa. El ejemplo de la desarticulación entre la geometría sintética (que se estudia en la ESO) y la geometría analítica (que se estudia en el Bachillerato) es especialmente representativo.

[12] El desencuentro entre las matemáticas de la ESO y las del Bachillerato es análogo, aunque presenta muchos elementos diferenciadores, al que se produce entre la Secundaria y la Universidad. Dado que los profesores responsables de la enseñanza de las matemáticas en la ESO son los mismos que en el Bachillerato, se pone más claramente de manifiesto que ambos son "fenómenos matemático-didácticos", esto es, relativamente independientes de la formación, la capacidad y la voluntad de los sujetos de la institución (sean éstos alumnos o profesores).

- *Atomización de la matemática enseñada que lleva a convertirla en un conjunto de "adivinanzas" o "anécdotas" independientes entre sí.*

De esta manera se supone que, en cualquier momento, se podrá "recuperar" a aquellos alumnos cuyo absentismo o desinterés los había apartado temporalmente de la clase. La estructura de la mayoría de los "nuevos" libros de texto muestra bien a las claras este fenómeno.

- *Desaparición progresiva de la "razón de ser" de los conocimientos matemáticos que se proponen para ser estudiados en la Escuela.*

El "olvido" de las cuestiones a las que responden los conocimientos matemáticos escolares provoca la desaparición de la *motivación intrínseca* para estudiar matemáticas que, en contraposición a la *motivación extrínseca* a la actividad matemática, consiste en la necesidad de dar respuesta a las cuestiones vitales en cada periodo histórico y, en particular, en la necesidad de replantearse las respuestas dadas por la sociedad a dichas cuestiones. La satisfacción de esta necesidad constituiría uno de los principales aspectos de la contribución de la *educación matemática* a una *educación integral*.

- *Eliminación del trabajo sistemático, paciente, a largo plazo y de toda actividad que pueda ser considerada como "rutinaria", repetitiva y aburrida.*

Se acepta de esta manera la concepción cultural ingenua de "*creatividad*" que la identifica con una actividad "sorprendente", "cambiante", "original", "libre", "espontánea", completamente desligada de las técnicas rutinarias y no sometida a las restricciones de un proceso de estudio sistemático y estructurado. Las organizaciones escolares regidas por este eslogan dificultan objetivamente el desarrollo normal de la verdadera "creatividad matemática" que, como fruto del desarrollo suficiente y bien dirigido del trabajo técnico, posibilita la "creación" de nuevas técnicas, nuevos "conceptos", nuevas "interpretaciones" y nuevas "justificaciones". La dificultad de los actuales sistemas de enseñanza de las matemáticas para posibilitar que los alumnos desarrollen una actividad matemática "creativa" se pone de manifiesto, por ejemplo, en que los profesores se ven impulsados a proponer en los *exámenes* ejercicios cada vez más *rutinarios* y *algorítmicos*.

- *El profesor debe proponer problemas concretos relacionados con la vida cotidiana y con los intereses de los alumnos, porque lo concreto es motivador y fácil, frente a lo abstracto que es aburrido y difícil.*

En particular, y dado que el juego conecta con los intereses de los alumnos, se incita a los profesores para que utilicen el *juego* como medio presuntamente eficaz para enseñar y aprender matemáticas. Se considera que la *motivación* de los alumnos (entendida como *motivación extrínseca* a la actividad matemática) tiene una importancia crucial en el aprendizaje y que el profesor es el responsable de motivar a los alumnos.

En resumen, se eliminan los principales aspectos de la *disciplina matemática* considerada implícitamente por la ideología psicopedagógica como la causante de la alienación matemática y, en última instancia, como una de las principales causantes de la alienación escolar de los alumnos. Pero, paradójicamente, al esconder la verdadera disciplina matemática e imponer a los alumnos exigencias artificiales ajenas a la disciplina matemática, se impide que la mayoría de los alumnos "entren" en las matemáticas. Se produce, en definitiva un debilitamiento general de la posibilidad de estudiar matemáticas en todos los niveles escolares lo que *provoca el efecto contrario* al que se perseguía.

4 Discontinuidades matemático-didácticas entre la Secundaria y la Universidad

En este apartado desarrollaremos, brevemente, el que hemos denominado análisis "interno" de las discontinuidades entre la Secundaria y la Universidad. Se trata del estudio de las discontinuidades relativas a la manera de organizar tanto las cuestiones matemáticas que se estudian como los correspondientes procesos de estudio de dichas cuestiones en ambas instituciones.

4.1. Cambios en la forma de organizar el proceso de estudio

En lo que se refiere a las discontinuidades didácticas, esto es, a los cambios bruscos en la manera de organizar el estudio de las matemáticas en el paso de Secundaria a la Universidad, señalaremos los siguientes:

- *Cambios en la distribución de las responsabilidades matemáticas*

La enorme influencia de la ideología psicopedagógica presiona en la dirección de que el proceso de estudio quede, en Secundaria, encerrado en el aula y bajo la responsabilidad del profesor. El *contrato didáctico* vigente en Secundaria asigna al profesor la responsabilidad última y casi exclusiva del aprendizaje matemático de los alumnos. El profesor tiene la obligación de explicitar lo que debe hacer el alumno para aprender y de controlar paso a paso la actividad del alumno. Incluso la responsabilidad de que el alumno tenga interés por las matemáticas y esté motivado para su estudio, recae sobre el profesor.

En la Universidad el proceso de estudio deja de estar encerrado completamente en el aula; el estudiante tiene menos dependencia del profesor y el nuevo contrato didáctico institucional le asigna una responsabilidad matemática mucho mayor. Así, por ejemplo, en la Universidad el estudiante debe realizar "gestos" que no estaba acostumbrado a realizar en Secundaria. Ha de decidir cómo organizar su estudio, cómo utilizar los apuntes, los libros de consulta, las clases de teoría y las clases de problemas. Ha de buscar y resolver problemas que no se resolverán en clase y para los que no puede esperar la solución del profesor para "imitarlo". De repente el contrato le asigna la responsabilidad de ser su propio "*director de estudio*". En resumen, en la Universidad se hace recaer sobre el estudiante una parte importante de la responsabilidad didácticomatemática que en Secundaria era exclusiva del profesor (GASCÓN 1997).

- *Malentendido en relación a las funciones del trabajo técnico en la actividad matemática*

Por razones que hemos descrito más arriba, el contrato didáctico vigente en Secundaria (especialmente en la E.S.O., pero cada vez más en el Bachillerato) obliga al profesor, como parte fundamental de su actividad docente, a "enseñar a utilizar técnicas algorítmicas". Dicho en otras palabras: en Secundaria el proceso didáctico en el aula se organiza en torno a unas pocas clases de problemas muy estereotipados y a un aspecto muy rudimentario del trabajo técnico que no va mucho más allá de la aplicación rígida de técnicas algorítmicas. Paradójicamente crece el rechazo ideológico al trabajo "rutinario" y "repetitivo" porque, como hemos explicado, la ideología dominante lo contrapone al "verdadero" trabajo matemático. No se establece ninguna ligazón (sino, al contrario, una contraposición y casi una incompatibilidad) entre el dominio de ciertas técnicas matemáticas y la ambición creciente de que los alumnos sean capaces de resolver problemas matemáticos "abiertos".

En la Universidad la exigencia de "apariencia de creatividad" es aún mayor. La institución universitaria necesita mostrar a la Sociedad y, en particular, a la comunidad científica que, más allá de los "ejercicios escolares" rutinarios, los estudiantes son capaces de resolver "verdaderos" problemas matemáticos y relacionar ideas de distintos ámbitos para elaborar "ideas generales". Pero, ignorando completamente el insuficiente desarrollo del trabajo de la técnica que se lleva a cabo en Secundaria, la organización del proceso escolar se hace en la Universidad apoyándose en un trabajo técnico muy débil y, además, dado que en la Universidad predomina el *teoricismo*, se deja bajo la responsabilidad del estudiante la responsabilidad de desarrollar las débiles técnicas de las que dispone. De esta manera no se proporciona a los estudiantes los medios imprescindibles para llevar a cabo una actividad matemática verdaderamente "creativa", esto es, productora de nuevos objetos matemáticos: nuevas técnicas, nuevos tipos de problemas, nuevas definiciones (de nuevas nociones) y nuevos teoremas.

- *Cambios en la evaluación como dispositivo esencial del proceso de estudio*

Por influencia de la ideología dominante, los dispositivos de evaluación en Secundaria tienden a llenar todo el proceso de estudio dejando poco espacio para la actividad del alumno. El profesor se ve "obligado" a evaluar constantemente al alumno y a controlarlo y dirigirlo de muy cerca. Como ya hemos explicado, a medida que aumenta la frecuencia de las pruebas de evaluación (aunque éstas son cada vez más informales) se *debilitan los objetivos didácticos a largo plazo*.

Aunque es cierto que esta tendencia empieza a ganar terreno también en la Universidad, podemos afirmar que en ésta el *contrato institucional* impone todavía que se mantenga la *privacidad de la relación* de los estudiantes con las matemáticas. Como consecuencia, resulta que evaluación tal como se desarrollo en la Universidad requiere un *mayor grado de elaboración personal de las respuestas* y, lo que es más importante, una cierta *interpretación global* de (una parte significativa de) *la materia*. En general las pruebas de evaluación en la Universidad requieren un estudio más sistemático; puede darse el caso que una prueba escrita sea el primer texto escrito por sus alumnos (y, a veces el único) que el profesor lee y corrige detalladamente; la distancia entre las actividades realizadas en clase y los que figuran en las prueba de evaluación es mayor en la Universidad que en Secundaria y, en definitiva, los exámenes son más "traumáticos".

4.2 Discontinuidades entre la organización escolar de las cuestiones matemáticas que se estudian en Secundaria y las que se estudian en la Universidad[13]

[13] En este punto utilizaremos los resultados obtenidos en la tesis de Cecilio Fonseca (FONSECA 2004).

En lo que se refiere a las discontinuidades *matemáticas* entre determinados aspectos de las organizaciones matemáticas que se estudian en la Universidad y las que se estudian en Secundaria, indicaremos las siguientes:

- *Dependencia de la nomenclatura asociada a una técnica matemática*

En la enseñanza universitaria de las matemáticas se considera que la "nomenclatura" es irrelevante y que un simple cambio de los símbolos que se utilizan para poner en marcha una técnica no puede representar una modificación importante de la actividad matemática. Pero en la enseñanza secundaria la rigidez de la actividad matemática es tal que puede llevar a identificar y hasta confundir la técnica con los símbolos, gráficos o palabras escritas u orales que constituyen su soporte material. Entre los múltiples ejemplos de esta dependencia podemos citar: el desarrollo del cuadrado de un binomio; la fórmula para resolver las ecuaciones de segundo grado y las reglas de derivación de funciones.

- *Aplicar una técnica en Secundaria no incluye la interpretación del resultado*

En la enseñanza secundaria de las matemáticas no se suele exigir que los alumnos interpreten el resultado de aplicar una técnica para considerar que dicha técnica ha estado "correctamente" utilizada. Así, por ejemplo, el uso escolar de las técnicas para calcular límites de funciones y la forma habitual de utilizar muchas de las técnicas de resolución de ecuaciones (por ejemplo, ecuaciones irracionales) no suele incluir ninguna "interpretación" de los resultados obtenidos. En la enseñanza universitaria esta interpretación se da por supuesta y se trabaja sobre dicho supuesto.

- *Inexistencia de dos técnicas diferentes para realizar una misma tarea*

En la enseñanza universitaria se necesita que los estudiantes puedan manejar de manera *flexible* determinadas técnicas matemáticas. En particular, cuando existen dos técnicas matemáticas que proporcionan resultados equivalentes para las tareas de cierto tipo (como, por ejemplo, dos reglas de derivación para una misma función), se requiere que la elección más adecuada o la utilización indistinta no provoque ningún tipo de dificultades a los estudiantes. Pero, como ya hemos dicho, en la enseñanza secundaria se utilizan *técnicas aisladas y muy rígidas* hasta el punto de que, aunque "existan" –en la práctica docente del profesor y en los libros de texto– dos técnicas diferentes para un mismo tipo de tareas, no forma parte de la responsabilidad matemática del alumno *decidir para cada tarea concreta cuál de las dos técnicas es la más pertinente*. Suele suceder, además, que una de las dos técnicas se acaba imponiendo de tal manera que se convierte en la manera de resolver ese tipo de problemas en Secundaria. Podemos citar, como ejemplos de técnicas que se han impuesto la "regla de tres", la regla de derivación de funciones polinómicas y la "regla de Ruffini".

- *No reversión de las técnicas matemáticas*

Uno de los aspectos más importantes de la *rigidez* de la actividad matemática que se lleva a cabo en Secundaria se manifiesta en la *no reversión* de las técnicas matemáticas correspondientes. Así, cuando existen dos tareas "inversas" entre sí (esto es, tareas con los datos y las incógnitas intercambiados) las correspondientes técnicas suelen tratarse como si fueran "independientes". Así, por ejemplo, el paso de las ecuaciones cartesianas de una variedad lineal a la ecuación vectorial de ésta (esto es, la resolución de un sistema de ecuaciones lineales) y recíprocamente, el paso de la ecuación vectorial a las ecuaciones cartesianas, son tareas inversas en el sentido citado, pero en Secundaria se consideran como tareas independientes que se realizan con técnicas no relacionadas entre sí. En otros casos la tarea inversa está ausente como, por ejemplo, la tarea de pasar de la gráfica de una función elemental a la expresión analítica de ésta.

- *Ausencia de situaciones abiertas que requieren un trabajo de modelización*

Los problemas escolares se presentan, tanto en Secundaria como en la Universidad, con enunciados muy cerrados en los que figuran como "datos" todos los que se necesitan (exactamente) para resolver el problema. Raramente se presenta una *situación abierta* donde el estudiante deba decidir cuáles son los datos que se necesitan para formular un problema matemático. Pocas veces se problematiza el propio enunciado de los problemas como punto de partida para plantear nuevos problemas. La ausencia de técnicas *explícitas* de modelización comporta que, en ambas instituciones, la modelización matemática constituya una de las actividades más problemáticas y menos reguladas. Esta *ausencia institucional de técnicas de modelización matemática* provocan dificultades en Secundaria (cuando se deja en manos del alumno la responsabilidad de resolver problemas de combinatoria, de probabilidad, de optimización o de estadística, entre otros), pero estas dificultades se agravan enormemente en la enseñanza universitaria cuando el juego entre el *sistema a modelizar* y el *modelo matemático* de dicho sistema se convierten en el corazón del proceso de estudio.

- *Cambio en el papel de las definiciones: de "descriptivo" a "constructivo"*

El papel de las *definiciones* cambia radicalmente al pasar e Secundaria a la Universidad. Mientras que en Secundaria las definiciones hacen un papel esencialmente *descriptivo* con la finalidad de precisar ciertas características de objetos supuestamente conocidos, en la Universidad las definiciones sirven para *construir objetos nuevos*. En la enseñanza secundaria el alumno tienda a considerar cualquier definición matemática como una precisión innecesaria y, por tanto, prescinda de ella en la práctica. Así, por ejemplo, la definición de "función continua" en Secundaria describe una propiedad que cumplen todas las funciones que el alumno ya consideraba "continuas" antes de la definición, mientras que en la Universidad la definición de "función continua" *construye* un objeto nuevo, un tipo de funciones entre las que hay funciones desconocidas y misteriosas.

- *De las matemáticas "mostrativas" a las matemáticas "demostrativas"*

Las funciones que se asignan a las *demostraciones* también cambia radicalmente al pasar de Secundaria a la Universidad. Mientras que en Secundaria las demostraciones hacen un papel meramente "decorativo", ya que las propiedades y los resultados se *muestran* (basta pensar, por ejemplo, en el tratamiento que se da al teorema de Bolzano) en la Universidad se descalifica la argumentación "ostensiva": la figura, el esquema o el ejemplo particular que "muestran" una propiedad, dejan de tener valor "demostrativo". Así, en la enseñanza universitaria de las matemática tiene sentido plantearse la cuestión de demostrar resultados "evidentes" a priori como, por ejemplo, que $1 > 0$.

- *La geometría en Secundaria es "intrafigural" y trabaja con nociones absolutas.*

En Secundaria se estudian relaciones "internas" entre los diferentes elementos de figuras geométricas concretas (como, por ejemplo, las relaciones entre los elementos característicos de una elipse). En la Universidad, por el contrario, aparecen nuevos objetos de estudio: el espacio mismo, las transformaciones de este espacio y las relaciones entre diferentes clases de figuras (como, por ejemplo, el estudio de las relaciones entre las clasificaciones proyectiva, afín y métrica de las cónicas). Además, las nociones que se consideran "absolutas" en Secundaria como, por ejemplo, la métrica, la unidad de superficie y el sistema de referencia, pasan a ser "relativas" en el estudio universitario de la geometría.

- *De una matemática "prealgebraica" a una abrupta algebrización.*

En Secundaria las ecuaciones y las fórmulas se utilizan principalmente como *algoritmos de cálculo* (esto es, para calcular la incógnita de una ecuación o el valor numérico de una fórmula, para valores prefijados de las variables) y el lenguaje funcional está muy separado del lenguaje algebraico. En la Universidad, por el contrario, no se hace una distinción radical entre *fórmulas y ecuaciones paramétricas*; unas y otras se utilizan como *modelos algebraicos* y se interpretan a menudo como funciones de varias variables.

Además, en la Universidad se pasa muy rápidamente al estudio de tipos de ecuaciones, condiciones de compatibilidad, relaciones entre diferentes tipos de ecuaciones, estructura de las soluciones y hasta al estudio de las estructuras algebraicas.

- *Del estudio de las funciones aisladas al de familias y hasta espacios de funciones*

En Secundaria se estudian esencialmente las propiedades de *funciones aisladas* (o de parejas de funciones relacionadas de una manera muy especial como, por ejemplo: seno-coseno y exponencial-logarítmica). En la Universidad se pasa rápidamente al estudio de *tipos de funciones y sucesiones de funciones*. Más adelante se llega hasta el estudio de *espacios de funciones*.

5 Conclusiones y propuestas de futuro

Hemos visto que el paso de las matemáticas de Secundaria a las matemáticas de la Universidad plantea un problema complejo, inseparable del problema general de la Educación Matemática. Hemos enfatizado el por qué este problema no acepta soluciones *inmediatas* sino que, por el contrario, requerirá un enorme esfuerzo de investigación antes de ser comprendido en su totalidad y, desde luego, antes de ser resuelto. Queda claro que cualquier intento de *trivialización de este problema* está abocado al fracaso y que, por lo tanto, no podemos pretender proponer soluciones *mágicas* basadas únicamente en el "sentido común", en la "experiencia" y en la pura "reflexión" aislada. En particular, la posición dominante de la *respuesta psicopedagógica* al problema de la Educación Matemática, al legitimar la separación entre "hacer" y "enseñar" matemáticas, ha dificultado, y continúa dificultando, el tratamiento científico del mismo. Su esclarecimiento requerirá el desarrollo de la investigación didáctico-matemática y ésta necesitará la participación ineludible de toda la comunidad matemática.

(1) ¿Qué cuestiones matemáticas deben ser tratadas en la Escuela?

En el marco de la necesaria reformulación del contrato entre la Escuela y la Sociedad, es urgente redefinir el papel de las matemáticas en la Escuela y, en primer lugar, *delimitar las matemáticas que deben estudiar obligatoriamente todos los ciudadanos.*

Es urgente fijar las matemáticas obligatorias para todos los ciudadanos, no sólo en términos de "contenidos" sino, sobre todo, en términos de "*cuestiones problemáticas*" que la educación matemática ha de ayudar a contestar en la Enseñanza Obligatoria.

Es necesario conseguir aulas específicas para las clases de matemáticas que permitan tanto el acceso a material manipulable como el uso de calculadoras, ordenadores, etc. Esto ayudaría a tomar en consideración el *carácter experimental de la actividad matemática* y propiciaría una enseñanza en la que los alumnos no fuesen meros "espectadores".

(2) Formación matemático-didáctica del profesorado

Hay que clarificar las funciones del profesor en la Escuela actual y, en particular, las *funciones del profesor de matemáticas* en cada uno de los niveles educativos. Es necesario precisar lo que significa, en cada caso, "educar matemáticamente" y, en consecuencia, cuál debe ser la formación adecuada de los profesores encargados de impartir dicha "educación".

En lo que respecta a la formación inicial es imprescindible aumentar la formación matemática en las Escuelas de Formación del Profesorado e incluir la formación *didáctica* (sin confundirla con la mera formación *pedagógica*) en las facultades de matemáticas. Pero, sobre todo, no se debe separar la formación matemática de la formación didáctica. Esto requerirá clarificar lo que se entiende por *formación matemático-didáctica* y, también, determinar cuál es la formación útil a los futuros profesores de matemáticas.

(3) Razón de ser de la matemática enseñada

Muchos de los "contenidos" matemáticas que se estudian actualmente, tanto en la enseñanza secundaria como en la enseñanza universitaria, son "*obras muertas*" porque se ha “olvidado” su “razón de ser”, esto es, se han olvidado las cuestiones a las que dichas obras matemáticas responden.

Debe reformularse el currículum de matemáticas para incluir en él la “*razón de ser*” de las obras matemáticas que se proponen, esto es, las *cuestiones problemáticas* a las que dichas obras responden. Es probable que de esta manera tengan que eliminarse muchos de los contenidos del currículum actual e incluirse otros nuevos. Ejemplos: ¿Cuál es la “razón de ser” de los límites de funciones en el actual programa de Bachillerato? ¿Y la de la geometría analítica? ¿Cuál la cuestión problemática a la que responden los números racionales en la ESO? ¿Y ciertos criterios de convergencia de series numéricas en el primer curso universitario de Cálculo?

(4) Las comunidades de estudio como sujetos del aprendizaje

Es esencial que en la Escuela puedan constituirse verdaderas “*comunidades de estudio*” de ciertas cuestiones. Una tal comunidad de estudio dependerá esencialmente de lo que tengan en común los estudiantes en relación a las cuestiones a estudiar, independientemente de la diversidad de las características personales de éstos.

A este respecto, proponemos *flexibilizar la organización escolar de los “grupos” de alumnos*. Dicha flexibilidad debería permitir que durante determinadas sesiones periódicas (por ejemplo, semanales) se formasen grupos “heterogéneos” –formados por alumnos provenientes incluso de diferentes niveles educativos– para estudiar conjuntamente determinadas cuestiones matemáticas seleccionadas previamente. Así, por ejemplo, podría formarse un grupo para intentar estudiar cómo funciona una calculadora, para tratar de analizar la fiabilidad de las encuestas o para hacer un estudio comparativo de las tarifas de los teléfonos móviles.

(5) Necesidad de nuevos dispositivos didácticos

Algunas de las cuestiones a estudiar en la Escuela deberían ser de tal naturaleza que para responderlas se requiera un *esfuerzo sistemático y prolongado* en el tiempo. Deben proponerse, explícitamente, *objetivos a largo plazo* incluyendo objetivos que requieran retomar las cuestiones o problemas planteados en cursos anteriores (y no resueltos o resueltos sólo parcialmente) con la finalidad de estudiarlos de una forma más amplia y completa.

Proponemos la creación de nuevos dispositivos didácticos (de ayuda al estudio de las matemáticas) como, por ejemplo, el que podríamos denominar “*Cuaderno de los* *problemas pendientes*" en el que los alumnos fuesen copiando todos aquellos problemas o, cuestiones matemáticas, que no quedan completamente resueltos y que serán posteriormente retomados para seguir estudiándolos. Los dispositivos de evaluación deberían evolucionar, paralelamente, para ir incluyendo algunas cuestiones generales que abarcasen no sólo varios temas, sino incluso varias áreas de las matemáticas escolares. Uno de los principales objetivos de estos nuevos dispositivos debería ser el de destruir el mito de la "*comprensión instantánea*" que lleva a los alumnos a considerar inútil la resolución de problemas matemáticos ya que, o bien los problemas son *triviales* (resolubles con una técnica algorítmica dada de antemano), o bien son *irresolubles* (porque la mera lectura del enunciado no proporciona automáticamente el método de resolución).

Por otra parte, y muy relacionado con la necesidad de llevar a cabo procesos sistemáticos y prolongados en el tiempo, hay que decir que el *desarrollo sistemático* y *dirigido de las técnicas matemáticas* constituye una dimensión esencial de la actividad matemática y que, sin embargo, tiene una presencia "oficial" muy débil tanto en la enseñanza secundaria como en la enseñanza universitaria de las matemáticas. Esta ausencia relativa dificulta objetivamente el desarrollo de la verdadera "creatividad matemática".

Por consiguiente proponemos crear, tanto en la enseñanza secundaria como en la universitaria, los "Talleres de Prácticas Matemáticas", cuya función principal sea la de permitir que viva de manera normal e institucionalizada el trabajo de la técnica. Su objetivo principal es permitir el estudio prolongado y en profundidad de ciertos tipos de problemas matemáticos, de tal forma que sea el propio desarrollo interno de la actividad matemática el que provoque la interrelación entre contenidos conceptuales y procedimentales de distintos temas e incluso de distintas áreas de las matemáticas escolares. En el ámbito de la enseñanza universitaria existe cierta experiencia en el diseño y desarrollo de este tipo de talleres (BOSCH y GASCÓN 1993, 1994 y 1995).

(6) Aumentar la necesaria coordinación entre los diversos niveles educativos

A lo largo de todo el proceso de democratización y universalización de la educación matemática en España la desconexión entre la Secundaria y la Universidad ha ido creciendo paralelamente a la *escisión de la comunidad matemática* extensa[14]. Esta escisión progresiva ha contribuido a *aumentar la distancia* entre las matemáticas que se enseñan en la Universidad y las que se enseñan en las instituciones docentes de nivel no universitario. Es interesante recordar que esta situación ya fue denunciada por Felix Klein a principios del siglo pasado (KLEIN 1927).

La comunidad matemática extensa debe aceptar la responsabilidad de proponer a la Sociedad un programa de estudio de las matemáticas que abarque, de manera integrada, todos los niveles educativos, *desde la enseñanza primaria hasta la universitaria* (con todas sus variantes). Esto significa que la comunidad matemática debe hacer un enorme esfuerzo de integración y de reorganización internas para constituirse como sujeto capaz de hacer propuestas y discutirlas en el marco de una sociedad democrática.

(7) Asunción de la responsabilidad que le corresponde a la Comunidad Matemática

La dejación de responsabilidades de la comunidad matemática nuclear en lo que hace referencia a la *formación de los profesores* de matemáticas de todos los niveles educativos y al desarrollo de la *didáctica de las matemáticas*, ha dificultado objetivamente el desarrollo de criterios matemáticamente fundados para analizar los fenómenos didáctico-matemáticos. Indirectamente esta dejación ha potenciado el predominio casi absoluto de los criterios psicopedagógicos.

(a) En relación a la *formación del profesorado* de matemáticas de Secundaria hay que decir que estamos en un momento histórico crucial en el que la comunidad matemática nuclear tiene la última oportunidad de asumir la responsabilidad que le corresponde en la formación de los futuros profesores de matemáticas de dicho nivel educativo.

(b) Para asumir estas importantes responsabilidades es imprescindible que la comunidad matemática nuclear tome el *problema de la Educación Matemática* como un problema propio. Siguiendo a Guy Brousseau[15], daremos dos argumentos que refuerzan la

---

[14] La comunidad matemática extensa incluye, junto a los productores del conocimiento matemático (que constituyen la familia nuclear de la gran familia de los matemáticos), a los profesores de matemáticas de todos los niveles educativos, a los divulgadores del conocimiento matemático, a los historiadores, a los epistemólogos y a los didácticos de las matemáticas.

[15] La obra de Guy Brousseau constituye la piedra angular sobre la que se alza la ambición de construir, en el seno de la comunidad matemática, una ciencia que tenga como objeto de estudio las condiciones de creación y difusión de los saberes matemáticos en las instituciones sociales. En Brousseau (1998) se recogen sus principales trabajos publicados entre 1970 y 1990.

necesidad de que los investigadores en matemáticas contribuyan al desarrollo de la didáctica de las matemáticas.

Como ya hemos dicho, en la enseñanza de las matemáticas existen *actividades irreductiblemente matemáticas*. El estudio científico de esta parte irreductiblemente matemática de la enseñanza *es o será cosa de los matemáticos*. Además, Guy Brousseau postula que para ampliar y mejorar su tarea, los investigadores en matemáticos deberán interiorizar una nueva concepción de las matemáticas (que incluye como actividades genuinamente matemáticas las relativas a la *comprensión* y a la *comunicación*). En este punto Brousseau formula la tesis de que *la didáctica de las matemáticas llegará a ser plenamente parte de las "matemáticas"* (BROUSSEAU, 1994).

Esta "*matematización*" del problema de la Educación Matemática responde, por lo tanto, a necesidades intramatemáticas y constituye una condición necesaria para que la comunidad matemática nuclear empiece a tomar en consideración los problemas "didácticos" como problemas científicos no triviales. Sólo asumiendo esta responsabilidad, la comunidad matemática podrá cumplir plenamente la *función científica y social* que se le ha encomendado.

Referências

BISHOP, A. J. (1991): Mathematical Enculturation, Kluwer Academic Publishers: Dordrecht (Holanda) [Traducción al español de Genís Sánchez Barberán, Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural, Paidós: Barcelona (1999)].

BOLEA, P., BOSCH M., GASCÓN J. (2001): La transposición didáctica de organizaciones didácticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad, Recherches en Didactique des Mathématiques, 21/3, 247-304.

BOSCH M., GASCÓN J. (1993): «Prácticas en Matemáticas: el trabajo de la técnica», en: Rojano T., Puig L. (1993) Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática (Valencia, junio 1991), CINVESTAV, México, 141-152.

BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1994): La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas, Enseñanza de las Ciencias, 12(3), 314-332.

BOSCH, M., GASCÓN, J. (1995). Talleres de prácticas matemáticas en el primer ciclo de la licenciatura. Actes del Symposium d'Innovació Universitària: "Disseny, desenvolupament i avaluació del currículum universitari", Publicacions de la Universitat de Barcelona, 25-36.

BLANCO, L. J. (2001): La Educación Matemática en los Planes de Estudio de Formación de Profesores de Primaria, La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 4/2, 411-414.

BROUSSEAU, G. (1994): Problèmes et résultats de Didactique des Mathématiques, ICMI Study 94 : Washington.

BROUSSEAU, G. (1998): Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970-1990 (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield, Eds.). La pensée sauvage: Grenoble. [Existe versión inglesa: Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques 1970-1990 (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland and V. Warfield, Eds. and Trans.), Dordrecht, The Netherlands: Kluwer, 1997].

CHEVALLARD, Y. (2000): La recherche en Didactique et la formation des professeurs : problématiques, concepts, problèmes, Actes de la Xème École d'Été de Didactique des Matématiques, Tome I, pp. 98-112, A.R.D.M. : Caen.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997): Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje, Barcelona: ICE/Horsori.

DIEUDONNÉ, J. (1987): Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui, Hachete: Paris.

FONSECA, C. (2004): Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Enseñanza Secundaria y la Enseñanza Universitaria, Tesis Doctoral, Universidad de Vigo, Departamento de Matemática Aplicada.

GARCÍA CALVO, A. (1992): Recuerdo de la charla dada en Alcalá de Henares el 6 de abril de 1989, en Gómez, F.J. y Gómez-Pantoja, J. (eds.), Pautas para una seducción. Ideas y materiales para una nueva asignatura. Cultura Clásica. ICE de la Universidad de Alcalá de Henares: Madrid.

GASCÓN, J. (1997): Cambios en el contrato didáctico. El paso de estudiar matemática en Secundaria a estudiar matemática en la Universidad, Suma, 26, 11-21.

GASCÓN, J. y LLADÓ, C. (1998): Una història compartida, Butlletí de l'Associació de Barcelona per l'Estudi i l'Aprenentatge de les Matemàtiques, 0, 2-4.

KLEIN, F. (1927): Matemática elemental desde un punto de vista superior, Madrid: Biblioteca Matemática.

MEC (1989): Libro Blanco para la Reforma del Sistema Educativo, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

RECIO, T. (2002): Sobre "El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas" de J. Gascón, La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 5/3, 699-702.

THURSTON, W. P. (1994): On proof and progress in mathematics, Bulletin of the American Mathematical Society, 30/2, 161-177.