Contribuições da Didática da Matemática para compreensão dos impactos do vazio didático na prática dos professores de Matemática que evoca as inter-relações entre os domínios numérico-algébrico e geométrico

Contributions of mathematics didactics to understand the impact of emptiness in practical teaching of math teachers which evokes the interrelations between the numeric-algebric and geometric domains

LUIZ MARCIO SANTOS FARIAS[1]
EDMO FERNANDES CARVALHO[2]
ELIANE SANTANA DE SOUZA[3]

Resumo

Este artigo apresenta alguns resultados de uma pesquisa desenvolvida durante o doutorado do primeiro autor defendido em 2010 na França, sobre o estudo das interrelações entre os domínios numérico-algébrico e geométrico (NAG) no ensino de Matemática. Esta pesquisa teve por objetivos: analisar como os professores utilizam e orientam os alunos sobre a utilização do NAG e estudar como a utilização de tais interrelações pode favorecer o processo de ensino e de aprendizagem de Matemática. Com base na teoria da Antropologia do Didático desenvolvida, por Chevallard, partiu da hipótese que existe um vazio didático para estas interrelações enquanto ferramenta e objeto. São apresentadas algumas características das práticas de ensino sobre o NAG no contexto do observatório das práticas sobre o numérico iniciada por Bronner & Farias (2007). A partir de dados coletados nesta pesquisa, cuja metodologia foi do tipo clínico, abordou-se e analisou-se objetos matemáticos baseando-se em alguns dados recolhidos junto a um professor e seus estudantes em uma classe, durante a pesquisa a cerca do NAG. O trabalho compreendeu um estudo histórico e epistemológico, um estudo de currículos e livros didáticos e das práticas de professores. Por meio deste trabalho, procurou-se evidenciar as condições atuais de ensino, e revelar um problema didático que parece não identificado ou mesmo subestimado pelos professores no que diz respeito ao papel das interrelações entre os domínios matemáticos. Este trabalho revela que apesar do vazio didático, as interrelações estão presentes nas práticas dos professores e têm um lugar e um papel importante no ensino de Matemática. E que este vazio pode constituir um obstáculo para os estudantes na execução de atividades que envolvem, simultaneamente, os domínios numérico-algébrico e geométrico e no momento da construção de novos conhecimentos.

Palavras chave: *Análise de práticas de ensino. Teoria Antropológica do Didático. Vazio Didático.*

[1] *Universidade Federal da Bahia/UFBA - Universidade Estadual de Feira de Santana/UEFS - lmsfarias@ig.com.br*
[2] *Pós-graduando PPGEFHC/UFBA - edmof@ig.com.br*
[3] *Pós-graduanda PPGEFHC/UFBA - Annystar_@hotmail.com*

Abstract

This paper presents some results of a poll developed during the PhD of the author who, in 2010 in France first defended the study of the interrelations between the numeric-algebric and geometric domains (NAG) in teaching Mathematics. This research aims to analyze how teachers use and guide students on how to use the NAG and study how the use of such interrelations can facilitate the teaching-learning process of Mathematics. Based on the theory of educational anthropology developed by Yves Chevallard we began with the hypothesis that there is an educational emptiness about these interrelations as tool and object. We presented some of the teaching practices features about NAG in the context of the Observatory of the Numeric Practices initiated by Bronner & Farias (2007). From data collected in this survey, in which methodology was the clinical type, I approached and analyzed mathematical objects based on some data collected by a professor and his students in a class, when searching thanks to the NAG. The work included a historical and epistemological study, a study of curricula and textbooks and teachers' practices. Through this work, we tried to highlight the current conditions of teaching, and noticed a problem, which doesn't seem didactically identified or even underestimated by teachers as regards the role of interrelations between the different mathematical domains. This work reveals that, despite the empty course, interrelations are present in the practices of teachers, that they have a place and an important role in teaching Mathematics. This emptiness may constitute an obstacle for students in performing activities which involves both the numeric-algebric and geometric domains but, also, in the construction of a new knowledge.

Key words: *analysis of teaching practices; Anthropological theory of Didactic; Empty Didactic.*

Introdução

Os professores de Matemática da Educação Básica inscrevem todo trabalho desenvolvido nesses níveis de ensino em um dos três grandes domínios da Matemática. Os domínios numérico e algébrico possuem interrelações bastante naturais, fundamentadas nos números e no cálculo, ocasionando nestes níveis de ensino um problema didático de natureza e escolha do domínio. A Transposição Didática, por sua vez, propõe o aparelhamento dos conhecimentos geométricos desde o início da Educação Básica, organizando desta forma, o domínio geométrico. Desde as tradições geométricas gregas do período clássico, que podemos encontrar evidentes interrelações entre esses três grandes domínios, como por exemplo, na exposição dos Teoremas de Pitágoras e de Tales (FARIAS, 2010).

Pesquisas em Didática da Matemática já sinalizaram a possibilidade e a importância, para o processo de ensino e de aprendizagem, de se fazer as "idas e vindas" entre os diferentes domínios matemáticos. Em contrapartida, o estudo das *interrelações entre os domínios numérico-algébrico e geométrico* (NAG) - como objeto matemático ou instrumento didático - e suas implicações no processo de ensino e de aprendizagem de Matemática permanece pouco desenvolvido em Didática da Matemática e constitui o objetivo da nossa investigação.

As recomendações oficiais para Educação Nacional no Brasil, e em outros países, apontam a necessidade de ajustar o trabalho escolar a uma nova realidade, marcada pela crescente presença da Matemática em diversos campos da atividade humana, (BRONNER E FARIAS, 2007). Tais recomendações repercutem diretamente nas revisões dos currículos da Educação Básica e do ensino universitário no Brasil e em outros países, como por exemplo, na França.

No que diz respeito ao ensino secundário brasileiro, o programa em vigor data de 1998, Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). No que diz respeito ao ensino da Matemática, os PCN fornecem elementos que colaboram com o debate nacional a cerca do processo de ensino e aprendizagem de Matemática, bem como, socializa informações e os resultados de investigações no conjunto dos professores brasileiros. O PCN de Matemática visa à construção de um referencial que guie a prática escolar de tal maneira que seja possível a qualquer criança e jovem brasileiro ter acesso a um conhecimento matemático que torne realmente possível, a sua inserção, como verdadeiros cidadãos no mundo do trabalho, nas relações sociais e culturais:

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos (BRASIL, 1998, p. 19).

Através das coletas de dados realizadas durante a construção do “banco de aulas” do observatório de práticas, (BRONNER E FARIAS, 2007), puderam constatar dificuldades dos professores para estabelecer e utilizar as interrelações existentes entre os domínios numérico-algébrico e geométrico presentes, quer seja nas tentativas de resoluções das tarefas quando se tenta mudar o quadro (DOUADY, 1986), quer seja nas possíveis trocas entre diferentes registros de representações (DUVAL, 1993). Estes obstáculos atingem, certamente, os estudantes, que apresentam dificuldades para instaurar as interrelações possíveis entre os domínios matemáticos e, sobretudo para encontrar meios de controle e validação do que fazem. Os professores, por conseguinte, são frequentemente confrontados às dificuldades e aos bloqueios dos seus estudantes. Neste contexto os professores se perguntam: (a) *o que eu posso fazer para ensinar uma tarefa matemática?* (b) *como dirigir o estudo de tal tarefa na minha classe?*

Para entender como os professores respondem essas questões, apoiamo-nos na Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Chevallard e por este motivo, apresentaremos, em linhas gerais, esta teoria.

Teoria Antropológica do Didático (TAD)

Um estudo praxeológico matemático e um estudo praxeológico didático (CHEVALLARD, 1999) pode permitir respectivamente, modelizar às respostas das perguntas (a) e (b). Chevallard considera que qualquer ação humana pode ser analisada num sistema que ele nomeou praxeologia ou organização praxeológica. Neste contexto, o papel do professor, tal como podemos observar na classe, pode exprimir-se em termos de *praxeologias*, que trata-se de uma abordagem inscrita no prolongamento da teoria da *Transposição Didática* (CHEVALLARD,1992).

Segundo Chevallard, a didática das ciências, como todas as didáticas, inscreve-se no campo da antropologia social, ou seja, o campo do estudo do homem. Da mesma maneira que existe uma antropologia religiosa, e outra política, cujos objetos de estudos são respectivamente a religião ou a política, Chevallard (1992) propõe a elaboração de uma antropologia didática, cujo objeto de estudo seria a didática, com o objetivo de estudar, por exemplo, o professor e o aluno diante de um problema matemático. O princípio dessa abordagem é que "*tudo é objeto*". O autor distingue, no entanto os tipos de objetos específicos, a saber: *instituições* (**I**), *pessoas* (**X**) e as posições que ocupam as pessoas nas instituições. Ocupando tais posições, pessoas tornam-se *sujeitos* ativos das instituições contribuindo para existência das mesmas. O *conhecimento* - *o saber* (**O**), como certa forma de organização – entra então em cena com a noção de *relação* entre os elementos primitivos (*instituição*, *objeto do saber* e *pessoa*) da teoria.

Relação pessoal e relação institucional

Um objeto **O**, como por exemplo, o NAG, existe à medida que uma pessoa X (um professor-P ou um estudante-E) ou uma instituição I (universidade, escola, curso) reconhece sua existência. Chevallard postula que um objeto O existe para uma pessoa X se existe uma relação pessoal, denotada R(X, O), da pessoa X ao objeto O. De maneira análoga, se define uma relação institucional de I a O, denotada R(I, O) que exprime o reconhecimento do objeto O pela instituição I.

Segundo Chevallard (1989), um saber não existe num vazio social, mas está ligado ao menos a uma instituição e todo conhecimento numa determinada sociedade se ancora em uma ou várias instituições. A *relação pessoal* só pode ser estabelecida quando a pessoa entra na instituição onde existe o objeto. Por sua vez, uma *relação institucional* está ligada às atividades institucionais que são solicitadas aos alunos. Ela é, de certa maneira, caracterizada por diferentes tipos de *exercícios* que os alunos devem efetuar e por razões que justificam tais tipos de exercícios. Sendo assim, a *relação institucional* a um objeto [R(I, O)] é descrita por um conjunto de práticas sociais que funcionam numa instituição, envolvendo esse objeto do saber. Seguindo na apresentação das bases teóricas da TAD, abordaremos em seguida a vertente praxeológica.

Praxeologia

De acordo com Chevallard, o *saber matemático*, enquanto forma particular do conhecimento é fruto da ação humana institucional, e é algo que se produz, se utiliza se ensina ou, de uma forma geral, que transita nas instituições. Chevallard propôs a noção *praxeologia* como conceito chave para estudar as *práticas institucionais* relativas a um objeto do saber e em particular as práticas sociais em matemática. Ele ainda distinguiu as *praxeologias* que podem se construir numa sala de aula (onde se estuda esse objeto), ao analisar a maneira pela qual se pode construir o estudo desse objeto, e que podem permitir a descrição e o estudo das condições de realização. A *abordagem praxeológica* é, portanto um modelo para análise da ação humana institucional. Com efeito, as *praxeologias* são descritas em termos das quatro noções a seguir: (Tipo de) tarefa → T, (Tipo de) Técnica→ τ, Tecnologia→ θ, Teoria → Θ, Que permitem a modelização das práticas sociais em geral e das atividades matemáticas em particular.

Tomemos como exemplo o exercício: "Construir o gráfico da função linear definida por $f(x)=ax$", propostos em uma das aulas que observamos na classe da primeira série, a luz de uma organização praxeológica.

Na tarefa T: construir o gráfico da função cuja lei de formação é $f(x)=ax$. Poderíamos nos referir às e*spécimes* t_1: construir o gráfico da função definida por $f(x)=2x$, t_2: construir o gráfico da função definida por $f(x)=-x$, Sendo que $\{t_1; t_2\} \subset$T.

A técnica τ: é a maneira usual de executar a tarefa proposta que, no caso, é formada pelas seguintes etapas: construção de duas retas perpendiculares, estabelecimento de uma escala em cada eixo, localização de dois pontos A e B no plano cartesiano de coordenadas

$\left(x_1,\ f(x_1)\right)$ e $\left(x_2,\ f(x_2)\right)$ respectivamente e, finalmente, a construção da reta que passa pelos pontos A e B.

A tecnologia: O gráfico de uma função linear $f(x) = ax$ é uma reta que passa pela origem.

Demonstração:

I) Caso $a > 0$. É evidente que a origem O = (0, 0) é um ponto do gráfico. Para x = 1, temos $y = a.1 = a$, de forma que o ponto Q = (1, a) também está no gráfico.

A condição para que um ponto qualquer P = (x, y), com x ≠ 0, satisfaça a equação $y = ax$ é que $\frac{y}{x} = \frac{a}{1}$. Observando a figura 1 (nos anexos), isso equivale a dizer que os triângulos OAQ e OBP são semelhantes, ou que o ponto P está na reta OQ.

II) O raciocínio no caso $a < 0$ é o mesmo.

III) Se a = 0, a equação se reduz a y = 0, cujas soluções são os pontos $(x,0)$, isto é, os pontos do eixo Ox, portanto, o gráfico é o eixo Ox.

Dentre as teorias Θ de suporte estão: (Θ_1) Função como correspondência $x \to 2x$; (Θ_2) Uma função f: R→ R pode ser representada graficamente do seguinte modo: considera-se em um plano α um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais XOY e o conjunto G de todos os pontos de coordenadas $\left(x,\ f(x)\right)$, com $x \in$ R. O conjunto G é denominado gráfico da função f relativa ao sistema de coordenadas XOY; (Θ_3) As condições de semelhança de dois triângulos; (Θ_4) O teorema da proporcionalidade. Além disso, pode-se acrescentar a teoria Θ_5: A função linear é uma função contínua.

Nesse contexto, o bloco [tarefa/técnica] é considerado o *saber-fazer*, ao passo que o bloco [tecnologia/teoria] é considerado o *saber*. No exemplo apresentado, *saber* construir o gráfico da função linear é conhecer a praxeologia descrita.

Dessa forma, podemos afirmar que *produzir, ensinar e aprender matemática* são ações humanas que podem descrever-se conforme o modelo *praxeológico*, ou seja, decomponível em dois blocos [**T/τ**] e [**θ/Θ**], constituindo, respectivamente, o *saber-fazer* [*praxe*] e o ambiente *tecnológico-teórico* [*logos*]. Nesse sentido, a *organização praxeológica* relativa às atividades matemáticas é uma *organização matemática*[i].

Segundo Matheron,

> Essa organização permite estudar uma mesma noção matemática designada por um mesmo nome, mas com organizações matemáticas de naturezas diferentes se desenvolvidas no seio de instituições diferentes. Esse ponto de vista ressalta o aspecto ecológico relativo à um objeto O, quer dizer, o aspecto do questionamento da existência real ou da inexistência desse objeto na instituição

onde vive uma dada organização matemática. Essa dimensão ecológica nos permite questionar como é ensinado um objeto identificado
um livro didático, que tipo de técnica será utilizada na resolução de determinado exercício e qual é a organização matemática, e por consequência, que tipo de programa considerar. (MATHERON, 2000, p. 52).

Analisar a vida de um objeto matemático em uma *instituição*, compreender sua significação para essa instituição, é identificar a *organização matemática* que coloca esse objeto em jogo. Nesta perspectiva procuramos estudar a *organização matemática* que é um dos objetos reveladores de praxeologia completa nas instituições de ensino.

A noção de *organização praxeológica e a noção de relação institucional* proporcionam, a partir de um estudo *ecológico dos livros didáticos* e de *programas* de cursos, ferramentas que podem contribuir na modelização das respostas das questões elaboradas por Matheron.

Bronner (1997) considera que em uma instituição dada, a um momento institucional dado, uma tarefa genérica pode ser esclarecida do ponto da vista de certas condições de acordo com o resultado esperado, este contrato uma vez estabelecido determina até as formas dos resultados esperados. A partir deste contexto surgiram as nossas hipóteses de investigação sobre as quais nossos estudos apoiam-se, dentre elas configura a existência de um *vazio didático*, Bronner (1997, 2007) para o **NAG** como *instrumento* e como *objeto* no **EMS**. Apesar desse *vazio didático*, o **NAG** tem um lugar e um papel importante no ensino-aprendizagem de Matemática atualmente. Tal vazio pode constituir um obstáculo para alunos e professores na resolução de tarefas que recorrem ao **NAG** e na construção de novos conhecimentos.

Metodologia e Análise

Do ponto de vista metodológico, foram realizados ao longo de um ano escolar, observações em uma classe equivalente à 1ª série do Ensino Médio brasileiro, em um colégio francês, composta por 32 alunos. Estas observações foram gravadas em áudio e todas as atividades realizadas pelos alunos foram fotocopiadas, ambos sofreram uma análise detalhada. O que nos possibilitou a reconstituição da *organização matemática*, bem como *didática* presentes nas aulas. Objetivando complementar as nossas análises realizamos entrevistas com professores e alunos, além de filmar algumas aulas.

Visto a amplitude dos estudos realizados ao longo desta pesquisa, no que diz respeito aos resultados apresentados neste artigo, ressaltamos que foram considerados apenas os dados coletados e observados a partir de uma única aula. Nesta aula o professor de Matemática que denominamos P2, faz o seu curso sobre os objetos: "*a distância entre dois números"* *e "o valor absoluto de um número*". Analisando o discurso de P2 nesta aula, constatamos que, nem os objetos da aula, o estudo "*da distância entre dois números e o valor absoluto de um número*", nem as intenções de P2 de introduzir estes dois objetos, são revelados aos alunos no início do curso, eles vão aparecer progressivamente ao longo do mesmo.

De maneira geral, a *organização matemática* (OM) construída na classe apresenta três tipos de tarefas em torno dos quais a aula é desenvolvida. O curso sobre "*a distância entre dois números e o valor absoluto de um número*" começa quando P2 propõe aos alunos um tipo de tarefa que denotaremos $\mathbf{T_{carré}}$. Este tipo de tarefa guia o jogo didático do início ao fim da aula. Nesta aula aparecem também duas outras tarefas que são denotados $\mathbf{T_d}$ e $\mathbf{T_V}$, sobre as quais trabalham P2 e os seus alunos.

O quadro anexo (tabela 1) apresenta de modo simples os tipos de tarefas e suas técnicas. Nele não especificamos os elementos tecnológicos ou teóricos das praxeologias que aparecem na aula. Mas tais elementos serão anunciados, de forma resumida, no decorrer deste artigo. A organização matemática da aula pode ser descrita por intermédio das tarefas $\mathbf{T_{carré}}$, $\mathbf{T_d}$ **e** $\mathbf{T_V}$ e de certo número de sub-tarefas que denominaremos de *espécimes*.

A partir desta análise podemos apresentar a organização didática que se constitui na aula. No que diz respeito à organização didática da aula, o curso deste professor começa por uma fase individual de elaboração - a introdução de uma nova noção, seguida de uma fase de institucionalização de conhecimentos e termina-se por uma fase de exercícios representada no quadro anexo (*Tabela 2:* As fases da aula relacionadas ao tipo de atividades).

Constatamos que para atingir o seu objetivo, P2 instaura uma organização didática complexa a medida que trabalha com os seus alunos na realização de várias tarefas (e com as respectivas espécimes) procedentes da tarefa que propôs no início da aula. Por este motivo, a organização didática da aula se instaura através das *perguntas-respostas* que acompanham toda aula.

Em relação ao saber a ser ensinado, ou seja, no que diz respeito aos dois novos objetos estudados "*a distância entre dois números e valor absoluto de um número*", observamos que estes são abordados de maneira bastante próxima, em alguns momentos nos pareceu que os dois objetos eram tratados como sinônimos. No entanto, eles não são sinônimos, mas comportam elementos comuns. P2 sinaliza que o objeto "valor absoluto" aparece de maneira evidente, como um dos grandes obstáculos dos alunos na compreensão desta aula, assim como em outras situações do EMS. Tal noção é introduzida nas séries iniciais do Ensino Fundamental II, mas de maneira restrita, sendo retrabalhada até o Ensino

Médio. Esta repetição pode ser devido à importância matemática desta noção e as constatações da persistência dos erros dos alunos produzidos em torno da mesma.

Considerações

Sobre as situações construídas por P2 por meio de perguntas-respostas, parece-nos importante apontar que nesta aula foi adotado como critério a aquisição de dois saberes matemáticos ao mesmo tempo "*distância entre dois números e o valor absoluto*" este fato é verificado a partir das perguntas-respostas que conduzem todas as fases da aula. Vergnaud (1981) sublinha que não é razoável estudar separadamente a aquisição de conceitos e procedimentos, pois, nas situações encontradas pelo aluno, os saberes são dificilmente dissociáveis. Por conseguinte, as situações cujos alunos confrontaram-se com vários objetos ao mesmo tempo implicam num tratamento dos conceitos e dos procedimentos de vários tipos em estreita conexão.

A aula é constituída de diversos conhecimentos que permitem o funcionamento e a evolução da mesma como deseja P2: o conhecimento sobre a diferença entre medida e comprimento, sobre a distância, sobre lógica de linguagem, etc., são alguns conhecimentos que fazem parte das exigências implícitas de P2. O funcionamento da aula torna-se desta forma um trabalho complexo onde se misturam diferentes conhecimentos e onde intervêm também as fronteiras possíveis de alteração entre a relação pessoal com o saber, por parte do aluno, e a parte pública que está explicitamente em causa nas relações dos alunos com P2.

No que se refere à avaliação das produções dos alunos, nos parece são consideradas elementos importantes no processo de aprendizagem. Geralmente, P2 considera as intervenções feitas pelos alunos e as organiza de forma que possam ser compreendidas por toda a classe. P2 ainda considera as diferentes respostas (corretas ou erradas), as marcas de incompreensão, os procedimentos efetuados, a diversidade dos resultados apresentados na classe, etc. É dado tempo aos alunos, de modo que eles possam procurar respostas às diferentes perguntas que lhes são feitas. Vimos também que em determinadas fases desta aula P2 faz perguntas e as responde, o que denominamos "*diálogos no espelho*". Podemos interpretar esta atitude como uma estratégia para melhor guiar a institucionalização de certos objetos, o que pode ser relevante para consolidar as aquisições dos alunos.

Observamos que nesta aula os alunos são frequentemente conduzidos a fazer analogias, comparações, ou tratar problemas em domínios diferentes do qual o problema foi proposto para avançar num raciocínio, explicar ou até mesmo dar sentido aos conceitos trabalhados. Observamos também a utilização do cálculo literal para reduzir o trabalho do cálculo numérico e utilização de representações gráficas através da reta graduada para trabalhar os conceitos de distância entre dois números e valor absoluto de um número. Pelas análises efetuadas, constatamos que dar sentido a conceitos utilizando exemplos, comparações, analogias, não é simples. Como sublinha Duval (1993), os objetos matemáticos como retas, números, representações algébricas, etc. não são objetos reais ou físicos, e para manipulá-los os alunos devem passar pelas suas representações, mentais e semióticas. Observando o nosso protocolo podemos afirmar que P2 consegue conduzir este encadeamento coerente para transitar pelos diferentes momentos que compõem esta aula. O NAG foi utilizado para promover mudanças de registros e de quadros, mas P2 não consegue manter tal encadeamento em todas as fases, o que ocasiona dificuldade em um determinado momento da aula, o que também pode ser verificado em nosso protocolo. Nesta aula os alunos são convidados a compreenderem os objetos matemáticos propriamente, e não somente a sua representação, os alunos devem dominar um mesmo objeto matemático em vários registros de representação semiótica e estes registros coordenam os objetos. Para Duval (1993), compreender um objeto matemático é a capacidade de reconhecê-lo em diferentes registros. A conversão de uma representação semiótica à outra pode ser assim a ocasião de se aprender.

Os assuntos que são trabalhados nesta aula são anunciados como pertencentes ao quadro numérico, mas o trabalho que se observa nesta aula inscreve-se no **NAG**. Este trabalho utiliza pelo menos três registros de representações semióticas que vão ser introduzidos na aula a partir do trabalho da técnica para resolver a tarefa. A resolução da tarefa inicial não é um mecanismo simples, solicita ao mesmo tempo conhecimentos ligados às situações específicas e regras gerais susceptíveis de serem aplicadas às largas categorias de problemas. Constatamos que os alunos que participaram desta aula elaboraram um esquema contextualizado de resolução da tarefa.

Constatamos que o professor P2 utiliza o **NAG** de maneira implícita. Nesta aula pode-se observar que a integração do **NAG** no processo de ensino e aprendizagem é contínua e fortemente ligada às normas previstas para a institucionalização dos objetos estudados e previstos pelas instruções oficiais. Os caminhos percorridos pela nossa pesquisa nos revelaram que o **NAG** é um objeto fortemente presente no processo de ensino e aprendizagem de Matemática no secundário, o que nos impulsionou na continuidade das investigações que temos feito em diferentes séries do ensino de Matemática no Brasil.

Referências

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. - Brasília : MEC/SEF, 1998. p.19/28.

BRONNER, A. *Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*, 23 junho de 1997. 386f. Tese de Doutorado em Didática da Matemática - Laboratório Leibniz, Universidade Joseph Fourier, Grenoble, 1997.

BRONNER A. Les nombres réels dans la transition collège-lycée: Rapports institutionnels et milieux pour l'apprentissage. *Actes du séminaire national de didactique, IREM de Paris,* 2007.

BRONNER, A. & FARIAS, L.M.S. *Comment la profession prend-elle en compte les interrelations entre les domaines numérique-algébrique et géométrique ?* In Actes du II congres international sur la Theorie Anthropologique du Didactique, 2007.

CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* n°19, pp 43-75, 1989.

CHEVALLARD Y. Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 12.1, pp. 73-111, Éditions La Pensée Sauvage, 1992.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19/2, La Pensée Sauvage, 1999.

DOUADY R. «Jeux de cadres et dialectique outil-objet», *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 7, n° 2, 1986, p. 5-31.

DUVAL R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de didactique et de sciences cognitives, n°5, p.37-65, IREM de Strasbourg, 1993.

FARIAS, L.M.S.: *Étude des interrelations entre les domaines numérique, algébrique et géométrique dans l'enseignement des mathématiques au secondaire: Une analyse des pratiques enseignantes en classes de troisième et de seconde.* Thèse de Doctorat, Université de Montpellier 2, France, 2010.

MATHERON Y. Analyser les praxéologies quelques exemples d'organisations. 2000.

VERGNAUD G. L'enfant la mathématique et la réalité. Ed. Peter Lang, Berne, 1981.

Recebido em: 01/10/2014

Aceito em: 01/12/2014

Anexos: Figuras e Tabelas

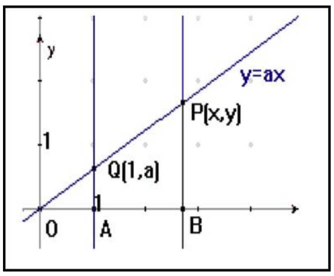

***Figura 1:** Representação gráfica da questão:* "Construir o gráfico da função linear definida por $f(x) = ax$"

*Tabela 1***: *Os tipos de tarefas***

Tipo de tarefa T	**Técnica** τ
T$_{carré}$ – Calcular $a^2 - b^2$ sendo dado « a » e « b »	**τ**$_{carré1.}$– Com a ajuda da calculadora, calcula-se de uma só vez $a^2 - b^2$.
	τ$_{carré.2}$ - Sem utilizar a calculadora transforma-se $a^2 - b^2$ em um produto notável (a+b) (a-b). Procura-se **α** tal que: $\begin{cases} a = \boldsymbol{\alpha} + m \\ b = \boldsymbol{\alpha} - m \end{cases}$ A reta graduada é utilizada para mostrar que **α = (a +b)/2** e m=a - **α** =**α**–b. O número $a^2 - b^2$ é escrito como **(α**+m)^2-**(α**–m)^2= =2**α**2**m=**4**αm=**100**α** como valor exato procurado.
T$_d$ – Calcular d(a ;b).	**τ**$_d$ – Escrever d(a ;b)=$\|a-b\|$. Calcula-se o valor absoluto da subtração de 25 por 12 ou de 12 por 25, isto é $\|25-12\|$
T$_v$ – Calcular V(a) com « a » numérico.	**τ**$_{v1}$ – Escrever V(a) = d(a ;b)= d(a ; 0).

Linhas	**Duração**	**Modalidade de trabalho**	**Fases**	**Tipo de atividade**
De 2 à 22	03 min	Individual	**I**	AER[ii]
De 23 à 35	10 min	Coletivo	**II**	AER
De 36 à 66	10 min	Coletivo	**III**	AER
De 67 à 76	05 min	Coletivo	**IV**	AER
De 77 à 120	02 min	Coletivo	**V**	**institucionalização**
De 121 à 322	12 min	Coletivo	**VI**	**institucionalização**
De 323 à 345	04 min	Coletivo	**VII**	AER
De 346 à 352	02 min	Individual	**VIII**	AER
De 353 à 357	01 min	Coletivo	**IX**	**Balanço do trabalho**
De 358 à 365	03 min	Individual	**X**	AER

*Tabela 2***: *As fases da aula relacionadas ao tipo de atividades***

---

[i] Uma *organização matemática*, segundo Chevallard (1999), é apenas uma organização praxeológica de natureza matemática, constituída em torno de um ou vários tipos de tarefas matemáticas, mais ou menos bem identificadas, que evocam a criação de técnicas matemáticas mais ou menos adaptadas assim que justificadas por tecnologias matemáticas mais ou menos sólidas e explícitas.

[ii] Atividade de Estudo e Pesquisa (Activité d'Etude et Recherche).