

ENSINO DE GEOMETRIA: uma experiência investigativa em uma aula de mestrado profissionalizante

Teaching of Geometry: an investigative experience in a classroom of professional master's degree

JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS¹

Resumo

O artigo apresenta uma pesquisa realizada com alunos de um mestrado profissionalizante em ensino de Matemática durante a realização de uma disciplina de Geometria com o objetivo de investigar como eles podem reconstruir conceitos de prisma a partir do uso do Cabri 3D. O investigador desenvolveu uma sequência de atividades, para explorar o problema de visualização de prismas com o uso de Geometria Dinâmica e os dados foram coletados a partir da observação e registros do investigador, bem como do encaminhamento das construções dos alunos por meio do correio eletrônico e pela postagem em um grupo fechado criado para a disciplina. A análise mostrou que os participantes, professores de diversos níveis de escolaridade, não possuíam o conceito de prisma pertinente. Conclui-se que o software Cabri 3D favoreceu o desenvolvimento de habilidades visuais de modo que o objetivo da investigação foi alcançado.

Palavras-chave: Ensino de Geometria. Visualização. Cabri 3D. Prismas.

Abstract

The article presents a survey realized with students of a professional master's degree in teaching mathematics during a discipline of geometry in order to investigate how they can reconstruct concepts of prisms by the use of the Cabri 3D. The researcher developed a sequence of activities, to explore the problem of visualization of prisms using Dynamic Geometry and the data were collected from observation and records of the researcher as well as by the routing of constructions of students by means of electronic mail, also by posting in a closed group created for the discipline. The analysis showed that participants, teachers of various levels of education, did not have the concept of appropriate prism. We conclude that the Cabri 3D software favored the development of visual skills and the goal of the research was achieved.

Keywords: Teaching of Geometry. Visualization. Cabri 3D. Prisms.

¹ Professor. do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Matemática do Centro Universitário Franciscano de Santa Maria. leivasjc@unifra.br

Introdução

Quando se fala em ensinar Matemática, não se pode deixar de fazer referência a documentos oficiais que orientam esse fazer. Essa está presente na vida das pessoas em todos os momentos, de uma forma ou de outra e, na escola, desde a Educação Infantil. Especialmente o ramo da Geometria, interesse maior desta investigação em termos de ensino e de aprendizagem, está explícito nesses documentos que, inicialmente, nortearão o presente artigo.

O Referencial Curricular para a Educação Infantil – RCEI – (BRASIL, 1998a) orienta-a para crianças até três anos, e outro segmento de quatro a seis anos. Nessa orientação são atribuídos eixos de trabalho, de modo a proporcionar, por meio de experiências, a formação pessoal e social dos indivíduos e o conhecimento do mundo no qual vivem. Nesse início de formação, a Matemática já surge como eixo de trabalho: “[...] seguintes eixos de trabalho: identidade e autonomia, Movimento, Artes visuais, Música, Linguagem oral e escrita, Natureza e sociedade, e Matemática” (p. 46).

A Matemática aparece para desenvolver as capacidades cognitivas e, nesse sentido, elas “estão associadas ao desenvolvimento dos recursos para pensar o uso e apropriação de formas de representação e comunicação envolvendo resolução de problemas” (Ibidem, p. 47). A Geometria que é uma linguagem visual e, talvez, a mais relevante no papel de representação, tem uma forma muito específica de promover a comunicação. A criança, em geral, começa o processo representativo pelas garatujas de suas concepções mentais. Intuitivamente, ela já apresenta ideia de formas e tamanhos ao desenhar sua família, mesmo desproporcionalmente e, na maioria das vezes, indica seu tamanho diferente do de irmãos mais velhos e dos pais. Em seguida, ainda nessa fase, consegue dispor, por exemplo, uma porta e uma janela de sua casa de forma diferenciada, em que a primeira se coloca de forma vertical bem alongada e, a segunda, em forma horizontal menos alongada.

Ter a compreensão do que ocorre no processo educacional e formação adequada para atuar nesse nível de escolaridade parece fundamental para as perspectivas futuras quanto ao bom entendimento da área da Geometria e de seu papel nos currículos, tanto na formação básica quanto na acadêmica e, até mesmo, em pós-graduação. Não é incomum, em nossa atuação na última década, nesse último nível, encontrarmos muitos estudantes que, mesmo já tendo optado por uma graduação em Matemática, não têm o gosto ou conhecimento esperado pela Geometria.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais –PCN (BRASIL, 1998b), que constituem documento norteador para o Ensino Fundamental, destacam a presença da Matemática na vida das pessoas, sendo, por isso, tão importante preparar os professores, tanto na formação inicial quanto na continuada, para que possam realizar o intento ali indicado. Mostra o documento que “é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos” (p. 59). Dentre os objetivos, com o fim de cumprir seu papel, está “ênfatar a exploração do espaço e de suas representações e a articulação entre a geometria plana e a espacial” (p. 60). Ressalta, ainda, quanto à Geometria e seu tratamento nesse nível de ensino, espaço e forma e as grandezas e medidas, tanto no terceiro quanto no quarto ciclos.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio –OCEM – (BRASIL, 2006) denotam a importância de não se deixar os propósitos da escola atual restritos a um ensino enciclopédico e “[...] o trabalho disciplinar pode e deve contribuir para esse desenvolvimento” (p. 69). Além disso, na sequência, o documento aponta que as demais orientações, como PCNEM (2002) e os PCN+ (2002), afirmam que “o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural”. Dessa forma, o documento orienta para: a escolha de conteúdos; a forma de trabalhá-los; o projeto pedagógico e a organização curricular.

No que diz respeito ao conteúdo específico de Geometria, há orientação para que essa área proporcione ao aluno o desenvolvimento da capacidade de revolver problemas como orientação no espaço, leitura de mapas, estimativa de comparação de distâncias, propriedades de figuras geométricas e a utilização de sistemas de medidas, os quais levem ao cálculo de comprimentos, áreas e volumes. Destaca, também, que

considera-se importante que o aluno consiga perceber os processos que levam ao estabelecimento das fórmulas, evitando-se a sua simples apresentação. O Princípio de Cavalieri deve ser tomado como ponto de partida para o estudo de volumes de sólidos (cilindro, prisma, pirâmide, cone e esfera), permitindo ao aluno compreender o significado das fórmulas. No trabalho com as áreas das superfícies de sólidos, é importante recuperar os procedimentos, para determinar a medida da área de alguns polígonos, facilitando a compreensão das áreas das superfícies de prismas e pirâmides. Outro aspecto relevante na orientação ao ensino de Geometria diz respeito à representação de figuras planas e espaciais (Ibidem, p. 75).

Quanto às competências e habilidades próprias do educador matemático, definidas pelas Diretrizes Curriculares para o licenciado em Matemática, deseja-se que ele desenvolva a capacidades de:

- a) elaborar propostas de ensino-aprendizagem de Matemática para a educação básica;
- b) analisar, selecionar e produzir materiais didáticos;
- c) analisar criticamente propostas curriculares de Matemática para a educação básica;
- d) desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos;
- e) perceber a prática docente de Matemática como um processo dinâmico, carregado de incertezas e conflitos, um espaço de criação e reflexão, onde novos conhecimentos são gerados e modificados continuamente;
- f) contribuir para a realização de projetos coletivos dentro da escola básica. (BRASIL, 2001, p. 4).

Dessa forma, para adquirir tais competências, dentre os conteúdos matemáticos a serem desenvolvidos na Licenciatura, estão Fundamentos de Geometria e Geometria Analítica. Além disso, é indicado que sejam também envolvidos conteúdos da Escola Básica. Entretanto, não se percebe indicativos de inovações para a formação do professor de Matemática de modo a atender ao recomendado para os níveis inferiores como, por exemplo, inclusão de outras geometrias, como as Não-Euclidianas, Fractal, Topológica, por exemplo, além da Geometria Dinâmica, a qual se deve levar em conta para o ensino atual nessa área.

A partir desses encaminhamentos, não se pode deixar de considerar a importância dos mestrandos profissionais da área, uma vez que buscam suprir as lacunas deixadas na formação inicial do licenciado, dão prioridade à qualidade do processo e não unicamente ao conteúdo, como algumas vezes ocorre na formação inicial. O fato de ser um curso voltado ao professor atuante na escola básica, fundamentalmente, leva o professor, a partir de sua prática, a voltar aos bancos escolares, comprometendo-se com a pesquisa e buscando novas formas de ensino.

O pesquisador desta investigação atuou como coordenador de uma Licenciatura em Matemática em uma instituição pública por mais de dez anos e, atualmente, em um desses mestrandos profissionais, tem a possibilidade de ministrar duas disciplinas de Geometria e orientar dissertações na área. Sua experiência anterior, também em cursos de especialização, levou-o a propor formas diferenciadas e inovadoras de desenvolver Geometria em suas diversas nuances. No presente artigo será analisada uma dessas

formas, ao ser utilizada a Geometria Dinâmica, mais especificamente, o Cabri 3D, para iniciar e desenvolver o conteúdo de prismas. Este tema foi escolhido por ser um dos conteúdos presentes em todos os níveis nos quais os professores podem atuar ou estão atuando.

Alves (2004), ao indagar sobre “Que Educação Queremos?” descreve alguns desafios ao professor. Para ele, “o desafio do saber – os professores são os profissionais do conhecimento. Têm de estar permanentemente atualizados, têm de estar cientificamente informados dos conhecimentos que se vão produzindo”. Um pouco mais além indica o “desafio do poder e da autoridade”, o qual significa que “A nossa autoridade advém, em larga escala, dessa possibilidade de afirmarmos um saber fazer concreto, situado, ajustado, eficaz, que ninguém pode exercer em nosso nome” (p. 5). Como terceiro desafio, destaca-se o da “autonomia individual e coletiva, no qual o professor, sendo intelectual, tem de ter a possibilidade de tomar decisões sobre o como ensinar, o como avaliar, o como diferenciar a sua ação pedagógica” (p. 5).

Concorda-se com o autor sobre os desafios que coloca ao professor, os quais têm sido norteadores, até certo ponto, da prática desse pesquisador como educador matemático e, em especial, geométrico. Nesse sentido, acredita-se estar assumindo autoridade, autonomia e conhecimento para desenvolver no mestrado profissional propostas de ensino que levem os mestrandos a uma nova postura sobre isso, por meio de sua aprendizagem durante o curso e da investigação apresentada neste artigo, a qual é um exemplo de como isso vem sendo feito.

Alguns aspectos sobre Geometrias e seu ensino

De imediato, coloca-se que uma das questões sobre o ensino em Geometria é o uso das tecnologias computacionais, uma vez que elas estão presentes no dia a dia da grande maioria dos cidadãos. Mais precisamente, não se pode prescindir dos softwares de Geometria Dinâmica, pois os mesmos desempenham um papel fundamental na aquisição das habilidades visuais.

Destaca-se que o termo visualização vai muito mais além do que ver com o órgão da visão ou sua definição em dicionário. É uma habilidade que tem recebido atenção de pesquisadores internacionais e, mais recentemente, brasileiros. Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006), geometria, visualização e representação espacial e pensamento

geométrico é a terceira das linhas de pesquisa em educação matemática encontrada em mestrados e doutorados internacionais em 19 países.

As crianças começam a compreender Geometria muito antes de ingressar nos bancos escolares, em que conceitos geométricos vão surgindo de forma visual. Elas percebem o espaço que as cerca, reconhecem formas geométricas pelo seu aspecto global, como, por exemplo, objetos que rolam e que não rolam, aprendem vocabulário geométrico, mesmo que não perfeitamente definido. Segundo a teoria de desenvolvimento do raciocínio em Geometria, denominada de Van Hiele, isso caracteriza o nível 0, denominado de básico ou de visualização.

A visualização ou habilidade visual tem sido estudada por autores como Arcavi (1999, p. 217), para quem ela

é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e comentário sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de desenhar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias não conhecidas, além de avançar na compreensão.

Alguns estudos desse pesquisador, Leivas (2009, 2012, 2013), Leivas e Soares (2010), Leivas e Scherer (2011), Leivas e Marin (2013), Silva e Leivas (2014), têm mostrado a importância de desenvolver visualização como um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos.

O *National Council of Teachers of Mathematics*, NCTM, definiu princípios e normas para a Matemática escolar (NCTM, 2008). No que diz respeito ao estudo de Geometria, o documento afirma que

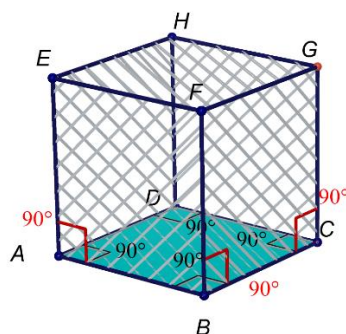
a visualização espacial – a construção e manipulação de representações mentais de objetos bi e tridimensionais e a percepção de um objeto a partir de diferentes perspectivas – constitui um aspecto essencial do raciocínio geométrico. A geometria constitui um contexto natural para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de argumentação dos alunos, culminando no trabalho de demonstração no ensino secundário. A modelação geométrica e o raciocínio espacial proporcionam formas de interpretar e descrever ambientes físicos, podendo ser ferramentas bastante importantes na resolução de problemas. (p. 44).

Nisso, há de se retomar que o rigor, especialmente a partir da dedução formal, constitui o último nível, o de número 4, da citada teoria de Van Hiele. Concorda-se com os Princípios e Normas, ao entender-se que, para chegar a esse último nível, se faz mister que, desde o

início da escolaridade, os alunos sejam estimulados a desenvolver sua capacidade de visualização por meio de experiências com uma diversidade de recursos que proporcione aprendizagem significativa.

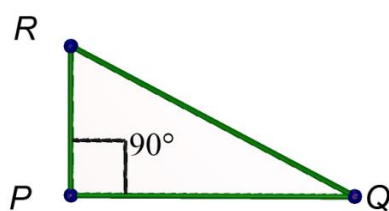
Muitas são as vezes em que os alunos, por não passarem pela fase da experimentação, não conseguem compreender certas representações de formas espaciais como, por exemplo, a de um cubo ou paralelepípedo (figura 1).

Figura 1 – Representação do cubo.



É comum visualizar-se o ângulo reto QPR a partir do esquadro, ao utilizar um material concreto, ou a partir do triângulo retângulo (figura 2). Também se ilustra pelo cantinho da sala, como o encontro de duas linhas retas. Entretanto, ao observar a figura 1, não é natural para o aprendiz perceber que os ângulos EAB ou DAB, por exemplo, são ângulos retos, uma vez que não têm a mesma conotação daquele da figura 2, ou seja, em verdadeira grandeza.

Figura 2 – Triângulo retângulo em sua posição clássica.



Piaget e Inhelder (1993), ao abordarem sobre o espaço perceptivo e o representativo na criança, indicam, em suas pesquisas, que a “esquematização espacial das condutas sensório motoras gera uma realidade genética nova, que possui suas leis próprias. Após, somente após, vem o espaço representativo, cujos inícios coincidem com o da imagem e do pensamento intuitivo” (p. 18).

Parece que, no ensino de Geometria, há uma inversão disso, uma vez que, raramente, os conteúdos espaciais são realizados anteriormente aos planos, que estão na mente e não

são oriundos de experimentações concretas. Além disso, as representações surgem, na maioria das vezes, anteriores às percepções, que são aquilo obtido na presença do objeto físico, enquanto que as primeiras são realizadas na ausência desse objeto, portanto, um construto mental, o que corrobora com a compreensão de visualização como construto mental desse pesquisador.

Talvez uma das dificuldades dos alunos em aprender geometria espacial esteja nesse fato e, quiçá, seja alguma das mudanças que se fazem necessárias no ensino dessa área do conhecimento, de modo a minimizar, também, certa má vontade dos professores em ensiná-la e, por que não, má vontade dos alunos em aprendê-la em detrimento da Álgebra.

Outra mudança, acredita-se, deve ser incorporada ao ensino de Geometria, na expectativa de modificar o cenário, é o uso das tecnologias e mídias digitais, particularmente, a Geometria Dinâmica. Esses softwares, livres, como o GeoGebra, ou proprietários, como o Cabri, permitem a criação de objetos geométricos diversos na tela do computador, de maneira que é possível efetuar um número grande de construções num curto espaço de tempo, ao contrário do que é feito utilizando apenas os instrumentos convencionais do desenho geométrico. Para Van de Walle (2009, p. 136), “os *softwares* de geometria dinâmica podem mudar drasticamente e melhorar o ensino de geometria. A habilidade dos estudantes para explorar relações geométricas com esse tipo de *software* é incomparável com qualquer outro modo não-computadorizado”.

Para Ponte et al. (2008), os programas de Geometria Dinâmica constituem, atualmente, uma opção curricular muito utilizada na investigação, uma vez que eles proporcionam, dentre outras possibilidades, a exploração de conjecturas e a investigação de relações que precedem o raciocínio formal. Além disso, são um excelente meio de coleta de dados para a pesquisa em educação geométrica.

A seguir, apresenta-se uma pesquisa que mostra como é possível realizar atividades investigativas por meio de resolução de problemas, utilizando o Cabri 3D, com estudantes de um mestrado, durante o desenrolar de uma disciplina de Geometria. Ao defender a resolução de problemas no ensino de Matemática, Van de Walle (2009) afirma que era costume do professor ensinar Matemática de modo que os alunos a praticassem por certo tempo e, depois, esperar que eles usassem as novas habilidades ou ideias na resolução de

problemas. Para ele, “As lições eficazes começam onde os alunos estão, e não onde os professores estão” (p. 58).

O experimento investigativo

Investigar a própria prática é um elemento fundamental para a pesquisa em Educação Matemática e uma forma de crescimento profissional em todos os níveis de formação, ainda mais com os formadores em nível superior e, até mesmo, da pós-graduação como é o caso desse pesquisador. Assim, as pesquisas têm se concentrado no ensino de Geometria, especialmente no ensino superior e na pós-graduação.

Para Ponte et al. (2005, p. 16), “Uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas”. A partir dessa concepção, aborda-se, no artigo, o problema de visualização de prismas utilizando o Cabri 3D. Além disso, busca-se investigar, em aulas de Geometria de um Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, como os alunos podem reconstruir conceitos de prismas a partir do uso do Cabri 3D.

Segundo os autores citados, uma investigação matemática envolve quatro momentos distintos, a saber: reconhecimento da situação e sua exploração preliminar; formulação de conjecturas; realização dos testes e eventual refinamento das conjecturas; argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado. Torna-se importante, num processo investigativo, a interlocução entre o pesquisador e os indivíduos envolvidos e o respectivo registro, de modo a recolher dados que são relevantes para a análise da investigação. Além desse, os registros utilizados durante a realização das atividades no Cabri 3D, bem como aqueles feitos a posteriori, se constituem no segundo instrumento de coleta que não pode ser deixado de lado no planejamento da investigação.

De acordo com Fiorentini e Lorenzato (2006), o pesquisador pode usar mais de uma técnica de coleta de dados, a fim de triangular as informações pertinentes. Para os autores, a observação não estruturada é aquela “na qual o pesquisador se baseia em hipóteses, possui intencionalidade na participação do grupo, mas não faz anotações perante o grupo e durante os acontecimentos. Justamente por isso, é preciso muita atenção, memória e método.” (p. 109).

Juntamente com essa forma de coleta de dados, utilizou-se, também, o recurso do correio eletrônico, no qual os alunos encaminharam, via e-mail, ou postaram num grupo da internet, fechado e destinado à disciplina, suas tarefas, hipóteses e comentários, o que

permitiu ao pesquisador alcançar o quarto ponto relativo a uma investigação, indicado antes.

A investigação foi realizada em uma turma de dez alunos. Com exceção de um deles, todos os outros atuam nos três níveis de ensino. Essa disciplina ocorreu no primeiro semestre letivo de 2004, na terceira aula. Sua duração era de 4 horas-aula na quinta-feira e 4 horas-aula na sexta-feira, funcionando quinzenalmente. Nas quintas, as atividades são realizadas no laboratório de informática, inicialmente utilizando o Cabri 3D e, na segunda metade do curso, com o GeoGebra. Nas sextas, as aulas são em sala convencional com o uso de outros recursos didáticos. Na primeira aula, o professor cria um grupo na internet, exclusivo para a turma, no qual são postadas todas as instruções e atividades anteriores e posteriores da disciplina. O que consta do artigo foi desenvolvido em um encontro no laboratório de informática.

Como um dos objetivos da disciplina é reconstruir conceitos de geometria espacial, optou-se por fazê-lo utilizando a investigação matemática por meio do software Cabri 3D. O objetivo da aula foi o seguinte: explorar as ferramentas visuais [régua e compasso] para conceituar prismas.

Como os indivíduos já tinham realizado duas aulas introdutórias à Geometria Espacial no Cabri 3D, nessa aula, pretendia-se construir prismas, e, para tal, solicitou-se que os alunos elaborassem uma definição provisória para tais sólidos. No quadro 1, apresentam-se as respectivas definições, obtidas a partir do conhecimento prévio que todos tinham a respeito, uma vez que, no mínimo, eram graduados em Matemática.

Quadro 1: definições provisórias de prisma dos mestrandos.

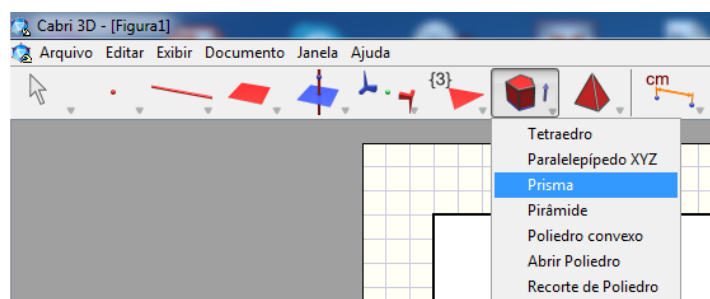
A	É um sólido geométrico formado por, pelo menos, três planos diferentes.
B	Prisma é um objeto espacial limitado por polígonos de lados opostos paralelos e as laterais são paralelogramos.
C	Um poliedro que possui faces paralelas e congruentes.
D	É um objeto com três dimensões, largura, comprimento e altura. São exemplos de prismas: cubo, o paralelepípedo, prismas quadrangulares, triangulares, pentagonais, entre outros.
E	Prisma é um sólido geométrico.
F	É um sólido geométrico de 3 dimensões limitados por figuras planas.
G	Uma figura onde geralmente as faces laterais são formadas por triângulos.
H	Uma figura geométrica espacial. São classificados conforme a figura plana de sua base, por exemplo: quadrangulares ou triangulares.
I	Não encaminhou a definição provisória.
J	Um prisma é um sólido geométrico, composto de vértices e arestas.
K	É um sólido geométrico de 3 dimensões limitadas por figuras planas.

De acordo com Moise e Downs (1971, p. 495), a definição de prisma é dada como segue. “Sejam E_1 e E_2 dois planos paralelos, R uma região poligonal contida em E_1 e L uma reta que intercepta E_1 e E_2 , mas não intercepta R . Para cada ponto P em R , seja $\overline{PP'}$ o segmento que é paralelo a L e liga P a P' de E_2 . A união de todos os segmentos $\overline{PP'}$ é chamada prisma”. Os autores, ao exigirem que a reta L não intercepte a região R , prendem-se ao fato de não considerarem o paralelismo uma relação reflexiva. Assim, se houvesse a interceptação, eles consideram que não haveriam segmentos paralelos. A região R é chamada de base inferior ou base do prisma, enquanto que a parte congruente a ela, localizada em E_2 , chama-se base superior. A distância entre os dois planos paralelos que contêm as bases é a altura do prisma.

O quadro 1 indica que os respondentes não deram uma definição correta de prisma ou que se aproximasse bastante, o que é preocupante pela formação do grupo focal, todos com curso superior em Matemática. C indica que é um poliedro, conceito que ainda não havia sido retomado no curso, o que não inviabilizaria a definição provisória. Entretanto, indica, na própria definição, os elementos do prisma, ou seja, faces. Obviamente que as características apresentadas constituem elementos relacionados, mas deve-se lembrar que uma definição exige o princípio da economicidade, ou seja, deve ser na medida certa. Não devem faltar nem abundar termos.

Observa-se aqui que começa a ser delineada a primeira etapa de uma investigação, como apontado por Ponte et al. (2005), a saber, reconhecimento da situação e sua exploração preliminar. Muito embora a interface do Cabri 3D apresente a ferramenta de construção de prismas (figura 3), julga-se que, para construções conceituais, não se deveria usá-la, pois seria algo imediato. Com isso, tem-se um problema a resolver, o que caracteriza, segundo os autores, uma investigação.

Figura 3. Interface do Cabri 3D.



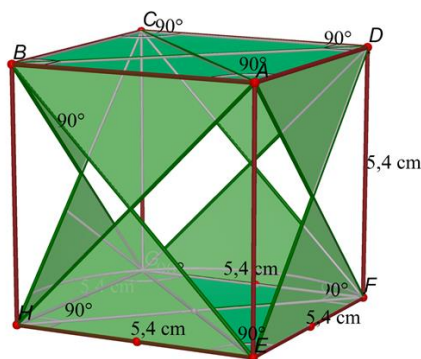
Orientou-se, por meio de uma sequência de passos que envolveram a retomada de conceitos geométricos planos, a construção de um prisma de base quadrada, conforme verifica-se a seguir.

1. Construa um quadrado no plano horizontal utilizando régua e compasso virtuais [não usar a ferramenta disponível no software para construir quadrados].
2. Confira se a figura construída tem as propriedades que definem um quadrado. Movimente a figura, para confirmar se ela se mantém. Coloque o quadrado numa posição que lhe dê melhor visualização.
3. Pelos vértices A, B, C e D, levante perpendiculares à região quadrada e transfira a medida do lado do quadrado para essas perpendiculares, determinando os pontos E, F, G e H.
4. Passe um plano por E, F, G e H, paralelo ao plano que contém o quadrado ABCD, e determine a região quadrada EFGH. O que pode ser dito sobre essa região em relação à primeira?
5. Forme quatro novas regiões com os pontos obtidos. Compare as quatro entre si e com as duas primeiras. Como você definiria a figura obtida?
6. Esconda os elementos que venham a atrapalhar sua visualização. Se desejar, preencha as faces de formas e cores diferentes.

Até aqui é possível verificar se os estudantes levantam conjecturas, realizam testes e eventuais refinamentos dessas, bem como se elaboram argumentação, o que corrobora os preceitos da investigação delineados por Ponte et al. (2005).

Observou-se, na construção da estudante F (figura 4), que a mesma se utiliza, particularmente, dos testes, ao demarcar os quatro ângulos retos e as medidas dos quatro lados da região construída para a base do prisma, ou seja, uma região quadrada. Algo importante a destacar é a representação, de fato, de uma região e não de um polígono, uma vez que pinta a região quadrada. Muitas vezes há conflitos entre o conceito de região poligonal e polígono, que são conceitos distintos, mas nem sempre levados em conta, inclusive em livros didáticos.

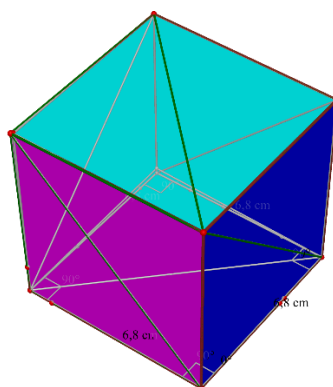
Figura 4. Prisma (cubo) construído por F.



Ela comprova, também, as medidas dos ângulos da base superior, mas não o faz para as faces laterais, apenas marcando a medida de uma das arestas laterais, aquela em que fez a transferência das medidas solicitada na sequência 3. Parece razoável interpretar que a aluna atende ao preconizado pelo NCTM, segundo o qual a visualização espacial, como construção e manipulação de representações mentais de objetos bi e tridimensionais e a percepção de um objeto, a partir de diferentes perspectivas, constitui um aspecto essencial do raciocínio geométrico. Inclui-se, aqui, sua percepção visual, ao dividir cada face em quatro regiões triangulares congruentes, duas a duas coloridas, as quais permitem uma visualização do sólido como um todo, inclusive seu interior.

O aluno A fez a construção constante na figura 5, na qual coloriu cada face e base de cores diferentes. Além disso, demarcou as diagonais dessas. Ao colocar o prisma em movimento escolheu a melhor forma de capturar a imagem e encaminhar ao professor. Isso parece referendar o que Piaget e Inhelder (1993) indicaram de que “esquematização espacial das condutas sensório-motoras gera uma realidade genética nova, que possui suas leis próprias. Após, somente após, vem o espaço representativo, cujos inícios coincidem com o da imagem e do pensamento intuitivo” (p. 18). O aluno utilizou o recurso oferecido pelo Cabri 3D, de colocar o sólido em movimento, portanto, utilizando sua habilidade sensório-motora para vislumbrar a representação que melhor se coadunava com seu pensamento visual intuitivo.

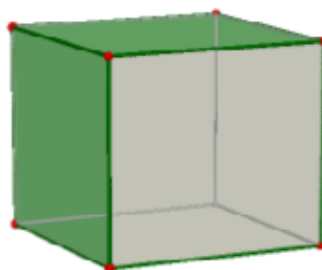
Figura 5. Construção do prisma pelo aluno A.



Na representação do prisma, realizada por C (figura 6), pode-se notar que o aluno buscou o sentido de profundidade do cubo ao representar a face lateral esquerda e a base superior numa tonalidade escura e outras em tonalidade clara. Essa busca não seria possível apenas utilizando lápis e papel, comprovando vantagens dos softwares de Geometria Dinâmica em relação a outros recursos didáticos, o que reitera a posição indicada por Van de Walle (2009, p. 136): “os *softwares* de geometria dinâmica podem mudar drasticamente e

melhorar o ensino de geometria. A habilidade dos estudantes para explorar relações geométricas com esse tipo de *software* é incomparável com qualquer outro modo não-computadorizado”, com o adendo deste pesquisador de que mudam, como se tem comprovado nessa forma de desenvolvimento da disciplina de Geometria.

Figura 6. Representação do cubo obtida por C.

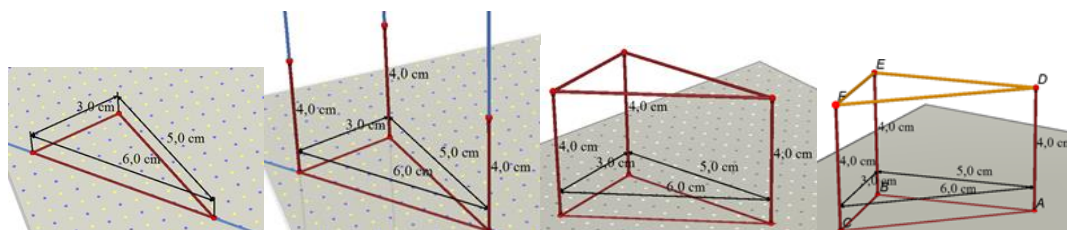


Na sequência da aula encaminhou-se a seguinte solicitação de atividade, a fim de que fossem retomadas as concepções preliminares dos estudantes sobre o conceito de prisma e que procedessem a eventuais refinamentos. Enquanto isso, no desenrolar das atividades, questionamentos, tanto por parte deles quanto do professor investigador ocorriam, de modo que conceitos, definições e nomenclaturas foram sendo retomados.

7. Repita todo o processo, iniciando com a construção de um plano frontal e um triângulo de lados medindo 3cm, 5cm e 6cm. Tome para altura do prisma 4cm.
 - 7.1. Mova o prisma para proporcionar melhor visualização. Qual a melhor forma que você encontrou?
 - 7.2. Descreva as faces laterais do prisma e classifique-as corretamente.
 - 7.3. Quem é ou são a(s) bases do prisma?
 - 7.4. Corte o prisma por uma plano paralelo à base e descreva a seção obtida.

A aluna H elaborou a sua construção de modo a obter a melhor forma que considerou para sua visualização.

Figura 7. Sequência da construção feita por H para o prisma de base triangular.

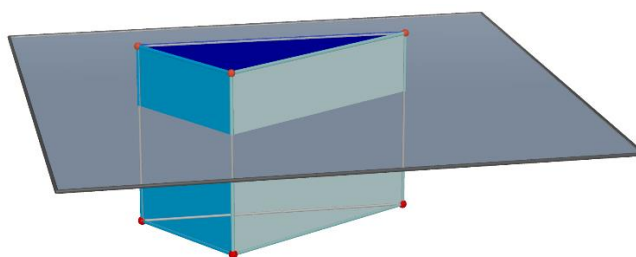


Observa-se, na construção de M, que a aluna utiliza apenas o esqueleto do prisma por suas arestas, ao contrário do que a grande maioria o fez na primeira parte da investigação, o que lhe proporcionou demarcar as medidas, pois utilizou a ferramenta distância entre dois pontos na primeira figura da esquerda, por isso aparecendo as linhas que

correspondem a tal. Isso diferencia-se da medida do segmento vertical, na segunda da esquerda. Pode-se perceber, aqui, o preconizado nos PCN (1998b) quanto ao objetivo de retirar o foco na aprendizagem centralizada em procedimentos mecânicos e de “ênfatizar a exploração do espaço e de suas representações e a articulação entre a geometria plana e a espacial” (p. 60).

A figura 8 ilustra a representação do corte realizado por um plano paralelo ao plano da base do prisma triangular. Embora não aparente grande importância a construção dessa figura, entende-se que ela reforça aquilo que indicam as diretrizes curriculares para a formação do professor (BRASIL, 2001, p. 4), ou seja, “desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos”.

Figura 8. Corte por um plano paralelo à base do prisma triangular feita por C.



A partir da conclusão da sequência de atividades, foi dada a seguinte orientação: Retome o seu conceito inicial de prisma. Concorda com ele? Quer refazê-lo? (não apagar o primeiro). Nem todos os alunos fizeram essa parte, uma vez que a aula já estava em seu final. Alguns deles foram buscar na internet os conceitos para confirmarem ou retificarem. No que segue, apresenta-se alguns registros desses alunos.

H: Concordo com o meu conceito inicial. Entretanto, eu acrescentaria informações importantes que podem definir bem melhor um prisma: prisma é uma figura geométrica formada por duas bases situadas em planos paralelos e congruentes entre si. A distância entre essas bases determinará a altura do prisma e formará a área lateral do prisma.

O conceito provisório elaborado por ela foi o seguinte: uma figura geométrica espacial. São classificados conforme a figura plana de sua base, por exemplo: quadrangulares ou triangulares. Observa-se que, inicialmente, considerou um prisma como uma figura espacial, não o distinguindo, por exemplo, de um cone ou de uma pirâmide, que também são figuras espaciais. Ao reafirmar sua definição inicial, apenas definindo ‘outras informações importantes’, já apresentou um conceito mais compatível com o correto.

J: Sua definição inicial foi a seguinte: um prisma é um sólido geométrico, composto de vértices e arestas. Acrescenta, posteriormente, ‘Além dos vértices e arestas, esse sólido também possui base, altura e faces’. Muito embora não tenha alcançado a definição correta, amplia seus horizontes iniciais após a construção do prisma. Posteriormente, em casa, ela retoma o conceito e encaminha ao professor investigador a definição correta sem, entretanto, apontar a fonte. Prismas são poliedros onde duas de suas faces são regiões poligonais congruentes situadas em planos paralelos distintos. Essas duas regiões poligonais, em planos paralelos, são denominadas bases do prisma. O último procedimento também foi adotado por I.

K: É um sólido compreendido entre dois planos paralelos, formado por áreas laterais retangulares. Essa reformulação daquela inicial ‘É um sólido geométrico de 3 dimensões limitados por figuras planas.’ permite uma visualização da definição do que seja um prisma reto.

E: Prisma é um sólido geométrico. É a definição provisória registrada pela aluno que, após as construções, a reformula para ‘Prisma é um sólido geométrico, situado em planos paralelos, limitado por duas bases.’

D: As faces laterais são retângulos e as outras são polígonos congruentes e semelhantes. São esses polígonos que dão “nome” ao prisma. Essa definição revista pela aluna ainda não chega à definição correta, porém vai além daquela inicialmente formulada: ‘É um objeto com três dimensões, largura, comprimento e altura. São exemplos de prismas: cubo, o paralelepípedo, prismas quadrangulares, triangulares, pentagonais, entre outros’. Percebe-se que ela distinguiu perfeitamente prisma de outros sólidos, mas não conseguiu formalizar o conceito adequadamente.

As escritas expostas mostram, de certa forma, que as construções permitiram aos alunos retomarem, em sua grande maioria, os conceitos preliminares, ampliando-os, mesmo que não tenham conseguido chegar à formalização final, como era o esperado. A partir disso e, em virtude de alguns terem citado na definição o termo poliedro, outra forma de definir prisma, na aula seguinte, retomou-se o conteúdo dessa, formalizaram-se as definições e partiu-se para um estudo sobre poliedros, a fim de ampliar os horizontes a respeito do tema, até mesmo por se ter envolvido, nas construções no Cabri 3D, apenas os prismas retos.

Acredita-se que, a partir disso, houve um crescimento acentuado na aquisição ou retomada do conteúdo, o qual deveria estar sendo ensinado nos diversos níveis de

escolaridade por esses mesmos alunos-professores. Devido à limitações de texto, não caberia realizar-se, no mesmo artigo, a análise da aula sequencial a essa aqui descrita.

Concluindo

Neste artigo, abordaram-se aspectos relativos ao ensino de Geometria, especialmente os tratados em documentos oficiais brasileiros, os quais norteiam a formação de professores nos diversos níveis de escolaridade. Analisou-se uma aula investigativa feita com alunos de um mestrado profissionalizante em ensino de Matemática, que julgou-se uma forma diferenciada da tradicional de desenvolver conteúdos geométricos, não partindo de definições e exemplos. Tratou-se, no artigo, o problema de visualização de prismas utilizando o Cabri 3D, com o objetivo de investigar, em aulas de Geometria, como os alunos podem reconstruir conceito de prismas.

Partiu-se das orientações emanadas do RCEI – (BRASIL, 1998a) para a Educação Infantil, segundo as quais são atribuídos eixos de trabalho de modo a proporcionar, por meio de experiências, a formação pessoal e social dos indivíduos e o conhecimento do mundo no qual vivem, com o que se acredita estar contribuindo para o debate sobre o ensino de Geometria. A investigação aqui relatada e analisada, bem como a forma com que se tem encaminhado a disciplina em um mestrado profissional corrobora o indicado no documento, de que a Matemática aparece no sentido de desenvolver as capacidades cognitivas e, nesse sentido, elas “estão associadas ao desenvolvimento dos recursos para pensar, o uso e apropriação de formas de representação e comunicação envolvendo resolução de problemas” (Ibidem, p. 47), o que parece não ter sido apreendido na formação inicial desses indivíduos.

De forma similar, a investigação também mostrou que se cumpriu a recomendação dos PCN - (BRASIL, 1998b): “é fundamental superar a aprendizagem centrada em procedimentos mecânicos” (p. 59), bem como novas formas de ensinar devem cumprir o objetivo de “ênfatar a exploração do espaço e de suas representações e a articulação entre a geometria plana e a espacial” (p. 60). Nesse sentido, o uso do Cabri 3D comprovou que os estudantes, ao manipularem os objetos construídos, adquirem e desenvolvem habilidades visuais para desenvolver a criação, a interpretação e a representação de prismas, como caracterizado por Arcavi (1999).

Mostrou, também, a importância e relevância do ensino não mais enciclopédico, pois o estudante, ao explorar o software na resolução de problemas, torna-se agente responsável

pela construção do seu conhecimento ou, até mesmo, da reconstrução desse conhecimento, o que, no caso, era esperado ter sido adquirido durante a graduação, o qual se encontrava adormecido ou, até mesmo, pode não ter sido aprendido e, conseqüentemente, não pode ser ensinado, gerando o discutido problema de abandono do ensino de Geometria na escola básica. Assim, a investigação realizada e a forma de desenvolver uma disciplina comprovam que houve desenvolvimento de habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e visualização espacial.

Muito embora possa parecer que alguns alunos não conseguiram formalizar corretamente o conceito de prisma, entende-se que a investigação proporcionou nova forma de ensino para os professores no seu exercício profissional, a qual é um dos objetivos do mestrado profissionalizante. Na sequência das aulas, com o estudo dos poliedros e a retomada das ideias elaboradas, houve um completamento do assunto, assim, ocorreu uma aprendizagem dos participantes, como comprovado em seus depoimentos ao final da disciplina.

Por estar atuando dessa forma no ensino de Geometria no mestrado por alguns anos e, anteriormente, em cursos de especialização, bem como na Licenciatura em Matemática, tem-se a convicção de que esse é um procedimento metodológico que produz, a longo prazo, bons frutos, especialmente para a escola básica.

Referências

ALVES, J. M. (2004). Que Educação Queremos? In: **Educação e Matemática**: revista da associação de professores de matemática. n. 128, pp.3-5.

ARCAVI, A. .(1999). The role of visual representation in the learning of mathematics. In: NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE PME, 1999. **Proceedings**... Disponível em: <<http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>>. Acesso em: 30 set. 2008.

BRASIL. (2006). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Disponível em < [http:// www.mec.gov.br](http://www.mec.gov.br)>. Acesso em 01 ago. 2014.

BRASIL.(1998a). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Referencial curricular nacional para a educação infantil** / Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. — Brasília: MEC/SEF.

BRASIL. (1998b) Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 148 P.

BRASIL. (2001). Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. PARECER N.º: CNE/CES 1.302/2001. Publicado no Diário Oficial da União de 5/3/2002, Seção 1, p. 15.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. (2006). **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP: Autores Associados.

LEIVAS, J. C. P. (2009). **Imaginação, Intuição e Visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática**. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009, 294 p.

LEIVAS, J. C. P.; SOARES, M. T. C.. (2010). **A função logarítmica obtida por simetria da função exponencial: explorando visualização**. Unión (San Cristobal de La Laguna), v. 1, p. 93/23-106, 2010.

LEIVAS, J. C. P. ; SCHERER, S.. (2011). **Construindo o conceito de alturas de triângulos com o Cabri-Géomètre II: verticalidade ou perpendicularidade?**. Boletim GEPEM, v. .56, p. 133-133, 2011.

LEIVAS, J. C. P.. (2012). **O Cabri 3D na resolução de um problema geométrico**. Educação Matemática em Foco (UFPB), v. 1, p. 97-117, 2012.

LEIVAS, J. C. P.; MARIN, G. B.. (2013). **O uso do Cabri 3D para desenvolver habilidade de visualização**. Boletim GEPEM (Online), v. 63, p. 105-121, 2013.

LEIVAS, J. C. P.. (2013). **Visualização ou ilusão ótica: o que dizem os mestrandos**. Revista de Educação, Ciências e Matemática, v. 3, p. 58-70, 2013.

SILVA, D.C. da; LEIVAS, J.C.P.. (2014). **Habilidades visuais desenvolvidas em uma oficina inclusiva de geometria para cegos**. Vidya (Santa Maria. Online), v. 34, p. 27-46, 2014.

MOISE, E. E.; DOWS, F. L. Jr. (1971). **Geometria Moderna. parte II**. São Paulo: Edgard Blucher.

NCTM. (2008). **Princípios e normas para a matemática escolar**. Lisboa: APM.

PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel. (1993). **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas.

PONTE, João P. da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. (2005). **Investigações matemáticas na sala de aula**. 1 ed., Belo Horizonte: Autêntica.

WALLE, J. A. Van de. (2009). **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6. Ed. Porto Alegre: Artes Médicas.

Recebido em: 01/10/2014

Aceito em: 01/12/2014