Tarefa fundamental em um percurso de estudo e pesquisa: um caso de estudo para o ensino da Geometria Analítica

The problem about disarticulation of tasks in teaching analytical geometry and the concept of basic task

ROBERTO CARLOS DANTAS ANDRADE[1]

RENATO BORGES GUERRA[2]

Resumo

Esta pesquisa trata da noção de tarefas fundamentais para o enfrentamento do fenômeno da desarticulação no estudo da geometria analítica no Ensino Básico. Essa noção é subsidiada pela articulação de tarefas para justificar outras tarefas a partir da Teoria Antropológica do Didático. E mostra, por meio de um percurso de estudo e de pesquisa, como uma questão forte para a instalação e manutenção de uma comunidade de estudo de professores para a construção de uma compreensão organizacional do ensino de geometria analítica e, não menos importante, com claras implicações para formação docente.

Palavras-chave: *Comunidade de Estudos. Tarefa Fundamental. Geometria Analítica.*

Abstract

This research deals with the notion of basic tasks to face the phenomenon of the disarticulation in the study of analytic geometry in Basic Education. This notion is subsidized by the articulation of tasks to justify other tasks from the Anthropological Theory of Teaching. This notion, through a course of study and research, it shows as a strong issue for the installation and maintenance of teachers study community to build an organizational understanding of teaching analytic geometry and, not least, with clear implications for teacher education training.

Key words*: Studies Community; Basic task; Analytic Geometry*

[1] Doutor em Educação Matemática, professor da Escola Tenente Rêgo Barros e membro do grupo de estudo e pesquisa em didática da matemática (GEDIM/IEMCI/UFPA). dantasprof@ig.com.br.

[2] Doutor em Engenharia Elétrica, professor no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática da UFPA (PPGECM), membro coordenador do Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática das Matemáticas (GEDIM/IEMCI/UFPA). rguerra@ufpa.br.

Introdução

Chevallard (1999) ao sentar as bases para a Teoria Antropológica do Didático (TAD) assume que toda atividade humana é uma prática que se realiza no interior de uma instituição e que pode ser modelada por um modelo único denominado de *praxeologia* que é constituído por uma práxis, ou *saber-fazer*, e que é sempre acompanhada de um discurso, o *logos* ou *saber*, mais ou menos desenvolvido, que dá razão e justifica essa práxis.

A atividade matemática, como atividade humana, é vista como sistema de praxeologias, ou *Organizações Matemáticas* (OM), e nesse sentido o conhecimento matemático é compreendido como o produto oriundo de atividades com a intenção de resolver determinados tipos de questões, ou *tarefas*, que foram problemáticas para uma determinada comunidade, em um dado momento histórico.

A *práxis* e o *logos*, embora diferentes, se desenvolvem em um processo dialético: a práxis e o logos estão intimamente relacionados e a articulação entre eles permitiu e permite dar forma à *praxeologia matemática*. Nesse processo, as *tarefas* problemáticas são tornadas rotineiras, no sentido de poderem ser realizadas de forma simples, rápida e seguras, por meio de elaboradas maneiras de fazer, ou *técnicas*, eficientes, inteligíveis e justificados, que segundo Chevallard (1999) podem ser traduzidas em processos estruturados e metódicos, às vezes até algoritmo.

Chevallard (1999) destaca a natureza da complexidade de uma praxeologia, mas lembra da relatividade dessa complexidade tendo em conta a instituição onde a praxeologia é considerada. Ele classifica as praxeologias matemáticas em:

Pontual quando é gerada por um único tipo de tarefa e somente uma técnica e com tecnologia ausente ou implicitamente assumida;

Local quando é gerada pela integração e conexão de várias praxeologias pontuais sob o suporte de uma tecnologia que justifica, explica, conecta e produz as diferentes técnicas para cada praxeologia pontual;

Regional é resultado da coordenação, integração e articulação de várias praxeologias locais sob o suporte de uma mesma teoria matemática.

Assim, segundo Chevallard (1999), toda prática institucional pode ser analisada de diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras num *sistema de tarefas* relativamente bem circunscritas, que se desenvolvem no fluxo da prática.

Essa compreensão se estende a uma organização didática (OD), ou uma organização para o ensino, que pode então ser traduzida por meio de articulações e integrações de praxeologias que permitam facilitar a compreensão dos temas estudados no currículo de matemática de modo a dar razão a atividade matemática, e isto quer dizer, é claro, do quê e do por que se faz o estudo de uma dada praxeologia matemática.

De um ponto de vista antropológico, o estudo, e com ele a aprendizagem, são atividades que deveriam articular os temas do currículo e contribuir para a evolução social dos indivíduos. Para Chevallard (1999), estudar uma questão na escola é recriar, sozinho ou em grupo, uma resposta que já foi produzida em alguma outra instituição. Estudar um tema que existe na sociedade, é reconstruí-lo, é fazer a adaptação desse assunto, da instituição onde ele está sendo estudado, para a nossa realidade.

Nesse sentido, para a Teoria Antropológica do Didático, uma tarefa só tem significado para o estudo se ela possuir uma legitimidade social, no sentido de se constituir em uma questão proposta pela sociedade para ser estudada na escola, uma legitimidade matemática, por demandar questões intra-matemática, isto é, que fazem parte do programa do conteúdo matemático e, não menos importante, possuir uma legitimidade funcional que se traduz por questões que levam a algum lugar, isto é, se a tarefa está conectada com outras questões estudadas na escola, na mesma série/ano ou em séries/anos diferentes.

Sob esse olhar, as praxeologias didáticas ou organizações didáticas são as respostas às questões de como estudar, ou seja, de como organizar e articular um determinado tema com outros segundo uma intencionalidade que dê razão ao estudo, portanto, as praxeologias não são criações da natureza, mas "artefatos", ou "obras", construídas pelo homem para ajuda ao estudo que são corporificadas nos documentos oficiais, nos livros didáticos, em uma sala de aula, nos cadernos dos estudantes, etc.

Esse caminhar, se assim podemos dizer, nos leva de modo natural a nos interessarmos por um fazer matemático escolar de enfrentamento de problemas que permitam desenvolver outros mais complexos, ou seja, seguindo o modelo proposto pela TAD em organizações praxeológicas de complexidade crescente (FONSECA, 2004), pontual, local e regional, de modo a emergir novas técnicas para resolver novos tipos de problemas, inclusive os iniciais, por meio de novas tecnologias.

É claro que para isso o fazer praxeológico do professor, de organizações didático-matemático, não deve ficar restrito ao simples repetir de organizações didáticas-matemáticas dos livros, mas, sobretudo, dentre outras coisas, a de articular e integrar tarefas técnicas/tecnologias para (re)construir novas técnicas/tecnologias para o estudo de novas tarefas. De outro modo, o professor se vê inicialmente frente ao problema epistemológico (GASCÓN, 2010), o quê do tema e como organizar para ensinar esse tema, tendo em conta as condições impostas pelos diferentes níveis de codeterminação didática (CHEVALLARD, 2011), por exemplo**,** as limitações do currículo frente a posição que ocupa na instituição escolar.

Esse tipo de problema para o professor é agravado pelas desconexões entre as organizações praxeológicas que vivem no ensino básico (BOSCH, GASCÓN e FONSECA, 2004**)**, e tem sido objeto de interesses de pesquisadores da Didática da Matemática, entre eles Fonseca (2004), e outros, Fonseca et al. (2010); Bosch, Gascón e Garcia, (2006), cujo encaminhamento basicamente se dá por meio de um caráter *público* em um aspecto do estudo, denominado de *trabalho da técnica*, que se constitui em resolução de tarefas aparentemente muitos parecidas entre si em que os estudantes têm a responsabilidade de tornar oficialmente rotineiras as técnicas desenvolvidas de modo a alcançar um domínio tão consistente que cheguem a utilizá-las de modo natural.

Assim, a repetição de um tipo de tarefa na forma de exercícios, é vista como uma forma de construir uma técnica, para mostrar que, não raro, uma técnica não é construída somente em um dia, mas que será necessário adaptá-la constantemente a novos (sub) tipos de tarefas, ampliar seu alcance e conseguir que se transforme em uma técnica cada vez mais geral. (CHEVALLARD, 2001).

Aqui, com o foco na atividade docente, partimos da compreensão de que uma organização matemática (OM)-didática é, ante aos professores, um *sistema de tarefas organizado para atender uma intenção didática do professor* e, portanto, cabe a ele, professor, organizar tarefas de modo, se assim podemos dizer, que possa ritmar o estudo de tal forma a prover uma ordem de tarefas de crescente complexidade, em que são tornadas rotineiras para então serem em seguida problematizadas, por exemplo.

De outro modo, as técnicas que se constituem em objetos de estudo dos alunos em grande parte dos momentos didáticos (BOSCH, FONSECA e GASCÓN, 2004) são encontradas por meio das tarefas e, portanto, para o professor, construir uma organização praxeológica sobre um tema consiste em organizar *sistema de tarefas* para o estudo desse tema, tendo em conta, é claro, as condições e restrições (como a infraestrutura didática-matemática) impostas sobre a posição que ocupa no interior da instituição escolar.

Tal problemática não se mostra simples para um único professor, pode exigir infraestruturas matemática-didática (CHEVALLARD, 2009a) adequada, entre elas, um Equipamento Praxeológico[3] docente potencialmente mais rico (CHEVALLARD, 2009b) que permita atender não somente as condições institucionais impostas, como também prover de problemas/questões concretas que se originam em sala-de-aula sobre o tema.

Em resumo, a participação da instituição docente provê um equipamento praxeológico mais rico no sentido de poder conter um número maior de praxeologias vivenciadas pelos professores ao mesmo tempo em que as dota de questões concretas que se originaram nas práticas concretas em sala de aula e, portanto, podem permitir questionar essas práticas e se mostrar úteis também para questionar e desenvolver novas práticas.

Isto deve se mostrar indispensável para o processo de estudo que deve se desenvolver por meio dessa comunidade de professores, pois provê de questões e respostas parciais que conduzirão ao encontro de uma resposta, sempre provisória, que se constituirá primeiramente embrionária na forma de um modelo epistemológico de referência (MER)[4].

Sob essa compreensão podemos pensar o problema didático do professor, aqui com o tema Geometria Analítica, como o da construção de um *sistema de tarefas* que se traduza em organizações praxeológicas de complexidade crescente, a partir da movimentação de praxeologias pontuais para construção de uma praxeologia local, por meio de uma comunidade de estudo que assumimos como um *percurso de formação do professor* corporificado por um *percurso de estudos e pesquisa* (PEP) (CHEVALLARD, 2009c)**.**

No entanto, tal percurso somente acontece e se mantém a partir de uma questão inicial suficientemente densa, ou forte, (CHEVALLARD, 2009c) que permita a instalação de um estudo investigativo sobre o objeto matemático de ensino e de interesse. Aqui então emerge nosso propósito, em mostrar, senão propor, uma compreensão sobre a questão inicial para esse tipo de problemática.

---

[3] Equipamento Praxeológico (EP) da pessoa é o amálgama de praxeologias e de fragmentos praxeológicos que a pessoa dispõe para ativar a qualquer momento, quando necessário, sob certas condições e restrições. (Chevallard, 2009b).

[4] é um instrumento que auxilia a descrição e análises do modelo epistemológico dominante nas instituições de ensino, além de atender as restrições que o modelo apresenta e que, reflete de alguma forma na relação institucional da OM em questão, pois viabiliza outros meios de se estudar a OM na instituição considerada. (SIERRA, 2006)

A necessidade de construir um sistema de tarefas que permita um fazer matemático justificado tendo como restrição a precariedade da infraestrutura matemática do ensino básico que, em geral, não permite justificar as técnicas das tarefas estudadas e reduz o ensino e a aprendizagem da matemática a *práxis (Tarefa e Técnica),* nos levaram a propor à noção de tarefas fundamentais (GUERRA e ANDRADE, 2009; GUERRA e ANDRADE, 2013; ANDRADE, 2012), mais precisamente, as tarefas de uma dada área do ensino da matemática, que vive nas instituições escolares, que podem ser vistas, ou propostas, como os *logos (tecnologias/teorias)* de técnicas de outras tarefas para o estudo de um dado tema. Tal noção, per si, não só impõe as conexões estreitas entre as tarefas de um tema como também com tarefas de outros temas e, portanto, com implicações do currículo escolar.

Se por um lado a noção de tarefas fundamentais pode parecer até óbvia do ponto de vista do fazer de um matemático, pode se mostrar problemática para o ensino. As conexões entre tarefas de um mesmo tema, em geral, não se realizam nas práticas escolares e nos livros didáticos. Este tem sido um dos problemas investigados pelos pesquisadores da Didática da Matemática (GASCÓN, 2010). Então não podemos afirmar a priori que essa noção preliminar se constitui óbvia para as construções de organizações matemático-didático de complexidade crescente.

O percurso de nossa investigação trata, portanto, em construir uma compreensão sobre as tarefas fundamentais como uma questão forte, no sentido da instalação e manutenção de um PEP, para a construção de organizações praxeológicas de complexidade crescente.

Assim, em seguida, apresentamos as condições sociais visíveis do objeto matemático de ensino Geometria Analítica, a noção de tarefas fundamentais e o enfrentamento do problema didático por uma comunidade de estudo de um grupo de professores da ETRB[5] por meio de um PEP, entendido por nós como uma atividade de uma comunidade de práticas docentes, que se constitui também em metodologia dessa pesquisa por poder fazer revelar as restrições e condições, existentes ou criadas no percurso, que envolvem o problema didático posto que possam permitir uma mais ampla compreensão para a noção de tarefas fundamentais.

[5] Escola Tenente Rêgo Barros, escola de ensino básico da rede publica federal.

A Geometria nos Parâmetros Curriculares

A área da geometria tem posição central no currículo escolar, recebendo tratamento diferenciado em função das especificidades características dessa área, pois os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática; por meio deles, "o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive" (PCN, 1998, p. 51). A importância do estudo da geometria se evidencia por apresentar e possibilitar conexões com outras áreas, como para a aprendizagem de números e medidas, pois a geometria estimula "o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc." (PCN, 1998, p. 51) e também na utilização das transformações geométricas (isometrias, homotetias), que permitem "o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes" (PCN, 1998, p. 51).

A geometria propicia ao professor a elaboração de OM e OD que explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, na perspectiva da visualização e aplicação de propriedades das figuras, bem como no estabelecimento de outras relações. Também nessa área pode-se proporcionar a assimilação das noções relativas à posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas. A utilização de objetos do mundo físico nas OMs e ODs, como as obras de arte, as pinturas, os desenhos, as esculturas e artesanatos permitem o estabelecimento de conexões não só no nível disciplinar mas também em termos codisciplinares.

No ensino médio, a geometria é concebida, segundo o PCN+ (2002, p. 124) como área de estudos "essencial à descrição, à representação, à medida e ao dimensionamento de uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços". Assim, o seu estudo visa ao tratamento das formas planas e tridimensionais e suas representações em desenhos, planificações, modelos e objetos do mundo concreto.

A proposição curricular brasileira para o estudo dessa área da Matemática é estabelecida a partir de quatro setores: Geometria Plana, espacial, métrica e analítica. Estes setores têm suas organizações matemáticas fundamentadas basicamente em dois métodos; o método sintético e o método analítico (Quadro 1).

Quadro 1 – Conteúdos e habilidades propostos para o estudo da geometria no ensino médio

Unidades temáticas
1. Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras. • Identificar dados e relações geométricas relevantes na resolução de situações-problema. • Analisar e interpretar diferentes representações de figuras planas, como desenhos, mapas, plantas de edifícios etc. • Usar formas geométricas planas para representar ou visualizar partes do mundo real. •Utilizar as propriedades geométricas relativas aos conceitos de congruência e semelhança de figuras. • Fazer uso de escalas em representações planas.
2. Geometria espacial: elementos dos poliedros, sua classificação e representação; sólidos redondos; propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; inscrição e circunscrição de sólidos. • Usar formas geométricas espaciais para representar ou visualizar partes do mundo real, como peças mecânicas, embalagens e construções. • Interpretar e associar objetos sólidos a suas diferentes representações bidimensionais, como projeções, planificações, cortes e desenhos. • Utilizar o conhecimento geométrico para leitura, compreensão e ação sobre a realidade. • Compreender o significado de postulados ou axiomas e teoremas e reconhecer o valor de demonstrações para perceber a Matemática como ciência com forma específica para validar resultados.
3. Métrica: áreas e volumes; estimativa, valor exato e aproximado. • Identificar e fazer uso de diferentes formas para realizar medidas e cálculos. • Utilizar propriedades geométricas para medir, quantificar e fazer estimativas de comprimentos, áreas e volumes em situações reais relativas, por exemplo, de recipientes, refrigeradores, veículos de carga, móveis, cômodos, espaços públicos. • Efetuar medições, reconhecendo, em cada situação, a necessária precisão de dados ou de resultados e estimando margens de erro.
4. Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras. • Interpretar e fazer uso de modelos para a resolução de problemas geométricos. • Reconhecer que uma mesma situação pode ser tratada com diferentes instrumentais matemáticos, de acordo com suas características. • Associar situações e problemas geométricos a suas correspondentes formas algébricas e representações gráficas e vice-versa. • Construir uma visão sistemática das diferentes linguagens e campos de estudo da Matemática, estabelecendo conexões entre eles.

Fonte: PCN+ (2002)

A geometria sintética, ou método sintético, é vinculada "à geometria pura que proporciona provas simples e intuitivas, [...] própria do modelo euclidiano baseada numa axiomática mais ou menos explícita" (GASCÓN, 2002, p. 02), e caracteriza-se pela utilização e articulação das propriedades de posições relativas de objetos geométricos, das relações entre figuras espaciais e planas em sólidos geométricos, das propriedades de congruência e semelhança de figuras, das análises de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações e construções com instrumentos. Quer dizer, um fazer matemático associado à utilização de teoremas e postulados vinculados à posição relativa das formas e das medidas, que objetiva à assimilação das propriedades relativas ao paralelismo, perpendicularismo, interseção e composição de diferentes formas e à quantificação de comprimentos, áreas e volumes. Por meio do método sintético, "o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas" (PCN+, 2002, p. 124), da Matemática ou de outras disciplinas. Em suma, aprende-se a lidar com a forma e a posição relativa dos objetos geométricos, como abstração preliminar do mundo real.

Gascón (2002) faz referência à introdução da Geometria Analítica por Descartes e Fermat como sendo a instituição de novas técnicas que permitiram não só abordar muitos problemas geométricos, até aquele momento sem resolução ou com resoluções ainda não tão bem determinadas – como o problema de Papus utilizado por Descartes como motivação para estabelecimento do método analítico – como também por conduzir a problemas geométricos mais complexos.

De outro modo, a Geometria Analítica, ou método analítico, é caracterizada pelo "modelo cartesiano", "cuja prática se sustenta nas técnicas da álgebra linear e cuja axiomática se coloca de forma mais implícita" (GASCÓN, 2002, p. 02). No plano, pressupõe a utilização de um sistema de coordenadas que implica em estabelecer uma correspondência entre pares ordenados de números reais e pontos do plano, o que permitirá assim a correspondência entre curvas do plano e equações com duas variáveis. De forma análoga se estabelece uma correspondência entre as propriedades algébricas e analíticas de uma equação e as propriedades geométricas da curva relacionada.

Nas proposições dos PCN, o setor Geometria Analítica é descrito como o tratamento algébrico para as propriedades e elementos geométricos, ou seja, por meio dele o aluno terá a oportunidade de conhecer e desenvolver uma forma de pensar que transforma problemas geométricos na resolução de equações, sistemas ou inequações. Assim, o método analítico "é um processo de tradução por meio do qual se utiliza uma interpretação algébrica para resolver problemas e estabelecer teoremas da geometria" (EVES, 1969, p. 04); ou seja, significa realizar estudos da geometria por meio de análises em diferentes linguagens e em seguida fazer a tradução dos resultados das análises em registros geométricos dos quais as análises foram originadas. E ainda nos permite ampliar um campo de estudos no qual nos desenvolvemos melhor para obter informação acerca de outro campo de estudos diferente daquele que poderíamos ter maior dificuldade

As indicações dos PCN, que vão ao encontro do defendido por Gascón (2002, 2010), é que esses métodos sejam estudados não de forma dissociada, e sim articulados em que um possa complementar o outro, de tal modo a dispor para o enfrentamento de tipos de tarefas da geometria a escolha do método que possibilite economia no fazer e que ele possa justificar esse fazer de forma simples e compreensiva, pois

> o aluno deve perceber que um mesmo problema pode então ser abordado com diferentes instrumentos matemáticos de acordo com suas características. Por exemplo, a construção de uma reta que passe por um ponto dado e seja paralela a uma reta dada pode ser obtida de diferentes maneiras. Se o ponto e a reta estão desenhados em papel, a solução pode ser feita por meio de uma construção geométrica, usando-se instrumentos. No entanto, se o ponto e a reta são dados por suas coordenadas e equações, o mesmo problema possui uma solução algébrica, mas que pode ser representada graficamente. (PCN+, 2002, p. 124).

Tal extrato, no entanto, deixa escapar o entendimento do papel da geometria analítica como método alternativo para resolução de problemas geométricos, o que não assegura em reconhecê-lo como um método eficiente que pode ser utilizado para resolver problemas não triviais da geometria que quando enfrentados pelo método sintético podem ser mais custosos, senão impossíveis.

Isto, é claro, não quer dizer que não haja problemas que pelo método analítico se tornem muito complexos e que pelo método sintético tenham sua complexidade diminuída. Mas, o desejável, assim, é que se tome consciência da potencialidade de articulação entre os dois métodos, sobretudo porque o ensino de cada método pressupõe um conjunto de situações com suas correspondentes tarefas.

Tanto Eves (1969) como Gascón (2002) destacam que a Geometria Analítica proposta para o estudo no ensino básico é tão elementar que se reduz a ver esse setor como um simples transporte gráfico de pontos e curvas, um modo de reconhecer as formas das seções cônicas a partir de equações expressadas de maneiras mais ou menos normais.

Isto esta longe de percebermos as indicações curriculares para um fazer por meio da Geometria Analítica que expresse uma das razões de ser desse setor no currículo do ensino médio, como um método para resolução de problemas geométricos que pode de algum modo dispensar a representação geométrica, propiciando ao estudante a ampliação de seu EP, com novas práticas que se traduzem em novas técnicas para enfrentar novos tipos de tarefas.

Nesse sentido, não só a investigação da história e da epistemologia de um dado saber matemático e de obras de estudo que vivem na escola permitiria ao docente se dar conta do papel das tarefas na reconstrução do saber como objeto de estudos. É necessário ter em conta que as diretrizes dos PCN se constituem em condições com implicações no ensino, em particular na escolha do que pode ser tomada como tarefas fundamentais a serem estudadas.

Assim, a noção de tarefas fundamentais pode proporcionar um fazer docente de articulação entre os setores da geometria, para a reconstrução de OMs e ODs, desde que tenha sempre em conta que o objetivo fundamental pode, e deve, ser outorgado pela instituição docente a partir dos tipos de tarefas que podem evidenciar a razão de ser de outras tarefas que atendam as condições, às vezes restritivas, impostas e admitidas pelas instituições.

As tarefas vivem nas praxeologias que atendem necessidades institucionais, inclusive docentes, e tal condição nos leva a encaminhar as problemáticas por nós enfrentadas como problemáticas imbricadas da profissão docente, que requerem um *millieu* mais rico, um EP mais amplo, que disponibilize outras obras e outras respostas para o seu enfrentamento, o qual somente é possível em colaboração com os pares e estes se impõem como novas condições.

Daí que em nossas investigações, surge a necessidade de um *millieu*, no qual pudéssemos vivenciar a desarticulação entre os setores da geometria na prática docente. Esse *millieu* se configura em uma comunidade de práticas que vive em uma dada instituição, em que os docentes influenciam ou são influenciados pelas práticas um dos outros e de terceiros, frutos de seus condicionamentos institucionais passados e presentes.

Comunidade de estudos

A aprendizagem é um dos pontos marcantes na TAD ao situar o ensino e a aprendizagem como resultado de processos de estudos de determinados temas, pois

> em primeiro lugar, embora a aprendizagem possa ser considerada como uma conquista individual, esquecem que é o resultado de um processo coletivo: o

> processo de estudo que se desenvolve *no interior de uma comunidade*, seja ela uma classe ou um grupo de pesquisadores. (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 198, grifo dos autores).

A aprendizagem é assim uma produção coletiva de pessoas que compartilham uns com os outros a necessidade de resolver problemas, trocando experiências no enfretamento de tarefas comuns por meio de construções de técnicas, tudo isso objetivando aperfeiçoar suas práticas, como o que ocorre no RECOOR[6] de Matemática.

Nesse sentido, entendemos uma Comunidade de Práticas Docentes, como uma Comunidade de Estudos, em nosso caso o RECOOR com duração permanente pela complexidade advinda do enfrentamento das questões problemáticas que envolvem esse fazer e por se constituir institucionalmente com o objetivo desenvolver as competências dos participantes.

Parece-nos claro, que as características que vislumbramos no RECOOR podem ser traduzidas em um percurso de estudos e de pesquisa (PEP), que se configura num sistema didático S(X, y, ρk), onde X é o conjunto de professores, y o professor coordenador/pesquisador e membro da Comunidade e Q_0 a questão de *Encontrar as tarefas fundamentais que podem promover a articulação de tarefas da Geometria Analítica*, cujos desdobramentos em subsistemas didáticos a partir de novos questionamentos imprevisíveis sobre a infraestrutura matemático-didático com a necessidade do grupo em construir seu próprio manual didático, o texto de saber que implique na elaboração de novas OMs e novas ODs de referências para a ETRB.

Mais precisamente, a problemática enfrentada pela Comunidade de Estudo advém da situação vivenciada pelos docentes sobre as OMs dos livros-textos disponibilizados a escola, pelo PNLEM[7], diferirem das OMs requeridas pelos programas de ensino que a escola busca atender para cada série.

O estudo, fruto do questionamento da infraestrutura matemático-didática, mostra a preocupação da Comunidade com as dimensões ecológica e econômica de um problema didático e objetivou a compreensão da construção do conhecimento dos objetos matemáticos, no sentido das possíveis articulações que podem ser estabelecidas, e ainda, das possíveis aplicabilidades desse conhecimento, buscando evidenciar os porquês da

---

[6] Órgão deliberativo executivo, da ETRB, constituído da coordenação de cada área ou disciplina e os respectivos professores que se reúnem semanalmente.

[7] Plano Nacional do Livro Para o Ensino Médio.

presença desse objeto na grade curricular, na perspectiva de propiciar ao professor subsídios teóricos que lhe possibilitem responder a perguntas que emergem da sala de aula, como: *por que devo estudar este ou aquele conteúdo matemático?* Questionamento ligado à razão de ser dos objetos no currículo escolar.

Esses olhares aguçados, e em particular com o estudo sob nossa direção, com suporte teórico da Didática da Matemática, mais especificamente, com a TAD, traduzem essas problemáticas como o problema da desarticulação presente na infraestrutura didático-matemática disponível, no sentido posto por Chevallard (2009a, 2009b, 2009c), Bosch e Gascón (2009) e Gascón (2010), que passamos a apresentar a seguir.

Práticas docentes para o estudo da geometria como um fazer articulado

A comunidade de estudo ETRB, ao questionar a infraestrutura matemático-didática, que vive nesta instituição, inicia por realizar uma revisão histórica e epistemológica da Geometria Analítica (ANDRADE, 2012), o objetivo e identificar as possíveis articulações entre setores da Geometria, bem como as tarefas que possuem a potencialidade de Tarefa Fundamental. Como resposta encontramos o Teorema de Tales, como objeto matemático de articulação entre a geometria analítica e plana (ANDRADE e GUERRA, 2011). O amadurecimento dessa possibilidade se deu quando do enfrentamento das práticas consideradas a seguir.

Em uma das etapas de estudos na comunidade surge o problema da desconexão entre os setores da geometria sintética e analítica dai a necessidade de compartilhamento das práticas dos docentes para o enfrentamento dessa desarticulação.

Na perspectiva de compartilhar suas experiências no ensino da Geometria Analítica Plana (GAP), os professores $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ enfatizam que seguiam as OMs/ODs constantes nos livros didáticos utilizados como referências na escola, com algumas adaptações por eles realizadas. Isso implicou em questionamentos feitos pela Comunidade, do tipo *como eram realizadas as articulações entre os objetos matemáticos de estudo, se é que tinham essa preocupação, se nesses textos não eram atendidas e, quando feitas, não eram evidenciadas?*

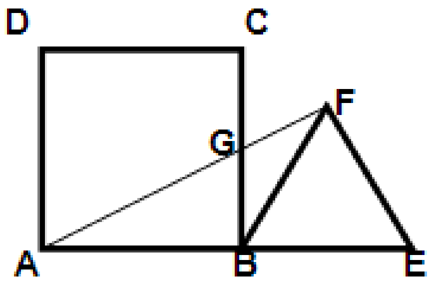
Em resposta, os professores $\mathbf{P_1}$ e $\mathbf{P_2}$ comentaram que as faziam, porém de forma muito tímida, ficando quase que evidente o isolamento entre os temas desse setor e, em algumas vezes, entre as tarefas propostas em cada tema.

Também foi feito aos professores o seguinte questionamento: *Quais relações eram estabelecidas em suas práticas entre a Geometria Plana (método sintético) e a Geometria Analítica?* O professor **P_1** relata que não destacava essas articulações, enquanto que o professor **P_2** descreve que propunha atividades aos alunos em que buscava evidenciar que um mesmo problema poderia ser resolvido por um dos métodos: sintético, vinculado à Geometria Plana; ou analítico, vinculado, nesse caso, à Geometria Analítica Plana.

Para mostrar como fazia essa relação, o professor **P_2** propôs o sistema didático, S(Y, Gu, p_i), em que Y eram os alunos, GU o professor orientador e p_i é o estudo da seguinte questão:

A figura 1 mostra um quadrado ABCD e um triângulo equilátero BEF, ambos com lados de medida 1 cm. Os pontos A, B e E são colineares, assim como os pontos A, G e F. Qual é a medida da área do triângulo formado pelos pontos BGF?

Figura 1 – Área do triângulo BGF



Para responder a essa questão, a Comunidade pôs-se a estudar as possíveis soluções com técnicas tanto da Geometria Plana como da Geometria Analítica. Utilizando técnicas da Geometria Plana, uma das soluções apresentadas (R_1) inicia por reconhecer que o triângulo ABF é isósceles, pois $AB = BF = 1$, e como o ângulo $A\hat{B}F$ mede 120º, posto que é suplementar do ângulo $F\hat{B}E = 60°$, então $B\hat{A}F = A\hat{F}B = 30°$. Isso implica no triângulo BGF ser também isósceles, visto que $B\hat{F}G = G\hat{B}F = 30°$, pois $A\hat{C}B = 90°$ e $F\hat{B}E = 60°$, já que $G\hat{B}F$, $A\hat{C}B$ e $F\hat{B}E$ formam um ângulo raso. Assim, aplicando a lei dos senos no triângulo BGF, teremos $\frac{BG}{sen\,30°} = \frac{BF}{sen\,120°}$ resolvendo teremos $\overline{BG} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

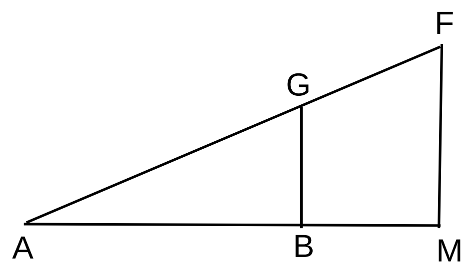
Dessa forma, para calcular a área do triângulo BGF, aplica-se a expressão que calcula a área do triângulo, quando se conhece um ângulo é os lados adjacentes a esse: $A_\Delta = \frac{BF\ x\ BG}{2}\ x\ sen\ 30°$, cujo resultado é $A_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{12}\ u.a.$

Com as técnicas da Geometria Analítica, foi proposta a seguinte solução (R_2): localizam-se os vértices da figura como pontos em um sistema de coordenadas ortogonais, tendo como a origem o vértice A(0, 0) do quadrado, daí temos B(1, 0), E(2, 0) e C(1, 1). Para encontrar as coordenadas do ponto F, calcula-se a altura do triângulo BEF relativa a F, $h_f = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{1\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, sendo essa a ordenada de F e sua abscissa $\frac{3}{2}$, já que a altura em um triângulo equilátero também é mediana, portanto as coordenadas de F são $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. As coordenadas de G podem ser encontradas como ponto de intersecção da reta que passa pelos pontos C e B e a reta que passa por A e F, para isso encontra-se a equação da reta $\overleftrightarrow{\mathrm{CB}}$ que resulta em $x - 1 = 0$, e a equação da reta $\overleftrightarrow{\mathrm{AF}}$ representada por $3y - \sqrt{3}x = 0$. Resolvendo o sistema $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 3y - \sqrt{3}x = 0 \end{cases}$, encontramos as coordenadas do ponto G$(1, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

Com as coordenadas dos pontos B(1, 0), F$(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e G$(1, \frac{\sqrt{3}}{3})$, pode-se calcular a área do triângulo aplicando a técnica da área do polígono quando se conhecem os vértices, $A_\Delta = \frac{|D|}{2}$, em que D é o determinante composto pelos pontos que representam os vértices do polígono, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, sendo $A_\Delta = \frac{|D|}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}\ u.a.$

Ao final da exposição dessa solução, o professor V expressou que em vez de ter que encontrar as equações das retas, para em seguida resolver o sistema para determinar as coordenadas do ponto G, poderia ser usado o Teorema de Tales (figura 2), modelando o triângulo AFM, em que M é o ponto médio do segmento $\overline{\mathrm{BE}}$.

Figura 2 – Aplicação do Teorema de Tales



Aplicando o Teorema, teremos, $\frac{GB}{FM} = \frac{AB}{AM}$, de onde $\overline{\mathrm{GB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} x\ 1}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

O trabalho com essa questão despertou na Comunidade a possível razão de ser da Geometria Analítica, qual seja, como no exposto por Gascón (2003, p. 29), “as técnicas da Geometria Analítica constituem a resposta a algumas das limitações que apresentam as técnicas sintéticas para resolver problemas genuinamente geométricos propostos sem utilizar coordenadas”. Por outro lado, o mesmo autor assevera que em muitos casos é quase que imprescindível o uso de técnicas sintéticas para previamente sugerir a estratégia que se usará posteriormente com as técnicas analíticas.

Quanto à busca das Tarefas Fundamentais, dentre as tarefas pertencentes ao MER assumido por estes professores a partir das OM e OD presentes nos livros didáticos, a Comunidade sela a resposta R_p, reafirmando a potencialidade das tarefas relacionadas ao Teorema de Tales, e acrescenta que os métodos sintéticos e analíticos devem ser propostos de modo articulado na perspectiva da complementariedade de ambos.

Isto revela que as condições para eleição das Tarefas Fundamentais estão também relacionadas à intencionalidade didática em articular tarefas não só relativas de um setor em estudo, mas com tarefas de outros setores, como no caso da Geometria Plana e a Geometria analítica.

Após essas compreensões, foi proposto um novo sistema didático à Comunidade para um aprofundamento sobre essas relações entre a Geometria Analítica e a Geometria Plana $S_1(Y, y, O_1)$, em que a obra (O_1) utilizada é o trabalho de Gascón (2003) que trata dos efeitos do autismo temático sobre o estudo da geometria no Ensino Básico.

Nesse estudo, dentre as questões levantadas, o autor destaca o uso da construção com régua e compasso como técnica que auxilia de forma bastante significativa na escolha e aplicação das técnicas da Geometria Analítica, pois

> a eficácia para resolver certos tipos de problemas de Geometria Analítica melhora de forma muito significativa se se utiliza uma parte do tempo em traduzir os problemas ao âmbito da Geometria Sintética e resolvê-los, por exemplo, com régua e compasso. (GASCÓN, 2002, p. 29, tradução nossa).

Essa afirmativa de Gascón ajuda a Comunidade a selar como resposta Ro_1 a necessidade da disciplina Desenho Geométrico no currículo do Ensino Básico na perspectiva de possibilitar articulação entre a Geometria plana e a Geometria Analítica já observada na obra de Descartes. Porém, essa afirmativa requer uma nova organização didática para a disciplina Desenho Geométrico, para que ela assuma esse “novo papel”, que segundo o entendimento da Comunidade, deveria ser também seu objetivo.

A compreensão da Comunidade recai sobre as tarefas do desenho geométrico como aquelas que poderiam promover a articulação e justificação entre as tarefas da Geometria Plana e, por conseguinte entre as tarefas das geometrias planas e analíticas, daí que a busca das tarefas que possuem a noção de Tarefa Fundamental podem ser buscadas em outras disciplinas sob as condições e restrições institucionais.

Isto revela que a complexidade para eleição das tarefas extrapola o nível da disciplina matemática e implica no papel da Comunidade em outros níveis de codeterminação didática.

A Comunidade, assim, assume também como resposta R_{02} construir, que é assumida como objeto de investigação futura, essa organização didática de referência para o ensino do Desenho Geométrico, tomando por base a articulação entre os setores da geometria em uma perspectiva do horizonte do conteúdo ao longo da educação básica.

Após a apresentação das práticas, tomando como base os estudos realizados no contexto histórico e epistemológico, nas análises dos livros didáticos e, principalmente dos relatos das práticas compartilhadas pelos membros do grupo, a Comunidade acorda entre seus membros a importância dos seguintes tipos de tarefas:

- localização de pontos no plano
- determinar a distância entre dois pontos;
- escrever a equação da reta;
- determinar a medida de um segmento a partir e outros segmentos.

A Comunidade assegura que de uma ou outra maneira, os três primeiros tipos de tarefas, da Geometria Analítica Plana e o último até então pensado como específico da geometria sintética, lhes parecem ser os que se caracterizam como fundamentais, pois estão presentes nas práticas que vivem na escola e expressam a potencialidade de justificação e articulação com as outras tarefas, parecendo transversalizar o setor da Geometria Analítica, ora assumindo o papel de tarefa, ora sendo utilizado como técnica, ou até mesmo como tecnologia/teoria, o que expõe a funcionalidade dos elementos de uma praxeologia.

A tarefa de construir organizações praxeológicas para a GAP se mostra árdua e complexa, com contratempos às vezes decorrentes de conflitos das relações pessoais com as novas relações institucionais com saberes nas organizações didáticas, embora realizadas por pessoas que são sujeitos dessa mesma instituição, aqui claramente vivida pelo professor $\mathbf{P_3}$.

A compreensão de poder fazer organizações segundo suas intencionalidade parece ser suficientemente forte, estimulador como pode nos fazer crer o professor **P$_3$**, que também trabalha com turmas de preparação específica para vestibular (cursinho) em outras instituições escolares, quando manifestou sua satisfação em fazer parte da Comunidade;

Professor **P$_3$**: *"Em outros ambientes de trabalho não tenho oportunidades de compartilhar o meu fazer e além de tudo aprender com os colegas*"

Seguindo, relata que, como tínhamos identificado no estudo histórico e epistemológico, já utilizava o Teorema de Tales como tema que articula outros temas da Geometria Analítica, como distância entre dois pontos e equação da reta etc., porém só após o estudo e a troca de conhecimentos com os colegas é que tomou consciência da verdadeira importância do Teorema de Tales para o estudo da Geometria Analítica;

Professor **P$_3$**: *"pois agora consigo articular não só os temas propostos para o ensino da Geometria Analítica como também as tarefas propostas em cada tema e vejo essas articulações como a possibilidade do aluno justificar o seu fazer".*

A fala do professor **P$_3$** nos parece deixar claro a Comunidade como constituidora de meios para construção de práticas docentes relativas aos saberes matemáticos escolares e, sobretudo, que o meio para essa construção se dá nos estudos dos textos didáticos, de obras matemáticas, de história e epistemologia das matemáticas e, não menos importante, da e na interação das práticas, nos estudos das praxeologias matemáticas e didáticas que vivem, em seus modos de vida, em seus condicionamentos e restrições, na instituição.

Considerações finais

A organização de tarefas, como se observou, não se deu ao acaso, mas emergiu como produto dos confrontos das práticas, de suas interpretações a luz das obras e praxeologias estudadas, em diferentes e emergentes sistemas didáticos na Comunidade, e aponta a estrutura do modelo epistemológico a ser tomado como referência para a consecução de seu objetivo quando essa Comunidade assume o papel de construtora de OMRE (Organizações Matemáticas de Referencias) que se constitua em uma OMLRC[8] a partir da movimentação intencional de tarefas a luz da noção das tarefas fundamentais.

[8] 0rganização Matemática Local Relativamente Completa (Fonseca, 2004), são OM que visam o trabalho na técnica possibilitando evidenciar a tecnologia que o sustenta.

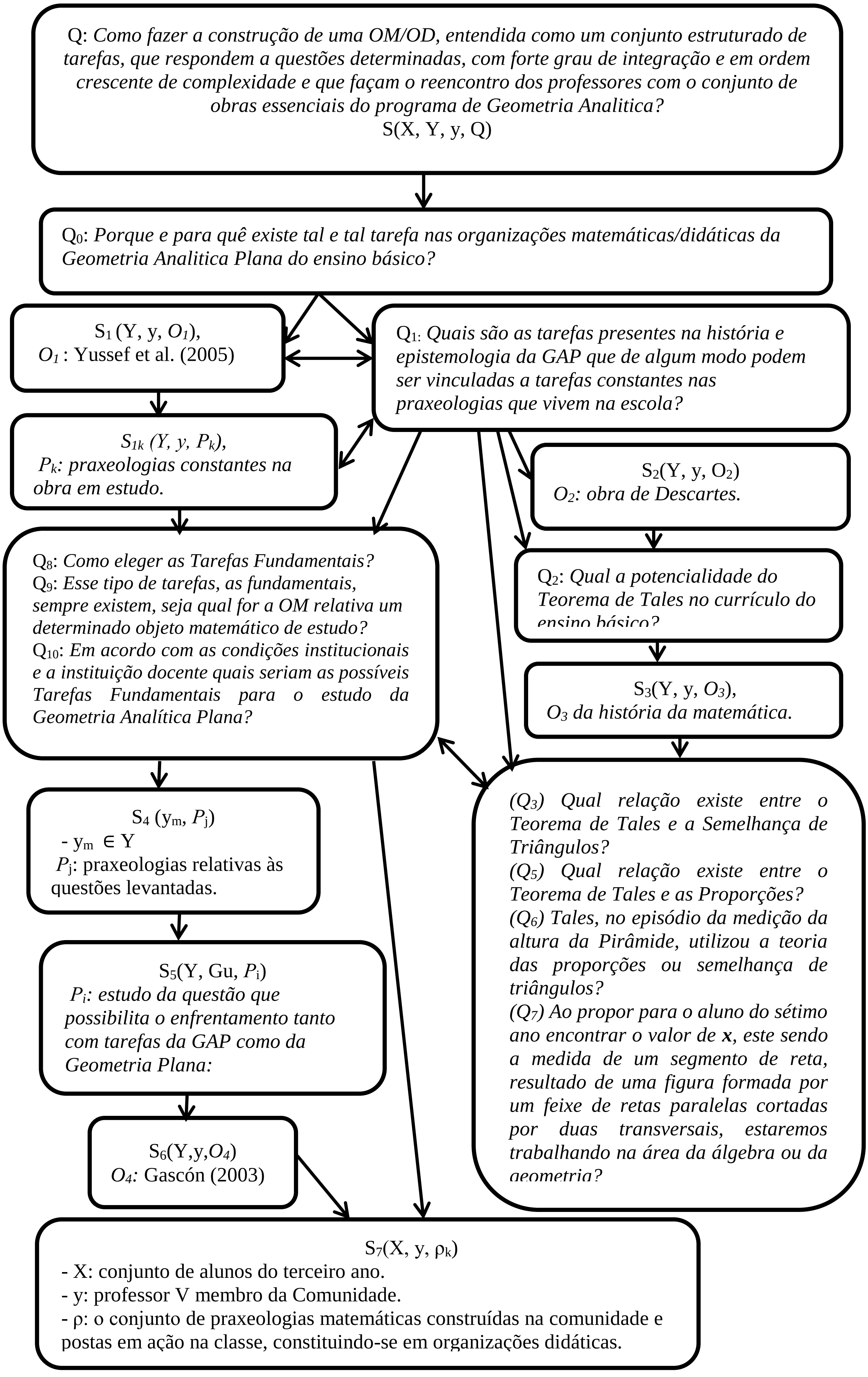
Assume que a OM deva ser construída em dialética com a OD, ou melhor, a Comunidade assume que a OM/OD terá que se desenvolver em um processo de investigação em que as tarefas sejam apresentadas aos alunos em forma de questionamentos que exijam dos alunos a mobilizações de seus EPs para enfrentá-los.

Isto implica em novas condições a serem consideradas pela comunidade, posto que o aluno nesse novo sistema não será mais hipotético, mas um aluno concreto que viverá as OMs frutos dessa Comunidade.

No entanto, a constituição desse meio exige um norte de questões fortes, que questione o saber culturalmente instituído pela escola, com sua subordinação aos níveis superiores de codeterminação didática, como problemático para o ensino, mas isso só e possível por meio de dispositivos que permitam interpretar e desenvolver praxeologias matemáticas e didáticas como o proposto pela TAD, por exemplo.

A partir dos recursos interpretativos e metodológicos da TAD, é possível vislumbrar caminhos, entre eles, o PEP aliado à noção de tarefa fundamental, que aqui se mostrou de modo enfático como o dispositivo didático constituidor de meios para responder questões problemáticas sobre uma organização matemática-didática e também como um percurso a ser vivido para a formação de professores como mostramos na figura 3, em que apresentamos a constituição do PEP com seus desdobramentos e mudança de meios.

Figura 3: Constituição do PEP vivenciado na Comunidade


Q: *Como fazer a construção de uma OM/OD, entendida como um conjunto estruturado de tarefas, que respondem a questões determinadas, com forte grau de integração e em ordem crescente de complexidade e que façam o reencontro dos professores com o conjunto de obras essenciais do programa de Geometria Analitica?*
S(X, Y, y, Q)
Q_0: *Porque e para quê existe tal e tal tarefa nas organizações matemáticas/didáticas da Geometria Analitica Plana do ensino básico?*
S_1 (Y, y, O_1),
O_1 : Yussef et al. (2005)
Q_1: *Quais são as tarefas presentes na história e epistemologia da GAP que de algum modo podem ser vinculadas a tarefas constantes nas praxeologias que vivem na escola?*
S_{1k} *(Y, y, P_k),*
P_k*: praxeologias constantes na obra em estudo.*
S_2(Y, y, O_2)
O_2*: obra de Descartes.*
Q_8: *Como eleger as Tarefas Fundamentais?*
Q_9: *Esse tipo de tarefas, as fundamentais, sempre existem, seja qual for a OM relativa um determinado objeto matemático de estudo?*
Q_{10}: *Em acordo com as condições institucionais e a instituição docente quais seriam as possíveis Tarefas Fundamentais para o estudo da Geometria Analítica Plana?*
Q_2: *Qual a potencialidade do Teorema de Tales no currículo do ensino básico?*
S_3(Y, y, O_3),
O_3 *da história da matemática.*
S_4 (y_m, P_j)
- $y_m \in$ Y
P_j: praxeologias relativas às questões levantadas.
(Q_3) Qual relação existe entre o Teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos?
(Q_5) Qual relação existe entre o Teorema de Tales e as Proporções?
(Q_6) Tales, no episódio da medição da altura da Pirâmide, utilizou a teoria das proporções ou semelhança de triângulos?
*(Q_7) Ao propor para o aluno do sétimo ano encontrar o valor de **x**, este sendo a medida de um segmento de reta, resultado de uma figura formada por um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais, estaremos trabalhando na área da álgebra ou da geometria?*
S_5(Y, Gu, P_i)
P_i*: estudo da questão que possibilita o enfrentamento tanto com tarefas da GAP como da Geometria Plana:*
S_6(Y,y,O_4)
O_4*:* Gascón (2003)
S_7(X, y, ρ_k)
- X: conjunto de alunos do terceiro ano.
- y: professor V membro da Comunidade.
- ρ: o conjunto de praxeologias matemáticas construídas na comunidade e postas em ação na classe, constituindo-se em organizações didáticas.

Em decorrência deste PEP a Comunidade expõe as seguintes respostas (quadro 1) que descrevem as respostas do percurso.

Quadro 1: O Percurso de Estudo e Pesquisas

Percurso de Estudos e Pesquisas	
Quanto a Formação	**Quanto à problemática**
Tarefas que os professores reconhecem como suas: - Construir OMs e ODs para atender sua intenção didática. - Reconhecem o problema praxeológico do professor; o quê, de, e como ensinar? - Reconhecem a importância da articulação com outras disciplinas, no caso Desenho. - Necessária reformulação tanto no conteúdo de ensino como na metodologia da disciplina Desenho Geométrico. - Construção da OD de referência para o ensino do Desenho Geométrico, tomando por base a articulação entre os setores da geometria em uma perspectiva do horizonte do conteúdo ao longo da educação básica. - Necessidade do resgate de conhecimentos anteriores para reconhecer o novo, seja qual for o aluno ou a escola, pode ser que uns mais outros menos, mas todos possuem conhecimentos anteriores que podem ser mobilizados na perspectiva do estudo de novos conhecimentos. - A Comunidade assume que resolver situações problemáticas é mobilizar um conjunto de tarefas que respondem a questões determinadas.	**No estudo das obras institucionalizadas:** - O fazer docente gira em torno do Tipo de Tarefa, obedecendo a uma estrutura rígida de tipos tarefas marcadamente isoladas, destituída de qualquer trabalho da técnica que possibilite a instituição de uma OMLRC. - A Comunidade outorga o selo de legitimidade à resposta por nos apresentadas, sendo os Tipos de Tarefas Fundamentais: Localizar pontos no plano; Calcular a distância entre dois pontos dados e Encontrar a equação do segmento de reta. - o Teorema de Tales transversaliza o ensino básico, ele pode ser colocado como tarefa/tema que articula outros temas, setores e áreas, e de acordo com sua função na OM/OD, pode assumir o papel de tarefa, de técnica ou de tecnologia/teoria.
Necessidade de estudo das tarefas a partir: - das OMs e ODs disponíveis nas instituições; - da historia e epistemologia da matemática; - do compartilhamento de práticas.	**Tarefas que a Comunidade acorda que atendem a noção de Tarefas Fundamentais na GAP:** - localização de pontos no plano; - determinar a distância entre dois pontos; - escrever a equação da reta; - determinar a medida de um segmento a partir e outros segmentos.

A noção de tarefa no PEP produz grande quantidade de respostas aos problemas concretos da profissão, ao tempo que se constitui como percurso de formação para revelar tarefas para a atividade docente. E ainda este acontecimento, nos parece ter estabelecido uma nova prática para o ensino da Geometria Analítica a partir de OMs/ODs, utilizando um dispositivo didático denominado de Tarefas Fundamentais, como detonador de um dispositivo metodológico o PEP em uma Comunidade de práticas.

A complexidade que permeia a eleição das Tarefas e, entre elas, as Fundamentais que estruturam a organização matemática, se impõe claramente não só por poder requerer o contexto matemático histórico e epistemológico como também pela presença de influências que condicionam as escolhas, entre elas, o currículo oficial, às ferramentas didáticas disponíveis, os livros textos adotados pela escola como obras institucionais de estudo e, sobretudo, pelas práticas docentes que vivem na instituição e, portanto delineiam as relações institucionais com os objetos matemáticos em jogo em uma instituição escolar.

Tais condições conformam, chegando inclusive a limitar, as reconstruções das OM e OD e em nosso caso, a partir das Tarefas Fundamentais, exigem mudanças de práticas docentes que somente são possíveis com construções de novas relações dos docentes com o saber em jogo, tendo em conta a dialética pessoal-institucional que exacerba os conflitos entre as relações do docente com o saber no fazer e pensar que os condicionam e limitam suas atividades de construir um novo condicionamento para si e para a instituição.

Nesse caminhar, as praxeologias se mostram como obras nunca prontas e acabadas, mas antes de tudo como construções de pessoas que vivem e ocupam posições no seio de uma instituição. Isto implica que a relação institucional, vista como a relação dessas pessoas, com um dado objeto matemático, se determinam na dinâmica dos interesses e intenções delas e que lhes dão forma e sentido.

As necessidades institucionais de novas práticas exigem que as pessoas desenvolvam novas relações pessoais com os objetos que somente pode acontecer no estudo de e para a construção de organizações matemáticas dos professores, que momentaneamente deixam de ser os difusores de praxeologias dominantes e assumem o papel institucional de criadores de novas praxeologias no processo de transposição didática.

Se for certo que não se pode prever o percurso de busca, é certo também que o percurso de busca de tarefas fundamentais permite traduzir um modelo epistemológico, que pode ser construído nessa busca, que venha dar resposta ao problema praxeológico da profissão docente como mostra a investigação.

É certo também que no percurso de busca os professores ganhem consciência de problemáticas da profissão e busquem dispositivos adequados, os sistemas didáticos, que os ajudem a construir respostas. Embora não sejam certos quais questionamentos, e quando, podem ocorrer no percurso.

É essa compreensão de nossa pesquisa, sob o suporte da TAD, sobre o percurso de formação docente em matemática a partir da noção de Tarefas Fundamentais. De outro modo, que a noção de tarefas fundamentais se constitui em dispositivo didático de deflagração e desenvolvimento de busca que constitui um PEP como dispositivo metodológico para formação continuada de professores.

No entanto, a noção de tarefas fundamentais ainda é embrionária. Começa num sentido matemático axiomático, como parece mostrar nossa investigação quando a Comunidade se mostra atendida pelo encontro com o Teorema de Tales. Ele fundamentaria as demais, num sentido dedutivo.

Esse entendimento se traduz pela pouca importância que se dá as praxeologias com vetores para a GAP que poderia levar a outras estruturas de tarefas, segundo esse modelo epistemológico, como Tarefas Fundamentais. Mas, persistiu a busca de relações e integrações com outros setores o que fez essas praxeologias mostrarem um aspecto desejado, de uma via de conexão entre setores, da GAP, Geometria Sintética e Trigonometria, pela lei dos cossenos.

As tarefas do Teorema de Tales, no entanto, não são explicitamente apresentadas na construção da OM/OD ou em algum outro momento do percurso. Quando presentes, não são destacados as características desses tipos de tarefas que devem ser explorados em tal e tal posição do currículo de modo a encaminhá-la como fundamental. O que fica para o observador são praxeologias matemáticas-didáticas justificadas pelo Teorema de Tales.

Não houve um encontro que permitisse revelar a possível e esperada imbricada relação entre a noção de tarefas fundamentais e um modelo epistemológico artificial para o ensino de um dado objeto, que exigisse a construção de novas tarefas, ou a reconstrução de anônimas tarefas, que atendam o modelo.

Parece persistir para a Comunidade, fortemente sujeita da instituição, que a construção de OM/OD se faz unicamente pela manipulação das tarefas que vivem na instituição ou que não é tarefa de professor construir tarefas para atender uma intenção didática, deixando invisível a seguinte questão: *Como (re)construir tarefas que atendam um dado modelo epistemológico de modo a atender as condições impostas pela instituição?*

Na Comunidade fica claro que é tarefa do professor de *Construir uma organização a partir de recortes de organizações matemáticas presentes nos livros textos do ensino* *básico*, mas não foram vislumbrados claramente os tipos de tarefas dos docentes como: *Reconstruir para o ensino um conjunto de tarefas matemáticas tendo em conta a interpretação, justificação, confiabilidade, economia e ao alcance das técnicas*; e de *Reconstruir para o ensino um conjunto de tarefas que no momento do trabalho da técnica com os alunos produza uma atividade matemática de complexidade crescente provocando a ampliação dos tipos de problemas que podem ser abordados, e suas relações com a noção de tarefas fundamentais*. Este último aspecto, das relações, nos interessa por encaminhar que a noção de tarefa ainda exige maiores estudos para um maior alcance de sua compreensão.

Referências

ANDRADE, Roberto Carlos Dantas. A noção de tarefa fundamental como dispositivo didático para um percurso de formação de professores: o caso da geometria, 2012. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2012.

ANDRADE, Roberto C. D. e GUERRA, Renato B. O Teorema de Tales como tema de articulação nas organizações matemáticas para o ensino. XIII Conferencia interamericana de educação matemática CIAEM-IACME, Recife, Brasil, 2011

BOSCH, M., C. FONSECA y J. GASCÓN, Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 24, núms. 2-3, p. 205-250, 2004.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. LAS PRÁCTICAS DOCENTES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS *XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques* que se celebró en Agosto de 2001.

______. La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. 2004. Disponível em:<http://www.ugr.es/ ~jgodino/*siidm/madrid*>. Acesso em: 12 out. 2010.

BRASIL, Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio. Brasília, 2002.

______. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília, 1998.

CHEVALLARD, Yves. Les problématiques de la recherche en didactique à la lumière de la TAD, janvier 2011. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr>. Acesso em: nov. 2014.

______. La notion d’ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. 15e École d’Été de Didactique des

Mathématiques Clermont-Ferrand, 16-23 août 2009a. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/>. Acesso: em: 8 out. 2010.

______. La TAD face au professeur de mathématiques, Toulouse, 29 abr. 2009b. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/>. Acesso: em: 8 out. 2010.

______. La notion de PER : problèmes et avancées. Toulouse, 2009c. Disponível em < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161>. Acessado em 8 de out. 2010.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Mariana; GASCÓN, Josep. Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

______. L`analyse des pratiques enseignantes en théorie anthopologique du didactique, Recherches en didactiques des mathématiques. Grenoble. La pensée Sauvage Éditions, v. 19.2, p. 221-265,1999.

EVES, Howard. Estudio de la geometría. México: Uteha, 1969. Tomo1

FONSECA, C. Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad. 2004. Tese (Doutorado em set/2004) – Universitat de Vigo, Espanha, 2004.

GASCÓN, J. Del Problem Solving a los Recorridos de Estudio e Investigación. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNIÓN), n. 22, p. 9-35, 2010.

______. Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? Suma, v. 39, p. 13-25, 2002.

GUERRA, Renato B. e ANDRADE, Roberto C. D. Tarefas fundamentais e o ensino de geometria analítica. Taller 21, In anais do VIII Reunión de didáctica de la matemática del cono sur. Asución, Parguay, 2009.

GUERRA, Renato B. e ANDRADE, Roberto C. D. Tarefas fundamentais no fazer matemático escolar: organização matemática para o ensino da geometria analítica. Revista Interdisciplinar da divisão de pesquisa de pós-graduação (Margens), v. 6, n.8 (abr). Abaetetuba /PA: UFPA. 2013.

SIERRA, T. A. Lo matemático en la creación y análisis de Organizaciones Didácticas. El caso de los sistemas de numeración. 2006. Tese (Doutorado em out/2006) - Universidad Complutense de Madrid, 2006.

Recebido em: 01/10/2014

Aceito em: 01/12/2014