Algumas potencialidades didáticas do “setor trigonal” na interface entre história e ensino de Matemática [1]

Some didactic potential of “trigonal sector” at the interface between history and mathematic teaching

---

MARISA DA SILVA DIAS[2]
FUMIKAZU SAITO[3]

Resumo

Neste artigo apresentam-se resultados preliminares do estudo de um instrumento denominado "setor trigonal", descrito por John Chatfeild em seu tratado intitulado The Trigonall Sector, publicado em 1650, contemplando algumas potencialidades didáticas, principalmente para o ensino de geometria. O instrumento permite aos estudantes explorar diferentes propriedades de triângulos a partir de seus ângulos. A hipótese que daí se levantou é que a operacionalidade com o instrumento associada com uma organização de ensino – com base na articulação entre o contexto dos conceitos matemáticos que aparecem no documento e o movimento do pensamento, aliado a formação desses conceitos – pode conduzir o estudante de modo profícuo ao processo de análise e síntese, necessário à formação conceitual.

Palavras-chave: *História da matemática. Instrumentos matemáticos. Ensino de geometria.*

Abstract

This paper presents preliminary findings of an instrument called "trigonal sector" which was described by John Chatfeild in his treatise entitled The Trigonall Sector, *published in 1650. It points out some didactic potentials of "trigonal sector" especially for the teaching of geometry. The instrument allows students to explore different properties of triangles considering their angles. This paper raises the hypothesis that the operation with the instrument associated with an educational organization – it based on the relationship between the context in which mathematical concepts show in the document and the movement of thought in the formation of these concepts – can lead the student in a fruitful way to the process of analysis and synthesis, that is essential for the concept formation.*

Keywords: *History of mathematics. Mathematical instruments. Teaching of geometry.*

---

[1] Apoio: CNPq - Projeto Universal - proc. no. 484784/2013-7.
[2] Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP) - marisadias@fc.unesp.br
[3] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP) - fsaito@pucsp.br

Introdução

Muitas são as propostas que buscam aproximar história da matemática do ensino e da aprendizagem de matemática. Dentre elas, o uso de documentos históricos parece ser muito promissor, visto que tais documentos se afiguram como potencial recurso para a elaboração de propostas didáticas que contemplem a formação do conceito matemático. Entretanto, a escolha e o posterior tratamento dado a esses documentos tornam-se essenciais quando buscamos promover um diálogo entre história, ensino e aprendizagem de matemática.

Como já discorremos anteriormente (SAITO; DIAS, 2013), a articulação entre História da Matemática e Educação Matemática não é tarefa simples, visto que é preciso considerar uma compreensão mais contextualizada dos objetos matemáticos em sua história e uma metodologia de abordagem que viabilize uma proposta didático-pedagógica. Desse modo, orientamos nossas investigações para a construção de interfaces entre história e ensino, levando-se em consideração o contexto em que os conceitos matemáticos foram desenvolvidos e o movimento do pensamento na formação desses conceitos a partir de documentos originais.

Dentre os inúmeros documentos que envolvem conhecimentos matemáticos, optamos por tratados que versam sobre a construção e o uso de "instrumentos matemáticos" (BENNETT, 1991, 1998, 2003). A escolha desse tipo de documento foi motivada por três razões básicas: 1) envolvem conhecimentos matemáticos; 2) mobilizam diferentes conceitos matemáticos; e 3) permitem a apreensão da produção do conhecimento, enquanto processo, que se encontra sintetizado no próprio instrumento de medida (SAITO, DIAS, 2013). Além disso, do ponto de vista histórico, esses tratados e os instrumentos a que se referem tiveram grande impacto na produção do conhecimento não só científico, mas também associada à prática matemática a partir do século XVI (SAITO, 2012). Esses tratados, que foram deixados à margem pela tradicional historiografia da história da matemática, têm revelado novas evidências, dando-nos uma compreensão mais contextualizada do processo da construção do conhecimento matemático.

Neste artigo apresentamos resultados preliminares do estudo e das discussões, promovidas pelo grupo HEEMa (História e Epistemologia na Educação Matemática), sobre o "setor trigonal", instrumento descrito por John Chatfeild em seu tratado intitulado *The Trigonall Sector*, publicado em 1650. Mais especificamente, procuramos aqui apontar para algumas potencialidades didáticas do instrumento na interface entre história e ensino de matemática. Tais potencialidades emergiram da análise contextualizada do documento e do tratamento didático inicial que envolveram diferentes ações. Consideramos aqui não só as contribuições do tratado para o ensino de geometria na Educação Básica, mas também outros aspectos da construção do conhecimento, tais como a indissociabilidade do saber-fazer[4] e a acessibilidade às expressões de linguagem.

Esse artigo encontra-se organizado em duas partes. Na primeira, apresentamos o tratado e o instrumento, bem como o contexto em que se inserem. Na segunda, o instrumento e algumas de suas potencialidades didáticas, considerando a relação entre tratado e instrumento, que também é parcialmente abordada na primeira parte. Embora o contexto em que os conceitos foram desenvolvidos e o movimento do pensamento na formação desses conceitos sejam articulados, buscamos, ao subdividi-los, evidenciar o enfoque de cada um desses aspectos da interface entre história e ensino de matemática.

1 Os setores em seu contexto

As potencialidades didáticas na reconstrução e uso de instrumentos antigos podem ser exploradas por meio de uma proposta de articulação entre história, ensino e aprendizagem de matemática que busque revelar não só os conhecimentos matemáticos incorporados nesses instrumentos, mas também a complexa rede de saberes que "esteve" e "está" presente no processo de sua construção e uso. O acesso a esses conhecimentos e saberes, entretanto, não é direto, uma vez que depende de um estudo que os contextualize historicamente[5].

Como já discorremos em outras ocasiões (SAITO, DIAS, 2011, 2013), muitos instrumentos matemáticos passaram a ser fabricados e aprimorados a partir do século XVI, revitalizando as antigas práticas matemáticas bem como dando maior visibilidade a um conjunto de conhecimentos que estava nas mãos de artesãos e "praticantes de matemáticas"[6]. A grande circulação desses novos instrumentos esteve relacionada a diferentes fatores de ordem teórica e operacional. Isso é notório, por exemplo, no

---

[4] A esse respeito, consulte: Saito (2013), Gessner (2010), Harkness (2207) e Hindle (1981).

[5] Considerações a esse respeito podem ser consultadas em: Saito (2014), Willmoth (2009) e Kusukawa e MacLean (2006).

[6] Em linhas gerais, os "praticantes de matemáticas", expressão cunhada por Taylor e recentemente revista por Higton, correspondem a um grupo de estudiosos (artesãos e eruditos) que se interessaram por questões mais práticas da matemática. Por exceder os objetivos desse artigo, não discorremos aqui sobre as diferentes práticas matemáticas, bem como sobre os praticantes de matemáticas no século XVI. A esse respeito, consulte Taylor (1954), McKiranhan (1978), Bennett (1991, 1998, 2003), Mancosu (1996), Hill (1998), Higton (2001) e Roux (2010).

crescente aumento da procura por instrução em geometria e aritmética mais prática, necessária no desenvolvimento de técnicas para a navegação, agrimensura, horografia, cartografia, artilharia e fortificação.

Como observa Saito (2013), os praticantes de matemática, em geral, tinham uma orientação mais empirista, no sentido de que as técnicas matemáticas por eles desenvolvidas eram aplicadas ao mundo real. Muitos deles se denominavam “professores” de matemática, no sentido daquele que professava a arte matemática. A maioria deles, entretanto, não possuía formação universitária e estava associada a uma corporação de ofício, ou trabalhava em uma oficina que fabricava instrumentos. Desse modo, era muito comum que esse “profissional” desenvolvesse seu próprio instrumento e comunicasse a respeito de sua construção e uso apenas àqueles que procurassem a sua instrução. É nesse contexto que devemos inserir o setor trigonal.

Esse instrumento, que foi descrito num tratado intitulado *The Trigonall Sector*, publicado em 1650 por John Chatfeild (fl. 1638), permite estabelecer diferentes relações encontradas entre os lados, os ângulos e as alturas de triângulos retângulos (CHATFIELD, 1650). No tratado são descritas quatorze operações que incluem o cálculo de tangente, de secante, de seno, de medidas de áreas de triângulos, divisão de números, raiz quadrada e raiz cúbica etc. Destinado a um público que não só era versado em matemáticas, mas também envolvido com a fabricação e o uso de diferentes instrumentos matemáticos, *The Trigonall Sector* era, provavelmente, um tratado dedicado àqueles que buscavam instrução para aprender a usar os setores.

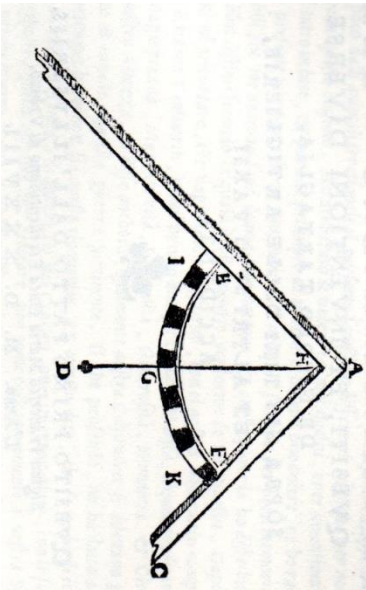
Utilizados para realizar diversas operações aritméticas, principalmente multiplicação e divisão, e também trigonométricas, os setores eram instrumentos muito úteis e populares até o século XVIII, quando então foram gradativamente substituídos pelas réguas de cálculo (HOPP, 1999). Esses instrumentos surgiram entre finais do século XVI e meados de XVII, época em que a navegação, a artilharia, a agrimensura e a crescente exigência dos estudiosos de filosofia natural demandava por métodos mais eficientes para realizar cálculos bastante laboriosos.

Embora não se tenha notícias da origem dos setores, sabe-se que foram inventados por diferentes fabricantes de instrumentos e praticantes de matemáticas no século XVII. Estudiosos ingleses atribuem a invenção do setor a Thomas Hood (fl.1577-1598), médico e "fellow" do Trinity College, Cambridge (TAYLOR, 1954, p. 179). Hood publicou, em 1598, um tratado intitulado *The Making and use of the Geometricall Instrument called a* *sector*, em que descreveu o instrumento e os seus diferentes usos, organizados em diversos "exercícios" (HOOD, 1598).

No continente europeu, a invenção do instrumento é atribuída aos italianos. De fato, o setor mais conhecido e famoso, certamente, é o *compasso geometrico e militare* de Galileu Galilei (1564-1642). Esse instrumento, que não era um invento original, mas um aperfeiçoamento de antigos compassos, foi destinado a facilitar operações em problemas práticos de engenharia e de arquitetura militar (DRAKE, 1995, p. 120-121).

É difícil reconstruir as circunstâncias pelas quais Galileu e Hood desenvolveram seus instrumentos. Os setores têm por base técnicas e dispositivos antigos que já eram bastante conhecidos e disseminados entre artesãos e alguns filósofos naturais e matemáticos (CAMEROTA, 2000). Segundo Drake (1995, 1977), Galileu teria adicionado ao quadrante da *squadra*, instrumento utilizado por artilheiros, outras escalas, dividindo-o em vários graus de modo a ser útil em observações astronômicas. Além disso, ele teria anexado uma dobradiça ao vértice e incluído ainda outras escalas nas duas lâminas da *squadra*, tal como fizera Guidobaldo del Monte (1545-1607) em outro instrumento por ele inventado. Assim, com essas mudanças e a introdução de novas escalas, Galileu teria transformado o antigo instrumento num "instrumento de calcular" ao qual ele denominara *compasso geometrico e militare*.

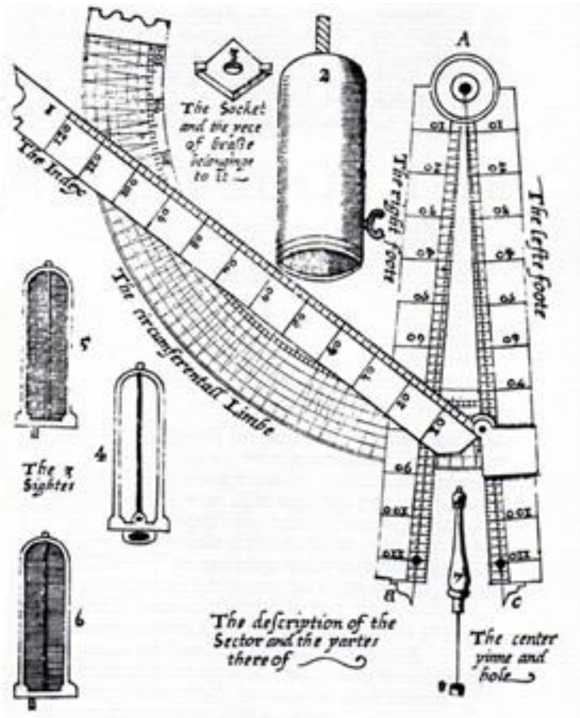
Figura 1 – A *squadra* utilizada por artilheiros



Fonte: Tartaglia (1544, p. 5).

No que diz respeito ao setor de Hood, este parece ter sido inspirado pelo instrumento em forma de um compasso plano e achatado encontrado na obra de Petrus Ramus (1515-1572), intitulado *Arithmeticae libri duo*, publicado em 1569. Nessa obra, Ramus descreve um compasso com as pernas achatadas nas quais se encontram inscritas escalas de medida (RAMUS, 1569, Libro I, p. 2). Além disso, o setor parece ter sido um instrumento bem conhecido dos praticantes de matemáticas ingleses. Estudos em história da ciência têm revelado que tanto Hood, quanto Edmund Gunter (1581-1616), conhecido professor de astronomia de Gresham College entre 1619 e 1626, tinham conhecimento dele naquela época. Segundo Taylor (1954, p. 196), Gunter já havia publicado um tratado em latim descrevendo o setor e seu uso por volta de 1607. Esse tratado teria circulado pouco naquela época, diferentemente da versão em vernáculo, intitulada *Description and vse of the Sector*, publicada em 1623, que ganhou ampla repercussão.

Figura 2 – Setor de Hood



Fonte: Hood (1598)

Galileu e Hood utilizaram de forma intercambiável o termo "compasso" e "setor". Isso porque esses dois instrumentos se assemelhavam em vários aspectos e eram descritos em diferentes tratados dedicados à astronomia, à navegação, à arquitetura, ao desenho e à agrimensura. O que aproxima esses dois instrumentos, entretanto, não é apenas a sua forma, mas também o propósito para o qual foram desenvolvidos. Esses dois instrumentos foram desenvolvidos para medir pequenas grandezas. Assim, em meados do século XVI, compassos de proporção (*proportional compass*) foram inicialmente utilizados para aprimorar as escalas dos astrolábios e outros instrumentos úteis à observação astronômica, permitindo medir com mais precisão a mínima fração de grau. Assim, aos poucos, os compassos foram recebendo novos atributos, principalmente novas escalas, que permitissem realizar diferentes operações aritméticas, tais como a multiplicação e a divisão.

Podemos dizer que a principal diferença entre o setor e o compasso de proporção (*proprotional compass*) está no maior número de escalas que o setor permite que nele se inscreva. Os dois instrumentos têm por base o princípio da semelhança de triângulos, porém as diferentes escalas geométricas emparelhadas nas duas pernas do setor fazem dele um instrumento muito mais versátil.

Contudo, o setor também sofreu modificações ao longo ao século XVII, recebendo diferentes escalas e outros atributos. Surgiram variadas versões do instrumento que adotaram recursos adicionais com vistas a desenvolver um instrumento universal que permitisse medir e realizar todos os tipos de cálculo. O instrumento dessa maneira se tornou cada vez mais complexo e sofisticado de modo que o seu manuseio passou a requer conhecimentos técnicos e matemáticos mais sólidos para poder operá-lo. Assim, é nesse contexto em que o uso de setores se disseminava entre os diferentes segmentos da sociedade, requisitando cada vez mais recursos da arte de medir e de calcular, que o setor trigonal de Chatfeild deve ser compreendido.

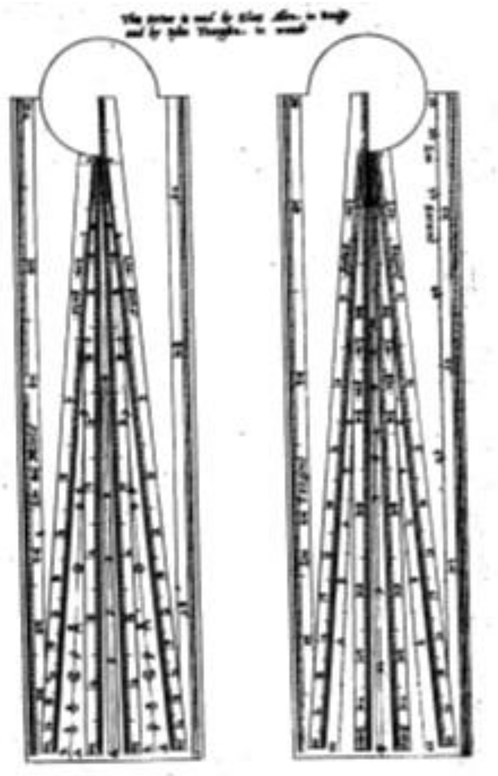
1.1 O setor trigonal de Chatfeild

Há fortes razões para supor que este instrumento foi utilizado para iniciar os estudantes nas matemáticas, principalmente ao estudo das propriedades dos triângulos, e instruir navegadores, agrimensores, e outros interessados em matemáticas no uso de setores. Um primeiro indício a esse respeito encontra-se na introdução à obra. Em *Ao leitor*, Chatfeild observa que a obra é útil para aprendizes e para mestres na arte de medir e calcular:

> Tu tens aqui apresentado, para tua apreciação, a descrição e o uso de um Instrumento Geométrico por meio do qual (se tu és ainda um aprendiz) podes compreender, corretamente, a doutrina dos triângulos com maior facilidade: mas se tu já avançaste nas maiores dificuldades, e és um Mestre nessa arte, sem dúvidas, mesmo assim, tu encontrarás algo aqui que te interessará e que, talvez, possa ajudar-te a realizar aquelas coisas com maior rapidez e facilidade do que costumavas a fazê-las [...]. (CHATFEILD, 1650, tradução nossa).

Um segundo indício é a inexistência (pelo menos até o momento) do instrumento em museus. Muitos setores sobreviveram e estão depositados em museus ou fazem parte de coleções particulares. Isso parece indicar que esse instrumento, se foi construído e efetivamente utilizado, não sobreviveu porque não era comum utilizá-lo. Isso não significa, entretanto, que ele não tenha sido fabricado. Provavelmente, foi construído e utilizado por aqueles que buscaram instrução na obra de Chatfeild para aprender a manusear setores, tal como o de Gunter (figura 3), por exemplo.

Figura 3 – Setor de Gunter



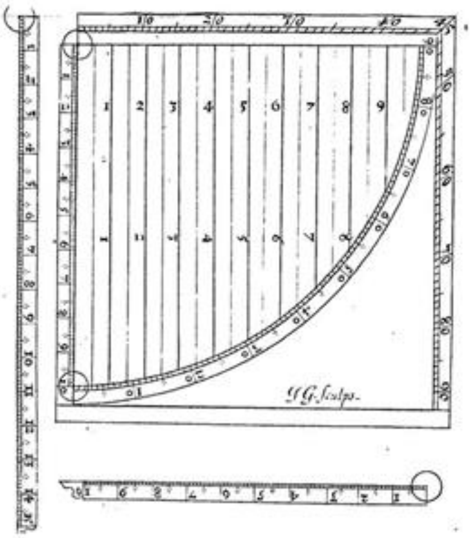
Fonte: Gunter (1623).

Um terceiro indício encontra-se no próprio instrumento descrito por Chatfeild. Diferentemente de outros setores comuns naquela época, que continham variadas linhas e escalas (lineares, trigonométrica, de planos, de volumes, de polígonos etc.), o setor trigonal parece ser um instrumento mais simples, visto que traz inscrito apenas dois tipos de escalas: linear e angular. Com essas duas escalas, o setor trigonal sintetiza as principais operações que poderiam ser realizadas com diferentes setores, possibilitando realizar cálculos razoavelmente precisos com bastante facilidade (figura 4).

O setor trigonal foi descrito por Chatfeild da seguinte maneira:

> Ele consiste de uma placa quadrada de metal, ou de madeira, em cujos lados são fixadas lâminas, ou longos filetes, que se projetam um pouco além da placa nas beiradas dos lados. Além disso, contém dois marcadores que são fixados em duas extremidades de um dos lados da placa. Estes marcadores movem-se em torno de seus respectivos centros (ou extremidades) e podem ser aplicados um sobre o outro de modo a cruzarem-se e a formarem um ângulo entre si. Este ângulo deverá completar 180gr. juntamente com os outros dois ângulos formados pelos dois marcadores e o Raio, isto é, o lado do quadrado que contém os dois centros em que são fixados os marcadores (...) (CHATFEILD, 1650, p. 1-2, tradução nossa).

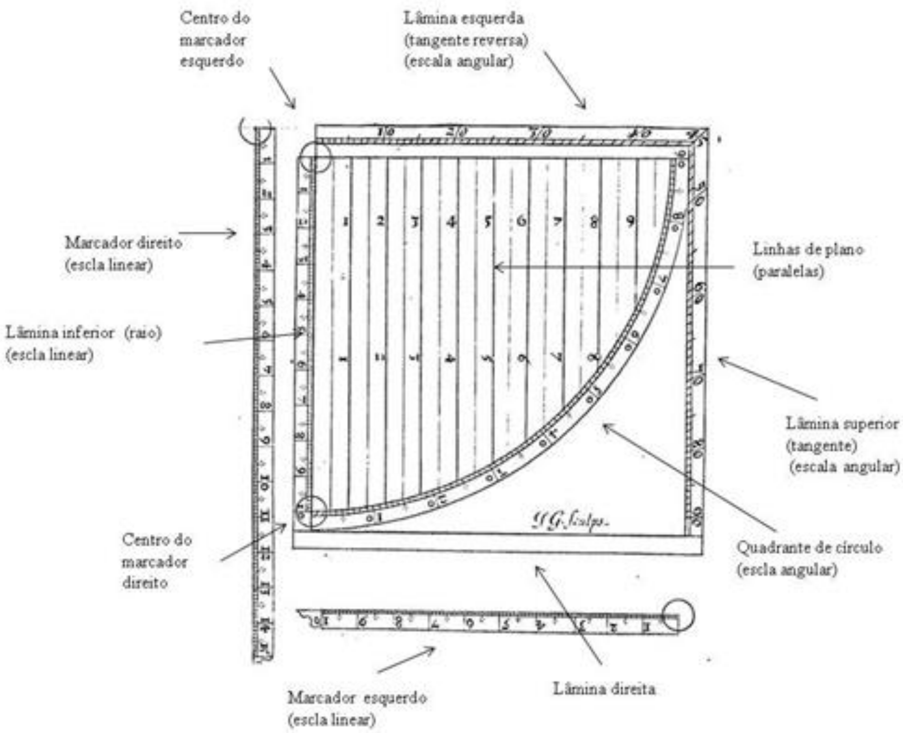
Figura 4 – O setor trigonal de Chatfeild



Fonte: Chatfeild (1650, frontispício).

Convém observar que, nesse instrumento (figura 5), as escalas angulares e lineares são dispostas de tal maneira a permitir o cálculo de relações trigonométricas, tais como seno, tangente, secante e comprimentos de cordas para diferentes ângulos. Além disso, vem equipado com "linhas de plano" que auxiliam no cálculo da medida de áreas de diferentes triângulos. A mobilização conveniente dos dois marcadores móveis permite ainda realizar operações de multiplicação e divisão, bem como a extração de raízes quadrada e cúbica.

Figura 5 – As partes do setor trigonal



Fonte: figura de Chatfeild (1650) modificada pelos autores.

Após descrever o setor trigonal apontando para suas partes, Chatfeild fornece quatorze instruções para manusear o instrumento. Como já mencionamos, o princípio do funcionamento desse instrumento são os triângulos, razão pela qual o setor recebe seu nome, isto é, "trigonal" no sentido de que os dois marcadores móveis podem ser ajustados para formar três ângulos.

1. Em "Para encontrar qualquer quantidade de ângulo" (CHATFEILD, 1650, p. 6-7), o autor fornece instruções para encontrar a medida de qualquer ângulo quando os dois marcadores móveis são mobilizados. As escalas angulares no setor permitem que a medida seja obtida diretamente.
2. Em "Representar qualquer triângulo retângulo sendo dois de seus ângulos conhecidos" (CHATFEILD, 1650, p. 7-8), mais do que instruções para manusear o instrumento, o autor fornece os critérios de classificação de triângulos, segundo seus lados e seus ângulos, além de fornecer a regra bastante conhecida de que a soma das medidas internas de qualquer triângulo é sempre dois retos.
3. Em "Representar qualquer triângulo retângulo" (CHATFEILD, 1650, p. 8-11), notamos que a principal intenção do autor é dar instruções para encontrar a tangente e a secante de qualquer ângulo. Para tanto, fornece instruções, movendo apenas um dos marcadores móveis (o marcador direito). Nesse tópico, o tratado indica a mobilização das duas escalas, a angular e a linear, para encontrar a tangente e a secante do ângulo formado pelo marcador e o Raio do setor. Esse procedimento desdobra-se nos dois seguintes.
4. Em "Representar qualquer triângulo obtusângulo" (CHATFEILD, 1650, p. 11-12) há instruções para a construção de triângulos obtusângulos mobilizando dois marcadores móveis no plano do setor.
5. Em "Representar qualquer triângulo acutângulo" (CHATFEILD, 1650, p. 12), do mesmo modo que o procedimento anterior, as instruções são para construção de triângulos acutângulos. Esses dois procedimentos parecem ter por objetivo mostrar como é possível construir todos os tipos de triângulos no setor, bem como esclarecer o leitor de que há sempre uma relação entre o ângulo do triângulo e seus lados.

Podemos dizer que essas primeiras instruções apresentam as propriedades elementares dos triângulos. Além disso, prepara o leitor para as etapas que vem a seguir.

6. Em "Encontrar o conteúdo de cada um desses triângulos" (CHATFEILD, 1650, p. 12-15), Chatfeild discorre sobre como utilizar o instrumento para calcular a medida de área de qualquer triângulo. Nesse caso, o autor destaca que a medida da área de um triângulo depende basicamente das medidas da sua base e da sua altura. Os triângulos construídos por Chatfeild no plano do setor têm por base o raio e os ângulos da base, de modo que os outros dois lados do triângulo são dados pelos dois marcadores móveis. A medida da altura é fornecida por meio das linhas paralelas inscritas no setor e, por um simples cálculo, seguindo a regra de que a medida da área é resultado de uma operação de multiplicação entre a medida da altura e a metade da medida da base, o autor chega ao resultado procurado.
7. Em "Reduzir a área de um triângulo encontrado por sua perpendicular e base de uma denominação para outra" (CHATFEILD, 1650, p. 16-19), o autor dá instruções sobre a conversão de uma unidade de medida, não só de área, mas também de altura e da base, em outra. Como era muito comum naquela época, *altimetria* e *planimetria* eram ontologicamente distintas. Embora hoje reconheçamos que medir largura, comprimento e altura de um objeto signifique medir a "mesma coisa", visto que se trata basicamente de medidas lineares, naquela época, altura, largura e profundidade eram entendidas como "coisas distintas", embora pudessem ser medidas por se tratarem de comprimentos. Desse modo, era muito comum utilizar unidades distintas para medir a largura e a altura de objetos. Assim, para se calcular a medida de área de um triângulo era necessário converter uma unidade de medida para a outra, visto que a base e a altura (perpendicular) eram expressas em unidades de medida distintas.

Essas duas etapas encerram uma primeira etapa no uso do setor. Além de expor os seus principais atributos, prepara o leitor para outros procedimentos que permitem realizar cálculos trigonométricos, mas também outras operações baseadas na proporcionalidade dos lados do triângulo.

8. Em "Encontrar o comprimento da linha tangente de qualquer grau com um Raio de 10000" (CHATFEILD, 1650, p. 19-21), o autor orienta o leitor a encontrar a tangente para qualquer medida de ângulo, considerando agora os múltiplos de 10. Desse modo, a escala linear dos dois marcadores e o Raio (a

base dos triângulos) são tomados em seus múltiplos, tais como 100, 1000, 10000 etc.

9. Em "Encontrar o comprimento de uma secante de qualquer grau" (CHATFEILD, 1650, p. 21-23), do mesmo modo que no procedimento anterior, Chatfeild instrui como encontrar a secante para triângulos cuja base seja múltiplo de 10. Notamos que esses dois últimos procedimentos orientam o leitor a utilizar os marcadores com as escalas, que representam os lados dos triângulos proporcionalmente, denotando que o aumento da medida da base de um triângulo corresponde proporcionalmente ao aumento da medida dos outros dois lados.
10. Assim, em "Encontrar o comprimento de uma linha de senos para qualquer grau" (CHATFEILD, 1650, p. 23-24), Chatfeild sintetiza as duas aplicações anteriores para o seno.
11. Em "Encontrar o comprimento de uma linha de cordas para qualquer grau" (CHATFEILD, 1650, p. 24-25), o autor fornece instruções para encontrar a medida da corda para qualquer medida de grau, mobilizando um dos marcadores móveis.
12. Em "Encontrar uma linha ou um número em proporção contínua dado dois números" (CHATFEILD, 1650, p. 25), Chatfeild mostra, por meio da escala de um dos marcadores móveis e as paralelas no setor, como os números podem ser colocados um em relação aos outros proporcionalmente. O objetivo dessa parte é preparar o leitor para a realização de cálculos mais laboriosos, como apresentados nos últimos dois procedimentos do tratado: 13) "Dado o quadrado e sua raiz encontrar o seu cubo" (CHATFEILD, 1650, p. 26), e 14) "Dado o cubo e seu quadrado do qual foi tirado, encontrar a raiz de ambos" (CHATFEILD, 1650, p. 26-27), em que Chatfeild utiliza a "regra de ouro" (atualmente conhecida por regra de três) para realizar seus cálculos. Embora fossem bem elementares, esses cálculos eram bastante úteis naquela época.

As operações básicas que o setor trigonal apresenta possibilitam não só realizar cálculos, mas também instruir sobre as propriedades dos triângulos. Uma vez que incorpora conhecimentos matemáticos, esse instrumento, tanto em sua forma de quadrante, como em suas escalas (em partes móveis e fixas), permite explorar diferentes atributos e propriedades não só geométricas, como também trigonométricas.

2 Algumas potencialidades didáticas do setor trigonal

Como mencionamos anteriormente, há fortes razões para supor que *Trigonall sector* foi escrito com o propósito de instruir praticantes de matemáticas e outros interessados em matemáticas no uso de setores. Entretanto, esse documento não pode ser entendido (ou utilizado) como material didático no sentido que hoje compreendemos, visto que o contexto matemático em que fora elaborado é muito diferente do nosso. Tampouco, o instrumento descrito no tratado pode ser entendido como recurso didático estrito, visto que a sua construção e uso visava atender a uma demanda que não buscava por instrução em matemática, mas no uso de outros setores daquela época.

Contudo, na perspectiva lógico-histórica (DIAS, 2007; SOUSA, 2004), o instrumento e o tratado podem fornecer elementos com os quais é possível compor um conjunto de ações voltado para o ensino de matemática. As potencialidades didáticas, dessa maneira, devem emergir do movimento do pensamento no processo de apropriação do conhecimento incorporado não só no instrumento, mas também no tratado. De fato, no tratado *Trigonall sector* encontramos elementos que evidenciam seu propósito instrutivo não só relacionados à fabricação e ao uso do instrumento (o setor trigonal), mas também a diversas propriedades geométricas e trigonométricas ligadas a triângulos.

Se atentarmos para o frontispício do tratado, notaremos que o seu propósito não é distante daquele que temos atualmente em algumas propostas de ensino, visto que, embora o *Trigonall sector* traga a descrição da construção e do uso do setor trigonal de forma rigorosa e detalhada, tem por propósito apresentar ao leitor uma forma que seja "*fácil e prazerosa*" para resolver problemas que envolvam triângulos "*com maior facilidade e deleite (...) com muitas outras conclusões deleitosas*" (CHATFEILD, 1650, frontispício). Ademais, o tratado ressalta que ele é indicado tanto ao aprendiz como ao mestre nesta arte. No caso do aprendiz, o instrumento pode iniciá-lo nos estudos sobre as propriedades dos triângulos e, no que diz respeito ao mestre, pode introduzi-lo a outras formas de resolução de problemas envolvendo triângulos com "*maior rapidez e facilidade*" (CHAFIELD, 1650, Ao leitor).

Essas observações refletem-se no modo de apresentação do tratado, cuja análise preliminar revelou-nos algumas potencialidades didáticas que, devidamente exploradas, podem ser desenvolvidas para trabalhar conteúdos matemáticos referentes mesmo ao terceiro ciclo do ensino fundamental. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), é nesse ciclo que as medidas de ângulos em polígonos, a congruência e a semelhança de figuras, o uso de instrumentos de desenho geométrico, a associação de figuras geométricas com o campo numérico por meio da proporcionalidade e a verificação da soma da medida dos ângulos internos de triângulo como sendo 180º são explorados.

2.1 A construção de significados

O *Trigonall sector* apresenta relações geométricas e trigonométricas que podem ser verificadas em triângulos, integrando os conceitos de ângulo, triângulo, tangente, secante, seno, circunferência, arco e corda de circunferência, proporcionalidade, área de triângulo, perpendicular, paralelismo, cubo e quadrado de um número (natural) e raízes quadradas e cúbicas de um número (natural). Neste texto nos limitamos a expor potencialidades didáticas relativas a algumas relações geométricas e trigonométricas, com enfoque nos três primeiros usos relativos à resolução de triângulos abordados no documento.

O tratado, inicialmente, alerta o leitor para os quatro pontos que devem ser considerados na resolução de qualquer problema relativo a triângulos:

> 1 A quantidade dos ângulos. 2 As proporções entre seus lados ou dos lados subtendidos e perpendiculares entre si. 3 Os conteúdos da área em partes correspondentes às partes dos lados. 4 A redução da área de um triângulo, encontrado por sua perpendicular e base, de uma denominação para outra (CHATFEILD, 1650, p. 6, tradução nossa).

Por "quantidade dos ângulos", terminologia que não é usual na escola nos dias de hoje, o autor refere-se à medida do ângulo. No século XVI e XVII não era ainda usual utilizar o termo "medida de ângulo", visto que ainda não era clara a relaçao entre entre número e grandeza. A atribuição de um número a uma grandeza era feito por agrimensores e outros praticantes de matemáticas no século XVI, porém sem apresentar nenhum fundamento matemático (SAITO, 2014). Mas a indicação de que o ângulo é uma "quantidade" é bastante sugestiva ao professor, pois traz consigo a ideia de que o número encontrado na escala do instrumento não é meramente um algarismo grafado, mas que corresponde a um valor, cuja variação está relacionada a diferentes outras propriedades encontradas nos triângulos. Essas propriedades são exploradas no tratado, no que diz respeito as "representações de triângulos", correspondentes às etapas 3, 4 e 5, tal como mencionamos anteriormente. Essas representações permitem ao leitor visualizar as diferentes relações existentes entre os lados e os ângulos dos triângulos de modo que possa reduzir as "conclusões geométricas" a proporções "aritméticas" ou à "regra de ouro".

Por "conteúdos de área", o tratado refere-se ao cálculo da medida da área de diferentes triângulos que podem ser construídos no instrumento. Como não é foco principal deste trabalho, não discorreremos em profundidade a esse respeito, mas queremos apenas indicar que os primeiros tópicos abordados pelo tratado convergem neste sexto, ou seja, são etapas para chegar nele. Isso é compreensível se considerarmos que os setores mobilizam as diferentes relações geométricas e trigonométricas dos triângulos, úteis para realização dos cálculos. As perpendiculares, isto é, a altura dos triângulos (representadas pelas linhas paralelas no instumento) são marcações auxiliares que permitiam seus usuários a realizar cálculos mais laboriosos.

Uma característica interessante relacionada ao tratamento dos triângulos em *Trigonall sector* repousa no fato de ele definir os triângulos conforme seus ângulos e seus lados:

> Todos os tipos de triângulos são distinguidos de duas formas.
> Em primeiro lugar, por seus lados e, desse modo, são chamados. 1 Equilátero, que tem todos os lados iguais. 2 Isósceles, que tem somente dois lados iguais e o terceiro [lado] diferente. 3 escaleno, isto é, triângulos cujos lados não são iguais.
> Em segundo lugar, por seus ângulos, e eles são: 1 Retângulo, [aquele] que contém um ângulo reto. 2 Obtusângulo, [aquele] em que um dos ângulos é obtuso ou maior que um ângulo reto, que é superior a 90 *gr*. 3 Acutângulo, [aquele] em que todos os ângulos são inferiores a 90 *gr*. Note-se que [a soma dos] três ângulos de cada triângulo são iguais a dois ângulos retos, que é 180 *gr* (CHATFEILD, 1650, p. 7-8, tradução nossa).

Diferentemente da tradição euclidiana que, em *Elementos*, define os triângulos segundo seus lados (EUCLIDES, 2009, p. 98), o tratado refere-se também a triângulos acutângulos, obstusângulos e retângulos. Isso é compreensível se considerarmos que naquela época estavam presentes três diferentes tradições de geometria, a saber: 1) a *practica geometriae* que remonta à tradição da geometria prática medieval; 2) a geometria grega de Euclides que fora recentemente compilada (a partir do século XIV); e 3) a geometria dos "cadernos de desenho" que traziam esboços de genuínas costruções geométricas, tais como aquelas encontradas nos desenhos de Villard de Honnecourt (SAITO, 2014). Provavelmente, a classificação de triângulos segundo seus ângulos tenha relação com a primeira e a terceira tradições, isto é, àquelas que estavam ligadas a aspectos mais práticos da geometria. Isso porque, como sabemos, os setores eram instrumentos utilizados por praticantes de matemáticas, ou seja, por navegadores, agrimensores, arquitetos e toda sorte de artesãos e estudiosos de matemáticas envolvidos com questões mais práticas.

Cabe também observar a terminologia, não essencialmente matemática, encontrada no tratado. Antes de a matemática tornar-se uma área de conhecimento unificada e autônoma, a linguagem matemática tinha ainda um apelo mais empírico. Desse modo, encontramos no tratado expressões, termos e notações que não são usuais em livros didáticos atuais, tais como como "quantidade de ângulos" (medida de ângulos), "conteúdo de triângulos" (área de triângulos), "igual" (congruente), e notações como *gr.* ("º", isto é, grau). Essas informações esclarecem o professor sobre o movimento do conhecimento matemático em seu processo histórico, conduzindo-o a refletir sobre o significado não só dos conceitos, mas também da linguagem na própria construção e expressão do conhecimento matemático. Essas questões terminológicas podem dar oportunidade ao professor de discutir, e mesmo considerar como esclarecimentos necessários, o movimento da constituição da própria a linguagem matemática.

Porém, retomemos a atenção para a abordagem didática proporcionada pelo tratado ao uso dos ângulos para encontrar diferentes relações geométricas e trigonométricas. Diferentemente do ensino atual que busca “ângulos” no cotidiano visual dos estudantes, como cantos de paredes, quinas de certos objetos, no movimento de abertura de porta, ou mesmo exploração em desenhos, o tratado associa a necessidade de se medir ângulos e construir triângulos aos procedimentos de calcular medidas de distância, altura e profundidade. Para tanto, o tratado fornece diferentes instruções para o uso do instrumento das quais apresentamos três: "Representar qualquer triângulo retângulo" (CHATFEILD, 1650, p. 8-11), "Representar qualquer triângulo obtusângulo" (CHATFEILD, 1650, p. 11-12) e "Representar qualquer triângulo acutângulo" (CHATFEILD, 1650, p. 12).

2.2 Representar qualquer triângulo retângulo

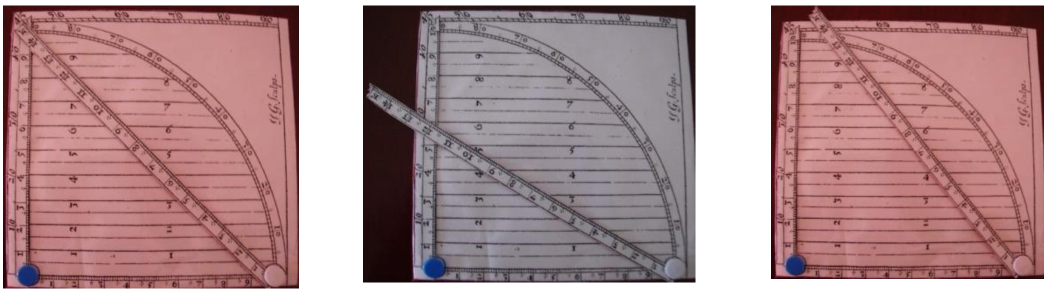
Neste tópico, a principal intenção do tratado é dar instruções para se encontrar a tangente e a secante de qualquer ângulo. As medidas da secante e da tangente são dadas diretamente pelas escalas impressas no instrumento, ao considerar o raio unitário, dividido em 10 ou 100 partes. Assim, além de propiciar a representação de diferentes triângulos retângulos (escaleno e isósceles), esse tópico busca familiarizar o leitor com as primeiras relações entre ângulos e lados do triângulo.

Contudo, do ponto de vista didático, outros aspectos podem ser explorados com a representação de triângulos retângulos nesse contexto, visto que abordar a secante no triângulo retângulo não é usual nos livros didáticos atuais. De fato, os conteúdos relativos à trigonometria do triângulo retângulo partem inicialmente das relações trigonométricas seno, cosseno e tangente, para então definir seus inversos, algebricamente.

Esse tópico do *Trigonall sector* aponta para a possibilidade de abordarmos a secante juntamente com a tangente sem introduzirmos nenhum recurso algébrico:

> Gire o marcador esquerdo em direção da lâmina da Tangente, pois, desse modo, ele faz um ângulo reto com o Raio. Em seguida, gire o marcador direito em direção ao grau do outro ângulo conhecido na linha Tangente e, assim, os dois marcadores e o raio resultarão num Triângulo, com as proporções dos lados entre si.
> Suponhamos que os dois ângulos conhecidos sejam 90 e 45, a distância entre os centros (1), o Raio, terá 100 partes, [e] o marcador direito deverá cortar o marcador esquerdo, também, em 141 partes.
> Um desses lados é o Raio, o segundo uma Tangente de 45, que é sempre igual ao Raio, o terceiro, a Secante de 45, que é uma linha traçada a partir do centro através da borda do círculo até encontrar a tangente. Se um dos ângulos conhecidos estiver acima de 45, e [se] o outro [for] 90 *gr*, então coloque o marcador na tangente de seu complemento para 90 e, em seguida, deverão as partes sobre o marcador esquerdo representar o Raio, e o Raio do Instrumento representará a tangente, e o marcador direito representará a secante. (CHATFEILD, 1650, p. 8-9, tradução nossa).

Figura 6 – Ilustração de uso do instrumento setor trigonal, com um ângulo de 90º



Fonte: fotografia tirada pelos autores.

No instrumento, a tangente e a secante são dadas a partir do encontro dos dois marcadores móveis. O marcador esquerdo é sobreposto à lâmina da tangente reversa, como é chamado um dos lados do setor (vide figura 5). O marcador direito forma diferentes ângulos com o Raio (como o autor se refere ao outro lado do setor) do instrumento. A medida desse ângulo é dada pela escala angular constante na lâmina do lado esquerdo (linha tangente).

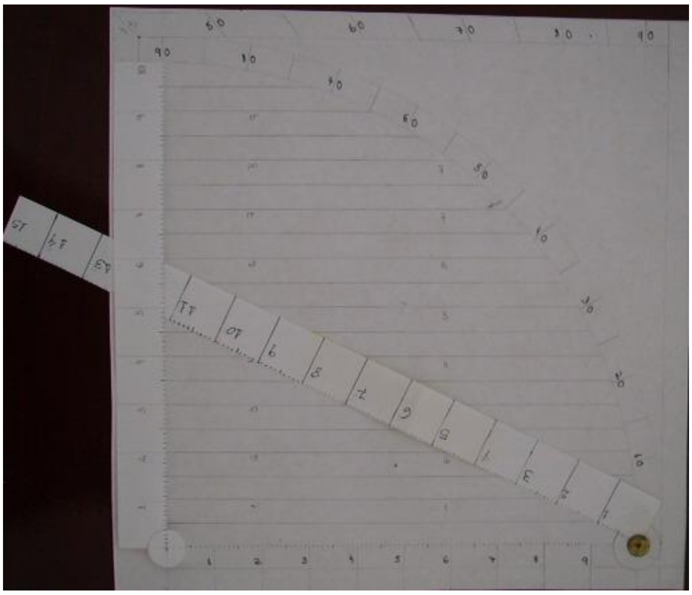
A manipulação do instrumento para formar triângulos retângulos como descritos pelo autor no tratado (conforme última citação), requer um procedimento complementar quando comparado aos passos fornecidos. Deve-se afastar a lamina esquerda, sobreposta ao lado esquerdo do setor (figura 6), para alinhamento do marcador direito na escala angular. A retomada do marcador esquerdo sobrepondo à escala angular é necessária para obtenção da medida referente a esse lado do triângulo representado. Esse procedimento será desnecessário se a anotação da escala for grande o suficiente em relação a espessura do marcador.

A ilustração do instrumento situada à esquerda na figura 6 apresenta a formação resultante da indicação do autor, ou seja, um triângulo retângulo isósceles, cuja secante, pelo instrumento, resuta em “141 partes” que, considerando o raio 100 partes, resulta em um número aproximado a raiz quadrada de dois. Ainda neste caso, o autor indica a tangente de 45º, dada pelo marcador esquerdo, como sendo “sempre” a medida do raio.

A ilustração central da figura 6 é a representação de um triângulo retângulo com ângulo da base menor que 45º. Já a ilustração a direita mostra a limitação do instrumento para formar um triângulo retângulo com ângulo da base maior que 45º. Porém, isso não impede a representação de qualquer triângulo retângulo, uma vez que o complementar de qualquer ângulo maior que 45º é um ângulo menor que essa medida e, logo, pode ser representado na sua base. O fato de se usar o ângulo complementar para esses casos é descrito pelo autor, conforme citação.

Assim, para diferentes ângulos é possível encontrar a tangente e a secante correspondente, visto que a escala do comprimento do Raio está dividido em 10 partes e cada uma dessas subdividida também em 10 partes.

Figura 7 – Representação de um triângulo retângulo com um ângulo de 25º em uma reprodução do instrumento setor trigonal.



Fonte: fotografia tirada pelos autores.

Na reprodução do instrumento ilustrado na figura 7, mostramos por meio da escala do marcador direito o valor aproximado de 1,1 para a secante de 25º, tomando o raio unitário (1). Como a unidade (raio do setor) está dividida em 10 partes, podemos notar que passa ainda um pouco de 11 unidades. Convém observar que nessa imagem em particular, não aparece o posicionamento do marcador direito na marcação do ângulo, pois o marcador esquerdo está sobreposto à escala angular (linha tangente).

Consideramos que encontrar a secante de um ângulo por meio do instrumento e do tratado permite ao professor explorar a sua identidade com a medida da hipotenusa, no triângulo retângulo, quando o cateto adjacente, no caso o raio, é unitário. Além de encaminhar a síntese de que o valor da secante de um ângulo no triângulo retângulo é a razão entre as medidas da hipotenusa e do cateto adjacente a esse ângulo.

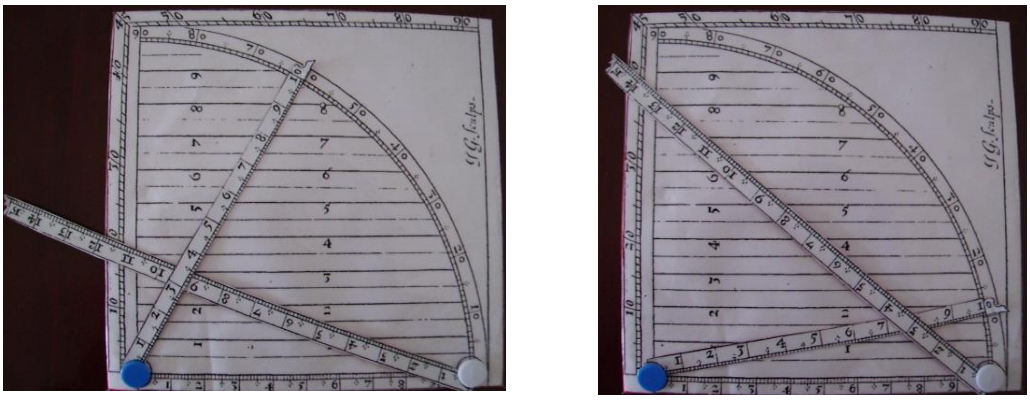
2.3 Representar qualquer triângulo obtusângulo

Neste tópico, o tratado fornece instruções para a construção de triângulos obtusângulos mobilizando dois marcadores móveis no plano do setor.

> Suponhamos que os dois ângulos conhecidos sejam 60 e 100 *gr*. Esse triângulo deve necessariamente ser obtuso, porque 100 *gr*. é maior do que 90 *gr*., e porque nenhum dos marcadores pode formar um ângulo maior do que 90 *gr*. Portanto, o ângulo obtuso deve ser encontrado na intersecção de dois marcadores. Desse modo, para encontrar este triângulo, faça assim: adicione os dois ângulos conhecidos e eles farão 160: substraia de 180, e assim restará 20, que é o terceiro ângulo. Portanto, para representar isso, coloque um marcador em 20 *gr*. e o

> outro em 60 *gr.* e onde eles se cruzarem, a intersecção, formará um ângulo de 100 *gr.*, porque todos os três ângulos devem fazer exatamente 180 *gr*. E os marcadores assim aplicados darão o triângulo procurado, e as divisões dos marcadores, juntos em suas intersecções com o raio, mostrarão as proporções dos três lados dele, como nos exemplos anteriores (CHATFEILD, 1650, p. 11-12, tradução nossa).

Figura 8 – Ilustração de uso do instrumento setor trigonal na representação de triângulos obtusângulos



Fonte: fotografia tirada pelos autores.

Nota-se que a forma do autor se expressar não difere muito de abordagens em livros didáticos. Inicialmente o autor parte de um exemplo e articula com a classificação de ângulo obtuso, para, em seguida, fazer a afirmação "*Portanto, o ângulo obtuso deve ser encontrado na intersecção de dois marcadores*". Embora haja omissão de explicações, não é difícil chegar a essa síntese, dado que o triângulo obtusângulo tem um ângulo maior que o reto e os marcadores do instrumento somente ficam sobre sua base na rotação de 0º a 90º. Com isso, a representação do ângulo obtuso nunca terá vértice nos centros dos marcadores e, portanto, sempre se dará no encontro dos marcadores. Para essa representação, deve-se calcular o suplementar da soma dos dois ângulos dados, ou seja, saber a medida do terceiro ângulo. O autor reforça a validade da medida desse terceiro ângulo com a propriedade da soma da medida dos ângulos internos de um triângulo. Dado que essa terceira medida não pode ser verificada diretamente pelas escalas do instrumento.

Consideramos também as relações entre teoria e prática um potencial didático que pode ser explorado a partir do uso do instrumento e do tratado, que contribuem para o movimento do pensamento e a formação de conceitos.

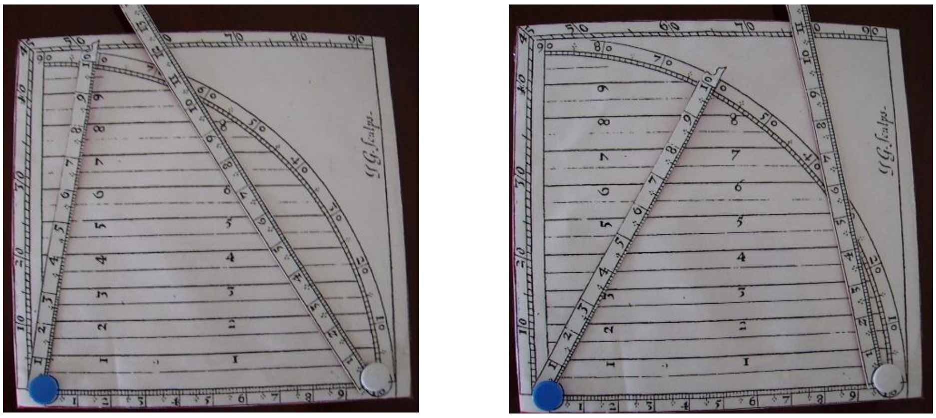
Na última parte desse item o autor diz sobre as medidas dos lados do triângulo que discorremos mais adiante, uma vez que é recorrente aos três casos apresentados (triângulos retângulo, acutângulo e obtusângulo).

2.4 Representar qualquer triângulo acutângulo

Do mesmo modo que o procedimento anterior, o tratado dá instruções para construção de triângulos acutângulos.

> Isto é feito apenas aplicando-se os marcadores nos graus dos ângulos conhecidos na linha tangente e no quadrante.
> Mas, se quaisquer dos ângulos estiver acima de 60 *gr.*, então ele deve ser suprimido, colocando-se um dos marcadores no complemento de ambos adicionados em conjunto, até [completar] 180 *gr*. Suponhamos que os dois ângulos agudos conhecidos sejam de 60 e 80: os marcadores ao serem aplicados a esses graus na Tangente e no Quadrante não se encontrarão para se cruzarem. Portanto, coloque um marcador em 60, e o outro em 40 *gr*., que é o complemento da soma de ambos, de 140 para 180. E, assim, você terá o Triângulo procurado. [E] a proporção de seus lados é encontrada da forma como [foi] dito anteriormente. (CHATFEILD, 1650, p. 11-12, tradução nossa).

Figura 9 – Representações dos ângulos 60º e 80º com vértices nos centros dos marcadores

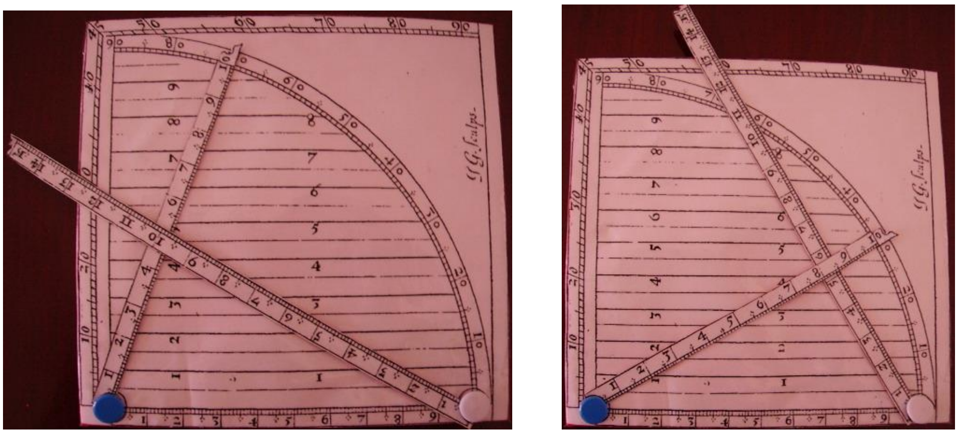


Fonte: fotografia tirada pelos autores.

Representar triângulos acutângulos é orientado de forma simples, pois a representação é direta, utilizando o movimento de ambos marcadores sobre as escalas angulares. Com isso, poder-se-ia pensar que a representação de qualquer triângulo acutângulo seria sempre possível desse modo. Entretanto, o autor reconhece que nem sempre isso será possível, o fator que interfere nas representações dos triângulos com o instrumento é o comprimento dos marcadores. Um deles tem o comprimento da diagonal do quadrado, que o permite percorrer toda a escala angular posicionada em dois lados consecutivos do quadrado (vide figura 5). Porém, o outro marcador é menor, não vai além da borda setor, isto é, tem o comprimento do raio do setor. Tal limitação faz com que algumas construções para representar triângulos, mesmo acutângulos, tenham que usar o mesmo procedimento de cálculo para encontrar a medida do terceiro ângulo descrito no caso anterior, para representar um ângulo obtuso.

Segundo o autor a limitação se refere a quaisquer ângulos acima de 60º e, a partir dessa afirmação, apresenta o exemplo (figura 9) de como representar um triângulo com os ângulos de 60º e 80º. Entretanto, ao analisar o instrumento, concluímos que é possível representar triângulos com um dos ângulos superior à 60º, cujo vértice seja o centro do marcador, por exemplo, o triângulo formado com os ângulos da base 30º e 70º (figura 10).

Figura 10 – Representações dos ângulos 30º e 70º com vértices nos centros dos marcadores



Fonte: fotografia tirada pelos autores.

Nota-se ainda que, levando em conta o comprimento do marcador esquerdo (menor) e seu movimento ao percorrer a escala, os triângulos formados ao cruzar com o outro marcador, são todos triângulos acutângulos isósceles (exceto o triângulo retângulo). Essa é uma generalização que também se mostra como um potencial didático.

Referente a esses dois últimos tópicos, destacamos o potencial didático para o ensino da matemática, as articulações com a soma da medida dos ângulos internos de um triângulo nas suas representações não diretas com o instrumento, como já foi dito. Há, assim, a necessidade da realização do procedimento de cálculo anterior a sua representação, no caso de conhecidos somente dois ângulos. Isso mostra que o uso do instrumento é limitado, quando tomamos como parâmetro a construção de desenhos que o estudante pode realizar no papel com o uso de transferidor. Porém, tal limitação potencializa a articulação mental de tais conceitos, tanto da soma dos ângulos internos de um triângulo, como de triângulos congruentes, compondo uma articulação dos fundamentos teóricos com a prática no uso do instrumento.

Voltemos aos dois primeiros apontamentos do autor relativos à resolução de triângulos, já descritos neste texto: *a quantidade dos ângulos e as proporções entre seus lados ou dos lados subtendidos e perpendiculares entre si*. Exploramos nos três casos as potencialidades referentes aos ângulos, vejamos agora o potencial didático desse material considerando agora os lados desses triângulos que são representados no instrumento.

Cabe aqui observar, entretanto, que, embora este trabalho apresente esse tópico separadamente, não estamos sugerindo que uma abordagem didática a partir do documento tenha que manter essa organização. Apenas queremos ressaltar que, como o próprio autor revela, trata-se da mesma situação quando aplicada a triângulos.

O tratado não discorre somente sobre as medidas dos lados dos triângulos, visto que, se assim fosse, poderíamos ter como enfoque relações, tais como "a medida de um dos lados do triângulo deve sempre ser inferior a soma dos dois outros", a "lei dos senos", a "lei dos cossenos" e assim por diante. Diferentemente, o *Trigonall Sector* trata da proporcionalidade dos lados entre triângulos, que é fundamental à prática do instrumento na *planimetria* e na *altimetria*, tal como encontra-se descrito no tópico “Para encontrar qualquer quantidade de ângulo" (CHATFEILD, 1650, p. 6-7).

Isso significa que o objetivo da representação dos diferentes triângulos no instrumento não está relacionado apenas em saber a medida de cada lado do triângulo, e sim a relação que dois lados do triângulo formam com o raio, que é o lado de medida fixa em todos os triângulos formados com o instrumento, ou seja, a "unidade de medida".

Com efeito, no caso de um triângulo retângulo com ângulo de 45º, a razão entre o Raio e o outro cateto é 1:1, ou, equivalentemente 100:100, e entre o Raio e a hipotenusa 100:141. Essas razões estão em proporção para quaisquer triângulos retângulos com ângulo de 45º que se possa construir, seja na triangulação necessária para medir uma distância horizontal na *planimetria* ou a altura de determinado objeto na *altimetria*. Essa relação entre teoria e prática relacionada ao conceito de semelhança de triângulos torna-se, portanto, um relevante potencial didático do uso do instrumento para apropriação de significado pelo estudante.

Considerações finais

Apontamos aqui apenas para algumas potencialidades didáticas que poderiam ser exploradas com o setor trigonal. Mas é preciso que tais potencialidades sejam exploradas tendo em vista uma organização de ensino que procure articular o conhecimento matemático incorporado no setor trigonal com o contexto histórico, o currículo escolar e o público alvo, considerando a intencionalidade do professor de modo a gerar uma profícua atividade matemática (DIAS, 2012) aos estudantes.

Uma abordagem de ensino utilizando o setor trigonal permite investigar propriedades em triângulos que são construídos a partir de seus ângulos. As relações entre os lados e os ângulos são à primeira vista flagradas no processo de construção sem a necessidade de recorrer inicialmente a um desenho. A hipótese que daí levantamos é que a dinâmica no uso do instrumento aliada as orientações descritas no tratado, pode conduzir o estudante a articular teoria e prática de modo mais acessível e lúdico ao processo de análise e síntese, necessário à formação conceitual. Acrescentamos a isso, o potencial de desenvolvimento, quando o estudante vivencia situações próximas às praticadas por seus antepassados ao longo da história. Nesse sentido, essa abordagem permite que superemos um processo ensino que parte de uma síntese conceitual, isto é, da definição, ou mesmo, de uma situação em si, como o caso da exploração de semelhança de triângulos utilizando somente desenhos de triângulos; para outro, em que a construção de significado do conhecimento matemático pelo indivíduo dialogue com sua construção histórica.

Tal abordagem, entretanto, deve evitar encerrar o setor trigonal nas malhas formais de uma matemática moderna. Os aspectos formais do conhecimento matemático não devem prefigurar a atividade, mas apenas norteá-la. Assim, num primeiro momento o instrumento e o tratado devem ser considerados historicamente, permitindo que o professor (e até mesmo o estudante) perceba as diferentes relações entre conceitos e noções já bem sedimentados matematicamente. As amarras conceituais, dessa maneira, são resignificadas, dando acesso a conhecimentos não só matemáticos, mas também "extramatemáticos".

Quanto ao uso de documentos originais, como já discorremos em outro lugar (SAITO, DIAS, 2013), consideramos que um tratamento didático do documento deve manter as expressões que não são usuais em livros didáticos atuais, como instrumento geométrico e quantidade de ângulo, bem como a escrita de 45*gr*. ao invés de 45º. Suscitar questionamentos, por parte dos estudantes, sobre esses aspectos e outros, é uma das aprendizagens que se busca com o uso didático desse tipo de documento. Assim, por um lado buscamos convidar o estudante para um diálogo com a história dos seus antepassados e, por outro, mostrar que nem todas as respostas estão no próprio documento e, com isso, colocar em evidência, no ambiente escolar, discussões sobre o movimento da produção de conhecimento.

Questionamento e formulação de hipóteses fazem parte do movimento do pensamento na formação do conceito para si que, por sua vez, é capaz de propiciar a apropriação da significação dos conceitos. Nesse processo, nem todos os aspectos envolvidos são de caráter somente matemático, como concebemos hoje, mesmo que o documento apresente o uso da matemática para algum fim.

Além disso, questionamentos podem impulsionar a pesquisa em outros documentos, contribuindo para a continuidade de investigações em história da matemática. Principalmente, as que buscam colaborar com a Educação, buscando uma interface, no sentido colocado por Saito e Dias (2013), "que, embora tenha alguns pressupostos e concepções sobre história e ensino, constrói-se no movimento da pesquisa com a prática pedagógica" (p. 91).

Referências

BENNETT, J. A. (1991). The challenge of practical mathematics. In: PUMFREY, S.; ROSSI, P. L.; SLAWINSKI, M. (Orgs.). **Science, Culture and Popular Belief in Renaissance Europe**. Manchester/New York: Manchester University Press, p. 176-190.

_____. (1998). Practical Geometry and Operative Knowledge. **Configurations**, Baltimore, v. 6, p. 195-222.

_____. (2003). Knowing and doing in the sixteenth century: what were instruments for?. **British Journal for the History of Science**, London, v. 36, n. 2, p. 129-150.

BRASIL. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

CAMEROTA, F. (2000). **Il compasso di Frabrizio Mordente:** Per la storia del compasso di proporzione. Firenze: Leo S. Olschki.

CHATFEILD, J. (1650). **The Trigonall Sector; The Description and the use therof: Being an Instrument most aptly serving for the resolution of all Right lined Triangles, with great facility and delight. By which all Planimetrical, and Altimetrical conclusions may be wrought at pleasure. the Lines of Sines, Tangents, Secants and Chords, pricked down on any Instrument: Many Arithmeticall proportions calculated, and found out in a moment. Dialls, delineated upon most sorts of plaines: with many other delightull conclusions**. London: Robert Leybourn.

DIAS, M. S. (2007). **Formação da imagem conceitual da reta real**: um estudo do desenvolvimento do conceito na perspectiva lógico-histórica. 2007. 251 f. Tese de doutorado em Educação, São Paulo, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

_____. (2012). Atividade Matemática no processo formativo do professor. In: Infoteca, **XVI Endipe**, Campinas: Junqueira&Marin Editores, v. 3, p. 2358-2369. Disponível em http://www.infoteca.inf.br/endipe/acervo/. Acesso em 7 nov 2014.

DRAKE, S. (1977). Tartaglia's *Squadra* and Galileo's *Compasso*. **Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze**, v. 2, p. 35-54.

_____. (1995). **Galileo At Work:** His Scientific Biography. New York: Dover.

EUCLIDES. (2009). Os elementos. Tradução Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. da Unesp.

GESSNER, S. (2010). Savoir manier les instruments: la géometrie dans les écrits italiens d'architecture (1545-1570). **Revue d'Histoire des Mathématiques**, v. 16, n.1, p. 87-147.

GUNTER, E. (1623). **The Descripition and Vse of the Sector, for such as are studious of Mathematical practisse**. London: Printed By Willian Iones.

HARKNESS, D. E. (2007). **The Jewel House**: Elizabethan London and the Scientific Revolution. New Haven; London: Yale University Press.

HIGTON, H. (2001). Does using an instrument make you mathematical? Mathematical practitioner of the 17th century. **Endeavour**, Michigan, v. 25, n. 1, p. 18-22.

HILL, K. (1998). "Juglers or Schollers?": negotiating the role of a mathematical practitioner. **British Journal for the History of Science**, London, v. 31, p. 253-274.

HINDLE, B. (1981). **Emulation and Invention**. New York: New York University Press.

HOOD, T. (1598). **The Making and use of the Geometricall Instrument, called a Sector**. London: [s.ed.].

HOPP, P. M. (1999). **Slide Rules:** Their History, Models, and Makers. Mendham: The Astragal Press.

KUSUKAWA, S.; MACLEAN, I. (eds.). (2006). **Transmitting Knowledge:** Words, Images, and Instruments in Early Modern Europe. Oxford/New York: Oxford University Press.

MANCOSU, P. (1996). **Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century**. New York/Oxford: Oxford University Press.

MCKIRANHAN Jr., R. D. (1978). Aristotle's Subordinate Sciences. **British Journal for the History of Science**, London, v. 11, p. 197-220.

RAMUS, P. (1569). **Arithmeticae Libri duo, Geometriae septem et viginti**. Basilea: [s.ed.].

ROUX, S. (2010). Forms of Mathematization (14th-17th Centuries). **Early Science and Medicine**, Leiden, v. 15, n. 10, p. 319-337.

SAITO, F. (2012). Possíveis fontes para a História da Matemática: Explorando os tratados que versam sobre construção e uso de instrumentos “matemáticos” do século XVI. In: SILVA, M. R. B. da; HADDAD, T. A. S. (Orgs.). **Anais do 13 Seminário Nacional de História da Ciência e da Tecnologia – FFLCH USP – 03 a 06 de setembro de 2012**. São Paulo: EACH/USP, p. 1099-1110.

_____. (2013). Instrumentos e o "saber-fazer" matemático no século XVI. **Revista Tecnologia e Sociedade**, Curitiba, v. 18, n. especial, p. 101-112.

_____. (2014). Instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII na articulação entre história, ensino e aprendizagem de matemática. **Rematec**. No prelo.

SAITO, F.; DIAS, M. S. (2011). **Articulação de entes matemáticos na construção e utilização de instrumento de medida do século XVI**. Natal: Sociedade Brasileira de História da Matemática.

_____. (2013). Interface entre História da Matemática e Ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência & Educação**, v. 19, n. 1, p. 89-111.

SOUSA, M. C. (2004). **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica**: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. 2004. 285 f. Tese de doutorado em Educação, Campinas, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

TARTAGLIA, N. (1544). **Qvesiti et inventioni diverse de Nicolo Tartaglia, di novo restampati con una gionta al sesto libro, nella quale si motra duoi modi di redur una Citta inespugnabile. La divisione et continentia di tutta l'opra nel seguente foglio si trovata notata.** Appresso de l'avttore.

TAYLOR, E. G. R. (1954). **The Mathematical Practitioners of Tudor & Stuart England.** Cambridge: Institute of Navigation/Cambridge University Press.

WILLMOTH, F. (2009). "Reconstruction" and interpreting written instructions: what making a seventeenth-century plane table revealed about the independence of readers. **Studies in History and Philosophy of Science**, v. 40, p. 352-359.

Recebido em: 01/10/2014

Aceito em: 01/12/2014