Suma de los ángulos interiores de un triángulo. Historia y didáctica.

Sum of the inner angles of a triangle. History and dydactics

VICENTE MEAVILLA SEGUÍ[1]

ANTONIO M. OLLER MARCÉN[2]

Resumen

La enseñanza de las matemáticas depende de múltiples variables: público a la que se dirige, estructura interna de la disciplina, evolución histórica de los conceptos y procedimientos, etc. Así pues, la historia de las matemáticas es una importante e interesante herramienta a la hora de diseñar actividades para el aula. En este artículo nos centramos en una sencilla y clásica proposición geométrica: la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a dos rectos. En particular, presentamos cinco fragmentos históricos relacionados con dicho resultado, los analizamos desde un punto de vista didáctico y proponemos algunas actividades basadas en ellos dirigidas a un amplio abanico de estudiantes; desde alumnos de primaria hasta profesorado en formación.

Palabras clave: *Historia de las Matemáticas; Ángulos interiores de un triángulo; Diseño de actividades.*

Abstract

The teaching of mathematics depends on many variables: the public to which we address, the inner structure of the discipline, the historical evolution of the concepts and procedures, etc. Thus, history of mathematics is an important and interesting tool in order to design classroom activities. In this paper, we focus on a simple and classical geometric proposition: the sum of the inner angles of a triangle is equal to two right angles. In particular, we present five historical fragments related to this result, we analyze the from a didactical point of view and we present some activities, based on them, addressed to a wide range of students; from primary pupils to prospective teachers.

Keywords: *History of Mathematics; Inner angles of a triangle; Design of activities.*

[1] Doctor por la Universidad de Barcelona (UAB). Profesor del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, Facultad de Ciencias Sociales y Humanas (UNIZAR), Teruel, Aragón, España. Dirección Postal: Ciudad Escolar s/n, C.P. 44003, Teruel, España. E-mail: meavilla@unizar.es

[2] Doctor por la Universidad de Valladolid (UVA). Profesor del Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza (CUD-ZGZ), Zaragoza, Aragón, España. Dirección Postal: Ctra. de Huesca s/n, C.P. 50090, Zaragoza, España. E-mail: oller@unizar.es

1 Introducción

Las contribuciones de la historia de las matemáticas a la educación matemática son muy diversas y admiten diferentes aproximaciones y categorizaciones. Jankvist (2009) distingue dos grupos argumentos para motivar el uso de la historia: los relacionados con la historia como herramienta y los relacionados con la historia como objetivo. Por otro lado, en cuanto a los posibles modos de introducir la historia en la práctica educativa, el citado autor señala tres categorías: las aproximaciones «iluminadoras», las aproximaciones por módulos y las aproximaciones basadas en la historia.

Todos los enfoques anteriores son valiosos y los trabajos que estudian, analizan o presentan el uso de la dimensión histórica en educación matemática son muy numerosos (KATZ; TZANAKIS, 2011).

Sin embargo, pese a esta multiplicidad de aplicaciones, existen diversas objeciones y críticas que pueden hacerse al uso de la historia en el aula (SIU, 2007). Por ejemplo, Tzanakis y Arcavi (2000, p. 203) presentan un listado de nueve argumentos en contra del uso de la incorporación de la historia. Una de ellas es que "no hay suficiente material disponible para ayudar a aquellos profesores que quieran integrar aspectos históricos". Así pues, tiene sentido el desarrollo de trabajos cuyo objetivo sea la presentación y análisis de textos históricos que permitan el diseño de actividades concreta para integrarlos en el aula.

Es este trabajo nos centramos en el clásico resultado de geometría euclídea plana sobre la suma de los ángulos de un triángulo. En particular, el artículo se organiza en tres partes que reflejan los pasos que, pensamos, deben darse a la hora de diseñar actividades basadas en textos históricos:

1. Presentación de los textos seleccionados.
2. Análisis de los fragmentos desde un punto de vista didáctico.
3. Diseño de actividades basadas en los textos seleccionados.

2 Fragmentos históricos

El hecho de que la suma de los tres ángulos interiores de un triángulo suman dos ángulos rectos es uno de los resultados más básicos relacionados con la geometría plana. En consecuencia, aparece virtualmente en todos los textos dedicados a la geometría que se han escrito a lo largo de la historia.

En esta sección presentamos una selección de cinco textos históricos relacionados con el resultado que nos ocupa.

2.1 Pitágoras y los pitagóricos

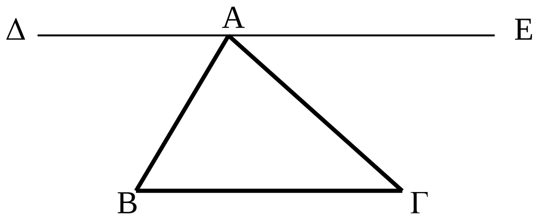
La contribución de Pitágoras (o más bien de su escuela) al problema de la determinación de la suma de las amplitudes de los ángulos interiores de cualquier triángulo nos ha llegado únicamente por testimonios indirectos.

Pitágoras vivió en torno al siglo VI a.C. El fragmento que presentamos proviene de los *Comentarios a los Elementos de Euclides* de Proclo, un filósofo griego del siglo V. Es decir, están separados casi un milenio, con las precauciones que eso nos debe hacer tomar. No obstante, Proclo basa su afirmación en una fuente más cercana: Eudemo, discípulo de Aristóteles, que vivió unos dos siglos después que Pitágoras.

En cualquier caso, el texto es el siguiente:

> El peripatético Eudemo atribuye a los pitagóricos el descubrimiento del siguiente teorema: cada triángulo tiene sus ángulos internos iguales a dos rectos y dice que demostraron la proposición de esta manera: "Sea ΑΒΓ un triángulo y trácese, pasando por Α, ΔΕ paralela a ΒΓ. Acontece entonces que, puesto que ΒΓ y ΔΕ son paralelas, los ángulos alternos son iguales. Por tanto ΔΑΒ es igual a ΑΒΓ y ΕΑΓ a ΑΓΒ. Añádase ΒΑΓ como ángulo común. Entonces los ángulos ΔΑΒ, ΒΑΓ, ΓΑΕ, i. e. los ángulos ΔΑΒ, ΒΑΕ, i.e. dos ángulos rectos, son iguales a tres ángulos de ΑΒΓ. En consecuencia, los tres ángulos del triángulo son iguales a dos rectos". (KIRK; RAVEN; SCHOFIELD, 1999, p. 471)

Figura 1: Reproducción de la figura que acompaña al texto de Proclo



Fuente: Autores

2.2 Los *Elementos* de Euclides

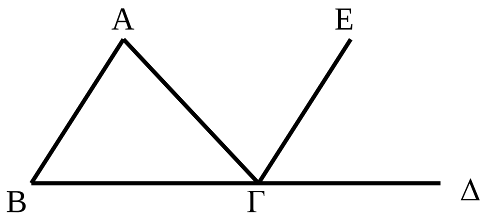
Euclides, vivió en torno al siglo III a.C. Una de sus obras, los *Elementos*, es seguramente el texto matemático más famoso de la historia. Durante siglos fue comentado, traducido y utilizado como texto de estudio.

En los *Elementos* se recopila y sistematiza buena parte del saber geométrico de la época en que fue escrito. El resultado que nos ocupa aparece en la Proposición 32 del Libro I:

> PROPOSICIÓN 32
> En todo triángulo, si se prolonga uno de sus lados, el ángulo externo es igual a los dos ángulos internos y opuestos, y los tres ángulos internos del triángulo son iguales a dos ángulos rectos.
> Sea ΑΒΓ el triángulo, y prolónguese uno de sus lados, ΒΓ, hasta Δ.
> Digo que el ángulo externo ΑΓΔ es igual a los dos internos y opuestos, CAB, ΑΒΓ, y los tres ángulos internos del triángulo, ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ, son iguales a dos rectos.
> Pues trácese por el punto Γ (la recta) ΓΕ paralela a la recta ΑΒ.

Y puesto que AB es paralela a ΓE y AΓ ha incidido sobre ellas, los ángulos alternos BAΓ, AΓE son iguales entre sí.
Puesto que, a su vez, AB es paralela a EΓ la recta BΔ ha incidido sobre ellas, el (ángulo) externo EΓΔ es igual al interno y opuesto ABΓ.
Pero se ha demostrado que el (ángulo) AΓE es también igual al (ángulo) BAΓ; por tanto, el ángulo entero AΓΔ es igual a los dos internos y opuestos BAΓ, ABΓ.
Añádase al uno y a los otros el ángulo AΓB; entonces, los (ángulos) AΓΔ, AΓB son iguales a los tres ángulos ABΓ, BΓA, CAB. Pero los (ángulos) AΓΔ, AΓB son iguales a dos rectos; por tanto, los (ángulos) ABΓ, BΓA, ΓAB son también iguales a dos rectos. (EUCLIDES, 1991, pp. 241-242)

Figura 2: Reproducción de la figura que acompaña al texto de Euclides



Fuente: Autores

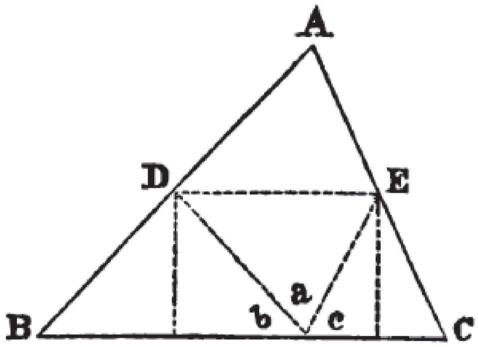
2.3 Doblando papel

Blaise Pascal vivió entre 1632 y 1662. Según del historiador Carl B. Boyer (1986), Pascal es el mayor podría haber sido de la historia de las matemáticas. Esta afirmación se sustenta, entre otros aspectos, en la siguiente anécdota relatada por Howard Eves (1983, p. 20): “Blaise Pascal, siendo aún muy joven descubrió que la suma de los ángulos de un triángulo es un ángulo llano mediante un simple experimento que involucraba doblar un triángulo de papel”.

No obstante, este episodio de la vida de Pascal bien pudiera ser apócrifo, puesto que no tenemos ninguna referencia directa sobre el mismo. Sin embargo, la idea de demostrar o comprobar el resultado que nos ocupa únicamente doblando papel puede encontrarse en textos antiguos. El siguiente fragmento proviene de un libro titulado *Elements of practical geometry for schools and workmen,* escrito a mediados del siglo XIX por Horace Grant:

Corta un gran triángulo de papel de cualquier forma y dobla en ángulo superior A hasta tocar la base en a, pero la doblez DE debe hacerse paralela a la base. Entonces dobla el ángulo B hasta que caiga junto a a en b; y dobla el ángulo C para que esté junto a a en c.
Los tres ángulos a, b y c están juntos en el mismo punto de la recta BC y por tanto son iguales a dos rectos.
Corta muchos más triángulos de papel, de distintas formas y dobla sus ángulos de la manera anterior. Comprobaremos que los tres ángulos siempre ocupan el espacio de dos ángulos rectos. (GRANT, 1852, p 75)

Figura 3: Figura que acompaña al texto de Grant



2.4 Moviendo puntos

Alexis Claude Clairaut vivió entre 1713 y 1765. Fue admitido en la Academia de Ciencias francesa cuando aún no tenía la edad legal, por su trabajo *Recherches sur les courbes a double courbure* que escribió a los 16 años y que fue publicado en 1731. Además de pertenecer a las academias científicas más importantes de su época y de sus importantes contribuciones a la

Fuente: (GRANT, 1852)

ciencia en general y a las matemáticas en particular, Clairaut escribió dos textos dedicados a la enseñanza del álgebra y la geometría que alcanzaron varias ediciones y que fueron traducidos a varios idiomas.

En el dedicado a la geometría, titulado *Éléments de géométrie*, encontramos el siguiente fragmento:

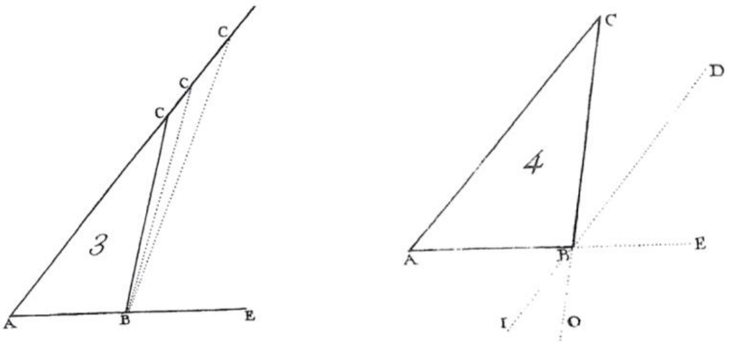
> LXII
>
> […] Para hallar cómo se puede deducir la magnitud del ángulo C a partir de las magnitudes de los ángulos A y B, examinemos lo que ocurrirá a este ángulo si las líneas AC y BC se aproximan o separan una de otra. Supongamos, por ejemplo, que BC, al girar alrededor del punto B, se separa de AB y se acerca a BE. Resulta claro que durante este giro de BC, el ángulo B se abre continuamente; y que, por el contrario, el ángulo C se cierra cada vez más. Este hecho puede hacer sospechar que, en este caso, la disminución del ángulo C iguala el aumento del ángulo B. De este modo, la suma de los ángulos A, B y C es siempre la misma, cualquiera que sea la inclinación de las líneas AC y BC sobre la línea AE.
>
> LXIII
>
> Esta inducción lleva con ella su demostración; porque si se traza ID paralelamente a AC se observa, en primer lugar, que los ángulos ACB y CBD, llamados ángulos alternos, son iguales. Esto es evidente puesto que las líneas AC e IB, al ser paralelas, está igualmente inclinadas sobre CBO. Con esto, el ángulo IBO también es igual al ACB. Pero el ángulo IBO también es igual al ángulo CBD, porque la línea ID no está más inclinada sobre CO de un lado que de otro. Por tanto, el ángulo DBC, igual al IBO, es igual al ángulo ACB, su alterno.
>
> LXIV

En segundo lugar, se ve, que el ángulo CAE es igual al ángulo DBE, a causa de las paralelas CA y DB. Entonces, los tres ángulos del triángulo se pueden poner unos al lado de los otros, unidos por sus vértices en el punto B. Por tanto, los tres ángulos

Fuente: (CLAIRAUT, 1741)

DBE, CBD y CBA, que son iguales a los tres ángulos CAB, ACB y CBA, son iguales a dos ángulos rectos. Todo lo que acabamos de decir se puede aplicar a cualquier triángulo. En consecuencia, está asegurada la siguiente propiedad general: la suma de

Figura 4 – Figuras que acompañan al texto de Clairaut



los tres ángulos de un triángulo es constantemente la misma e igual a dos rectos o, lo que es lo mismo, a 180 grados. (CLAIRAUT, 1741, pp. 62-66)

2.5 Más de 180º

En el año 1633 se publicó en Londres, bajo el seudónimo de Henry Van Etten, la obra *Mathematical recreations or a collection of many problems*. Se trata de la traducción al inglés de una obra homónima inicialmente publicada en francés en 1624 por Jean Appier Hanzelet (Heeffer, 2004). Se trata de una colección de problemas y curiosidades de diversa índole, algunos de ellos con contenido matemático explícito.

El problema número 97 dice lo siguiente:

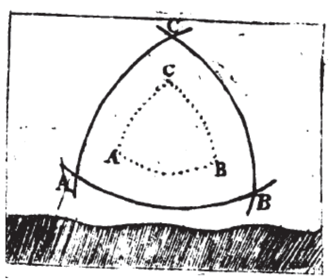
Problema 97

Construir un triángulo que tenga tres ángulos rectos

Abre el compás como quieras y desde A describe un arco BC. Entonces, con la misma apertura y con centro en B describe el arco AC. Finalmente, con centro en C, describe con el compás el arco AB

De este modo habrás obtenido el triángulo esférico equilátero ABC, rectángulo en A, en B y en C; esto es, cada ángulo comprende 90 grados lo cual no puede suceder en ningún triángulo plano sea del tipo que sea. (VAN ETTEN, 1653, pp. 234-235)

Figura 5: Figura que acompaña al texto de Van Etten



Fuente: (VAN ETTEN, 1653)

3 Algunos comentarios

En esta sección analizamos los fragmentos que hemos presentado en el parágrafo anterior y presentamos algunos comentarios desde una óptica didáctica.

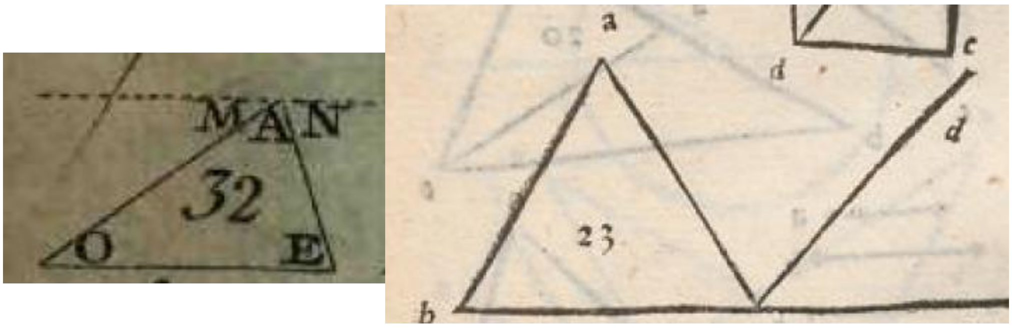
3.1 Las demostraciones griegas

Los dos primeros fragmentos que hemos presentado provienen de una misma cultura y, en consecuencia, presentan multitud de similitudes. Ambos son ejemplos de lo que llamaríamos geometría estática (VECINO, 2001).

La figura está dada inicialmente junto con los elementos auxiliares necesarios para la demostración, de tal modo que el proceso de demostración transmite un cierto aire de inevitabilidad muy relacionado con una concepción platónica e idealista de las matemáticas. No hay ningún tipo de motivación o indicación heurística que justifique la posible veracidad del resultado ni los pasos que se dan en su demostración.

Ambas demostraciones se inician trazando una paralela a uno de los lados por su vértice opuesto. Sin embargo, la demostración pitagórica únicamente requiere del concepto de 'ángulos alternos e internos' mientras que la euclídea necesita además del concepto de 'ángulos correspondientes'.

Figura 6 – Las demostraciones griegas en textos posteriores



Fuente: (ALMEIDA, 1787) y (PACIOLI, 1494)

A lo largo de la historia ambas demostraciones han sido repetidas en múltiples ocasiones. En la parte izquierda de la figura anterior se muestra un ejemplo de un texto del siglo XVIII y en la parte derecha una figura de un incunable del siglo XV.

3.2 La demostración doblando papel

La anécdota juvenil de Pascal y el fragmento inglés del siglo XIX ilustran el uso de materiales manipulativos. Existen interesantes ejemplos en textos antiguos de esta práctica aparentemente moderna (MEAVILLA; OLLER, 2013). La papiroflexia, por su parte, es una herramienta interesante con la que trabajar diversos aspectos matemáticos en el aula (HULL, 2006). En particular, su uso aplicado a la enseñanza de la geometría no sólo permite manipular objetos que de otro modo no serían más que ideas de existencia puramente platónica, sino que también permite observar y comprender propiedades que, en ocasiones, son difíciles de intuir.

Es interesante observar que la idea de la demostración es esencialmente la misma que en el caso de las demostraciones griegas: ubicar uno tras otro los tres ángulos del triángulo de tal modo que compartan un vértice. Sin embargo, el uso de un material permite observar de manera concreta cómo se juntan los tres ángulos del triángulo para formar un ángulo llano.

Utilizando este procedimiento desaparece la necesidad de apelar a conceptos y resultados anteriores relativos a ángulos alternos, correspondientes, etc. Además, como se señala en la parte final del fragmento, trabajar con papel permite repetir el experimento con diversas clases de triángulos y se puede tener una intuición sobre la veracidad del enunciado general.

3.3 Geometría dinámica

El texto de Clairaut presenta dos partes bien diferenciadas. La que más nos interesa comentar es la primera puesto que, en la segunda parte, únicamente se presenta una demostración totalmente a la dada por Euclides.

En la primera parte, sin embargo, se presenta un razonamiento de tipo dinámico, en el que uno de los puntos es desplazado mentalmente (PRESMEG, 1986) de forma que se puede observar que, fijado un ángulo, un aumento en uno de los otros conlleva una disminución en el tercero. Esta idea aporta una evidencia heurística sobre un hecho importante: la suma de los ángulos de un triángulo es constante. Efectivamente, sólo si la suma de los ángulos de un triángulo toma un valor constante tiene sentido tratar de calcularlo. Esta sencilla idea es pasada por alto en los fragmentos anteriores mientras que aquí se aporta una cierta comprobación de este hecho.

Desde un punto de vista cognitivo estas manipulaciones mentales son relativamente complejas debido a que precisan de ciertas habilidades, como la *identificación visual*, que consiste en reconocer una figura aislándola de su contexto (DEL GRANDE, 1990). Por ello, el trabajo con este fragmento se puede llevar a cabo mediante software de geometría dinámica que permita transformar dichas manipulaciones mentales en actuaciones sobre elementos más concretos (RICHARD; MEAVILLA; FORTUNY, 2010).

3.4 Geometría esférica

En el último fragmento presentado, se presenta una construcción que puede resultar sorprendente: un triángulo cuyos tres ángulos son rectos y en el que, por tanto, la suma de los ángulos interiores no es igual a 180º.

Este fragmento muestra que el concepto «triángulo» puede estar abierto a discusión y puede admitir diversas definiciones. Rompe en cierto modo con la concepción platónica de los objetos matemáticos. En definitiva, se trata de aquello que ya discutió Lakatos (1986) en su clásico *Pruebas y refutaciones*.

4 Trabajo en el aula

Hemos comentado en la introducción que el uso de textos históricos en Educación Matemática es una herramienta interesante y útil. Cualquier trabajo sobre Didáctica de las matemáticas, sea cual sea su enfoque, debería estar encaminado hacia la práctica en el aula de clase.

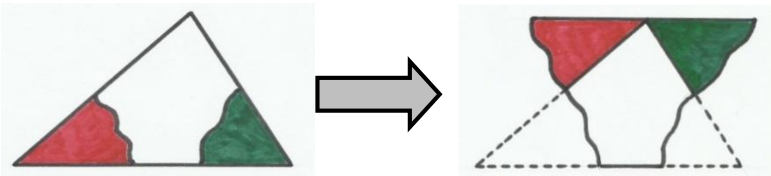
En este sentido, los textos históricos que hemos presentado, pese a su interés matemático y didáctico, quedarían en una mera anécdota si no tuvieran una utilidad práctica y directa. En esta sección vamos a presentar posibles actividades basadas en los textos y consideraciones anteriores adecuadas a diversos niveles educativos; desde la escuela primaria, hasta la formación de profesorado.

4.1 Actividades para la escuela primaria

Como es natural, cualquier trabajo con alumnos de primaria (6 a 12 años) debe necesariamente prescindir de aspectos lógico-deductivos y hacer énfasis en los aspectos visuales y manipulativos. Nos moveremos en los niveles de Van Hiele 0 y 1 denominados, respectivamente, de *visualización* y *análisis* (BURGER; SHAUGHNESSY, 1986). Para estos niveles puede ser interesante utilizar adaptaciones las demostraciones griegas y el doblado de papel.

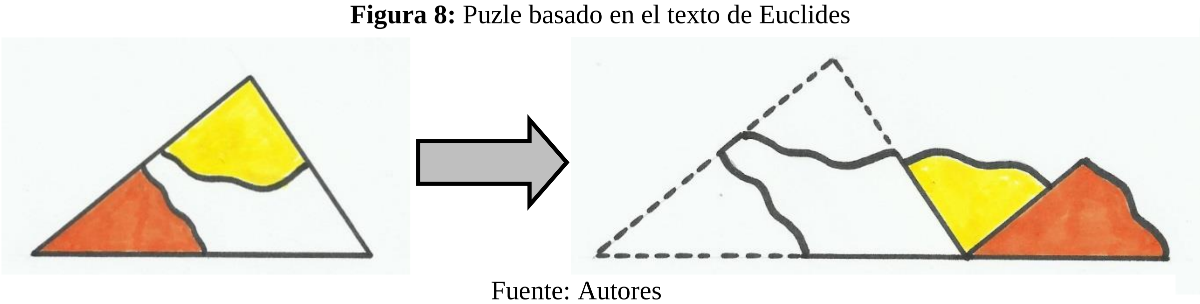
En el caso de los textos griegos, se pueden utilizar para diseñar puzles como los de las figuras siguientes.

Figura 7: Puzle basado en el texto de Proclo



Fuente: Autores

Figura 8: Puzle basado en el texto de Euclides

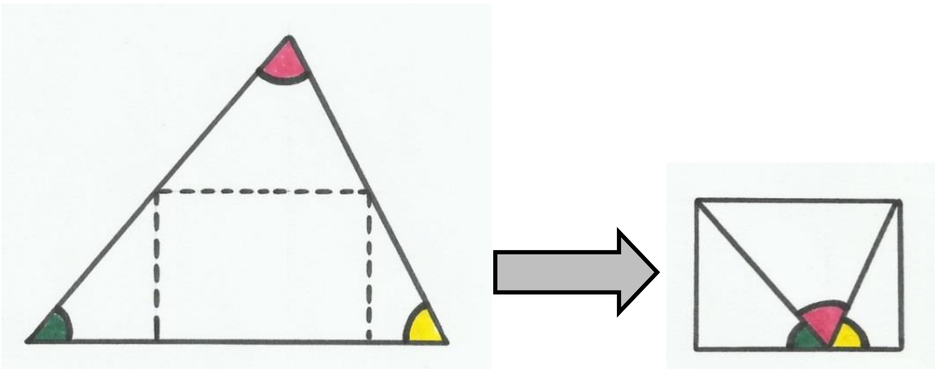


Fuente: Autores

Estos puzles, que los alumnos pueden haber dibujado y coloreado sobre papel o cartulina, permiten que los estudiantes recorten los ángulos del triángulo y los muevan libremente para observar cómo pueden formando un ángulo llano.

El uso de la papiroflexia es más inmediato. Nuevamente se puede comenzar por que los alumnos dibujen y recorten un triángulo de papel, coloreen sus ángulos y después lo plieguen según se observa en la figura siguiente.

Figura 9: Puzle basado en el texto de Grant



Fuente: Autores

Dado que tras el proceso de plegado se obtiene un rectángulo (y en función de las medidas del triángulo de partida, un cuadrado), esta actividad también puede servir para recordar o introducir estas figuras geométricas.

4.2 Actividades para la escuela secundaria

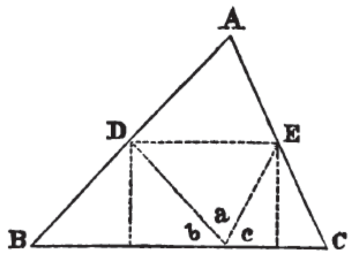
Al trabajar con alumnos de educación secundaria (12 a 16 años), podemos plantearnos el trabajo en niveles de Van Hiele superiores. Posiblemente, y en función de los propios alumnos, se puedan llevar a cabo tareas relacionadas con los niveles 2 y 3, denominados de *abstracción* y *deducción* (BURGER; SHAUGHNESSY, 1986). No obstante, no debe descuidarse el trabajo de aspectos más básicos.

En este sentido, se puede diseñar una actividad interesante a partir del uso de la papiroflexia que retome el trabajo realizado con alumnos de primaria y lo amplíe incluyendo aspectos relacionados con la argumentación y la justificación. La actividad se podría desarrollar según los pasos siguientes:

Cuadro 1: Actividad para Secundaria basada en el texto de Grant

Paso 1: Dibuja un triángulo cualquiera y recórtalo.

Paso 2: Dóblalo siguiendo las indicaciones de la figura siguiente. Marca sobre tu triángulo de papel los puntos A, B, C, D, E y los ángulos a, b, c.



Paso 3: Responde las siguientes preguntas:

- ¿Cómo son las rectas DE y BC entre sí?
- ¿Qué figura te ha quedado al realizar todos los pliegues?
- Dibuja la altura del triángulo ABC que pasa por A. ¿Qué observas?
- Con una regla, mide el lado BC y la altura que has dibujado. ¿Cuál es el área del rectángulo obtenido al plegar?

Paso 4: ¿Cuánto suman los ángulos a, b y c? ¿Por qué?

Paso 5: ¿Cuánto suman los tres ángulos del triángulo inicial? ¿Por qué?

Paso 6: Busca un compañero que haya dibujado un triángulo diferente del tuyo. Comparad vuestras respuestas a las preguntas anteriores. ¿Qué observáis?

Fuente: os autores

El fragmento de Clairaut que involucra razonamientos dinámicos es también muy adecuado para diseñar actividades utilizando software de geometría dinámica, como Cabri o Geogebra. Richard, Meavilla y Fortuny (2010, p. 99) presentan el siguiente cuestionario que implementaron exitosamente con alumnos de 15-17 años:

Cuadro 2: Actividad para Secundaria basada en el texto de Clairaut

En 1741, el matemático francés Alexis Claude Clairaut escribió un tratado de geometría en el que demostraba, entre otros resultados, que la suma de los ángulos de un triángulo siempre es igual a 180°. Para entender su discurso, además de ver cómo se explicaban las matemáticas entonces, proponemos las siguientes actividades que utilizan el Cabri II Plus.

1. Lee el artículo LXII y haz una construcción, con el Cabri, a partir de lo que dice Clairaut. Guarda el archivo «.fig». Indica lo que se ve en tu dibujo y lo que puedes visualizar con el movimiento.
2. Al desplazar el punto «C'» – es decir el punto C que se mueve, como el de la figura que da Clairaut – sobre la prolongación del lado AC, el autor dice: *Este hecho puede hacer sospechar que, en este caso, la disminución del ángulo C iguala al aumento del ángulo B.* ¿Esta disminución y aumento son proporcionales entre sí? ¿Por qué?
3. En el artículo LXIII se dice: *Esta inducción lleva con ella su demostración.*

   a) ¿Qué es una inducción? Usa Google o http://buscon.rae.es/draeI.

   b) ¿Cuál es la inducción que fundamenta su argumento en el artículo LXII?

   c) Compara el argumento utilizado en la fase de inducción (LXII) con el argumento utilizado en la fase de deducción (LXIII y LXIV).

   d) ¿Se puede decir efectivamente que «esta inducción lleva con ella su demostración»? ¿Por qué?
4. Representa con el Cabri II Plus la situación presentada en LXIII y LXIV. Guarda el archivo «.fig». El autor dice: *Todo lo que acabamos de decir se puede aplicar a cualquier triángulo.*

   a) ¿Cómo puedes utilizar el Cabri para justificar esto?

   b) El argumento que acabas de utilizar, ¿es una inducción o una deducción?

Fuente: autores

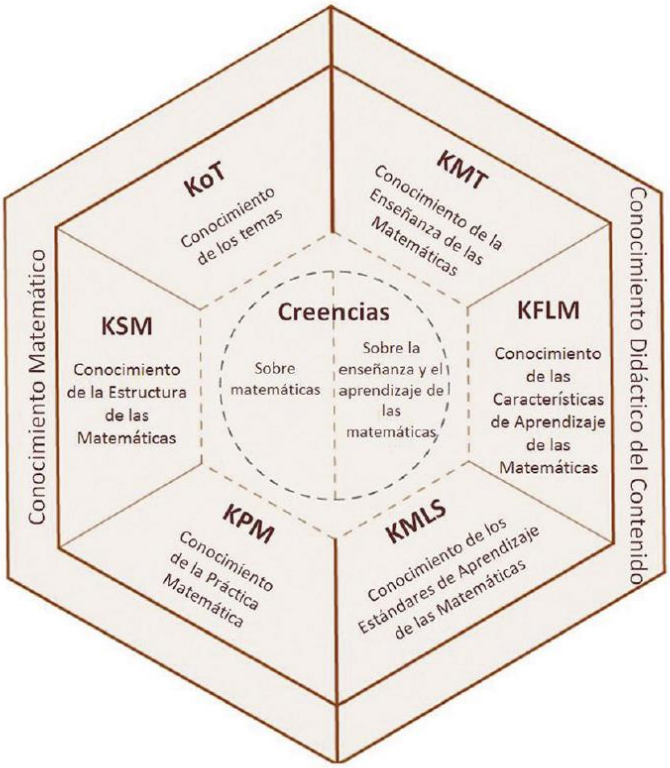
Las dos actividades anteriores comparten una característica interesante. Van más allá del mero trabajo sobre la suma de los ángulos de un triángulo. Precisamente, el uso de materiales manipulativos o de software de geometría dinámica y el uso de textos históricos, permiten el diseño de actividades en las que aparecen de manera colateral múltiples aspectos interesantes que merecen ser tratado en el aula y que, en caso de utilizar un enfoque tradicional, pasarían inadvertidos.

Finalmente, con alumnos de este nivel es posible también adaptar el texto sobre geometría esférica para plantear la discusión sobre qué es un triángulo e incluso presentar algunos aspectos de geometría del espacio, tópico que suele recibir escasa atención en el aula (GUILLÉN, 2010).

4.3 Actividades para profesorado en formación

A la hora de trabajar con profesorado en formación, ya sea de primaria o secundaria, las actividades a realizar pueden ir más allá de los aspectos puramente matemáticos, para abordar también aspectos didácticos (MOSVOLD; JACOBSEN; JANKVIST, 2014).

Figura 10: Modelo MTSK



Fuente: (SOSA; FLORES-MEDRANO; CARRILLO, 2015)

En ese sentido, dentro del *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK) propuesto por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013) se distingue entre *conocimiento matemático* (MK) y *conocimiento didáctico del contenido* (PCK). En la figura anterior se muestran las subcategorías de cada uno de estos dominios.

El trabajo con textos históricos se centra en el subdominio KFLM (*conocimiento de las características del aprendizaje las matemáticas*) que implica, entre otros aspectos un conocimiento sobre cómo las matemáticas son aprendidas y también en el subdominio KMT (*conocimiento de la enseñanza de las matemáticas*) que implica, entre otros, el conocimiento de ejemplos, recursos, actividades etc.

Para trabajar el conocimiento matemático, las actividades a realizar con profesorado en formación pueden ser similares a las llevadas a cabo con alumnos de secundaria. Sin embargo, para trabajar el conocimiento didáctico del contenido, deben diseñarse actividades que impliquen una reflexión de segundo orden acerca de la naturaleza del conocimiento matemático y de su enseñanza.

Por ejemplo, puede proponerse un análisis didáctico de las demostraciones clásicas griegas en las que los futuros profesores analicen los conocimientos previos que se necesitan para poder comprenderlas.

Del mismo modo, puede ser una actividad interesante realizar una comparación de la demostración griega y la demostración doblando papel para motivar una reflexión sobre los conceptos de justificación, demostración etc.

El trabajo con el texto de geometría esférica es un interesante punto de partida para ilustrar que el conocimiento matemático y los objetos con los que esta ciencia trabaja no son inmutables, sino que existe un grado de convencionalismo en lo que, por ejemplo, llamamos triángulo.

Por último, a partir de la lectura y análisis de los textos históricos, puede pedirse a los estudiantes que diseñen sus propias actividades dirigidas al nivel educativo en el que vayan a desempeñar su labor docente.

5 Conclusión

En el presente trabajo hemos pretendido presentar de modo práctico y efectivo una investigación relacionada con el uso de la historia en la Educación Matemática. En particular; a partir de un problema clásico, la determinación de la suma de los ángulos de un triángulo, se han ilustrado los pasos necesarios para diseñar actividades basadas en el uso de fuentes originales (JAHNKE; ARCAVI; BARBIN; BEKKEN; FURINGHETTI; EL IDRISSI; SILVA DA SILVA; WEEKS, 2000).

Según las categorías de Jankvist (2009) presentadas en la introducción, estas actividades utilizan la historia como herramienta e introducen la historia de las tres formas posibles. Así, las actividades para alumnos de primaria que se han presentado son ejemplos de aproximaciones basadas en la historia, las actividades con alumnos de secundaria y en especial la tomada de (RICHARD; MEAVILLA; FORTUNY, 2010) son ejemplos de aproximaciones por módulos, mientras que las actividades específicas presentadas para profesorado en formación se categorizarían como aproximaciones «iluminadoras».

En definitiva, las actividades presentadas permiten, en diversas medidas según el nivel al que van dirigidas, aprender historia, aprender matemáticas y ganar un mayor nivel de conciencia sobre la naturaleza del conocimiento matemático y de su componente social y cultural (TZANAKIS; ARCAVI, 2000).

Referencias

ALMEIDA, T. (1787). *Cartas Físico-Matemáticas de Teodosio a Eugenio*. Madrid, Imprenta de Benito Cano.

BOYER, C. (1986). *Historia de la matemática.* Madrid, Alianza Editorial.

BURGER, W.F.; SHAUGHNESSY J.M. (1986). Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry. *Journal for research in mathematics education*, v. 17, n. 1, p. 31 - 48, ene.

CARRILLO, J.; CLIMENT, N.; CONTRERAS, L.C.; MUÑOZ-CATALÁN, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. In UBUZ, B; HASER, C; MARIOTTI, M.A. (Eds.), *Proceedings of the CERME 8*. Ankara: Middle East Technical University, p. 2985 - 2994.

CLAIRAUT, A. C. (1741). *Élémens de géométrie.* Paris, Lambert & Durand.

DEL GRANDE, J. (1990). Spatial sense. *The Arithmetic Teacher,* Reston, v. 37, n. 6, p. 14 - 20, feb.

EUCLIDES. (1991). *Elementos.* Madrid, Gredos.

EVES, H. (1983). *Great moments in Mathematics before 1650*. Washington, MAA.

GRANT, H. (1852). *Elements of practical geometry for schools and workmen.* London, Groombridge and sons.

GUILLÉN, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? In MORENO, M.M.; ESTRADA, A.; CARRILLO, J; SIERRA, T.A. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV.* Lleida: SEIEM. p. 21 - 68.

HEEFER, A. *Récréations Mathématiques (1624) A Study on its Authorship, Sources and Influence.* Disponível em: http://logica.ugent.be/albrecht/thesis/Etten-intro.pdf. Acceso em 6 de abr. 2015.

HULL, T. (2006). *Project origami.* Wellesley, A.K. Peters.

JAHNKE, H.N.; ARCAVI, A.; BARBIN, E.; BEKKEN, O.; FURINGHETTI, F.; EL IDRISSI, A.; SILVA DA SILVA; C.M.; WEEKS, CH. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In FAUVEL, J.; VAN MAANEN, J. (Eds.) *History in mathematics education: the ICMI study.* Dordrecht: Kluwer, p. 291 - 328.

JANKVIST, U.T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational studies in Mathematics*, v. 71, n. 3, p. 235 - 261, jul.

KATZ, V.; TZANAKIS, C. (2011). *Recent developments on introducing a historical dimension in mathematics education.* Washington, MAA.

KIRK, G.S.; RAVEN, J.E.; SCHOFIELD, M. (1999). *Los filósofos presocráticos*. Madrid, Gredos.

LAKATOS, I. (1986). *Pruebas y refutaciones.* Madrid, Alianza.

MEAVILLA, V.; OLLER, A.M. (2013). Ejemplos de visualización y uso de materiales manipulativos en textos matemáticos antiguos. *NÚMEROS,* La Laguna, v. 82, p. 89 - 100, jul.

MOSVOLD, R.; JACOBSEN, A.; JANKVIST, U.T. (2014). How Mathematical Knowledge for Teaching May Profit from the Study of History of Mathematics. *Science & education,* v. 23, n. 1, p. 47 - 60, ene.

PACIOLI, L. (1494). *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalità*. Venezia, Paganini.

PRESMEG, N.C. (1986). Visualization in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*. v. 6, n. 3, p. 42 - 46, nov.

RICHARD, P; MEAVILLA, V.; FORTUNY, J.M. (2010). Textos clásicos y geometría dinámica: estudio de un aporte mutuo para el aprendizaje de la geometría. *Enseñanza de las Ciencias,* Barcelona, v. 28, n. 1, p. 95 - 111.

SIU, M.-K. No, I don't use history of mathematics in my class. Why? In FURINGHETTI, F.; KAIJSER, S.; TZANAKIS, C. (Eds.), *Proceedings HPM2004 & ESU4*. Uppsala: Uppsala Universitet, 2007. p. 268 - 277.

SOSA, L.; FLORES-MEDRANO, E; CARRILLO, J. (2015). Conocimiento del profesor acerca de las características de aprendizaje del álgebra en bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias*, Barcelona, v. 33, n. 2, p. 173 - 189.

TZANAKIS, C.; ARCAVI, A. Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In FAUVEL, J.; VAN MAANEN, J. (Eds.) *History in mathematics education: the ICMI study.* Dordrecht: Kluwer, 2000. p. 201 - 240.

VAN ETTEN, H. (1653). *Mathematical recreations or a collection of many problems.* London, William Leake.

VECINO, F. (2001). La enseñanza de la geometría en la Educación Primaria. In CHAMORRO M. C. (Coord.) *Dificultades del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: M.E.C.D., p. 123 - 146.

Enviado: 18/06/2015
Aceito: 02/03/2016