

Um Estudo Sobre a Influência do Campo Algébrico na Resolução de Situações que Envolvem Fórmulas de Área

A Study on the Influence of the Field Algebra in the Resolution of Situations Involving Formula of Area

ROSINALDA AURORA DE MELO TELES¹

Resumo

A partir da análise de procedimentos corretos e errôneos em questões extraídas de livros didáticos de matemática, discutimos como conhecimentos do campo algébrico podem influenciar na resolução de situações que envolvem fórmulas de área. Analisamos aspectos relacionados às etapas para resolução de um problema algébrico, como procedimentos corretos e errôneos no mapeamento do problema; colocação do problema em forma de equação, procedimentos de resolução e formulação da resposta final. Na escrita algébrica os dados evidenciaram dificuldade de expressar simbolicamente uma situação geral. Nas tentativas numéricas o domínio é sempre natural. Apesar de estudarmos um pequeno recorte do saber matemático, esperamos contribuir para formulação de situações didáticas eficientes para ensino aprendizagem da Matemática.

Palavras-chave: fórmulas de área; campo conceitual da álgebra; grandezas geométricas

Abstract

Based on the analysis of right and wrong procedure for questions from Brazilian mathematics textbook, in this paper, we analyze how algebraic knowledge can influence solving problems that involves formula of area. We analyze some aspects related to the stages of solving an algebraic problem, such as right and wrong procedure on mapping the problem; knowledge mobilized to transform the problem on algebraic formula (equation); solving procedure and the formulating the answer. The algebraic written, the data analysis evidenced that many students has difficulties on expression symbolically a general situation. On numeric attempts, the domain is always natural. Despite studying a small clipping of knowing mathematical we hope to contribute to the formulation of effective didactic situations of teaching and learning of mathematics.

Keywords: formula of area; conceptual field of algebra; geometric magnitude

1. Introdução

Este artigo é um recorte de uma pesquisa mais ampla que teve como objetivo geral estudar imbricações entre campos conceituais em situações envolvendo fórmulas de área de figuras geométricas planas.

Com o termo “*imbricações*”, Teles (2007) caracteriza um tipo de relação em que os campos conceituais se sobrepõem mutuamente, se articulam e a partir dessa “interconexão dinâmica” são gerados novos significados para os conteúdos matemáticos em foco. Para a autora, o tratamento de situações nas quais estão envolvidas fortes imbricações exige que os sujeitos naveguem de um campo conceitual para outros e que articulem seus conhecimentos para tratar de maneira pertinente os problemas postos.

¹ Universidade Federal de Pernambuco, Doutora em Educação – UFPE, rosinaldateles@yahoo.com.br

Podemos compreender “fórmula de área” como um elemento do campo conceitual das grandezas geométricas e suas medidas, mas também como um elemento que articula vários outros campos conceituais. Estas compreensões não são excludentes.

O campo algébrico, entre outros aspectos, possui elementos úteis para o estudo das fórmulas de área possibilitando a formulação e a resolução de problemas, por meio de equações e de regras para manipulação de símbolos algébricos. Uma atividade algébrica pressupõe a representação de um problema algebricamente (LINS e GIMENEZ, 1997). Para isto é necessário utilizar ferramentas matemáticas do campo conceitual algébrico, como noção de igualdade, equivalência, variável, incógnita e também estabelecer um sistema de relações.

A partir da análise de procedimentos corretos e errôneos mobilizados por alunos do Ensino Médio de escolas de perfis diferentes, discutimos neste trabalho aspectos relacionados ao campo conceitual da álgebra que influenciaram na resolução de questões extraídas de livros didáticos de matemática para o último ano do Ensino Fundamental e para o 1º ano do Ensino Médio. As questões subtendem usos da fórmula ora para calcular, ora para operar com grandezas e envolvem operações com letras assumindo o papel de incógnitas ou variáveis, nelas estão envolvidos conhecimento de vários campos conceituais.

2. Fundamentação Teórica

Neste texto, adotamos a abordagem da área enquanto grandeza (DOUADY e PERRIN-GLORIAN, 1989) segundo os quais é necessário distinguir três quadros: o geométrico, o da grandeza e o numérico. Em Bellemain e Lima (2002), é acrescentado: o quadro algébrico – funcional. Esses autores reforçam como hipóteses didáticas básicas que no ensino das grandezas geométricas é necessário distinguir e articular os quadros supracitados e defendem que as fórmulas são componentes do quadro algébrico funcional. Adotamos também as fórmulas de área e perímetro, como representações simbólicas das relações entre as grandezas geométricas, comprimento e área, que permitem exprimir as relações de dependência entre os comprimentos que caracterizam as superfícies usuais (BALTAR, 1996), podendo ser usadas para vários fins. Teles (2007) apoiando-se nos estudos de Baltar (1996), construiu categorias de uso para as fórmulas de área: calcular a área de figuras; calcular comprimentos que caracterizam a

figura; comparar áreas de figuras; produzir figuras em condições dadas; estabelecer relações entre grandezas; otimizar e operar com grandezas de mesma natureza.

A expressão “*fórmula de área*” suscita várias idéias. Ao compreender a fórmula como uma representação simbólica, a relacionamos ao campo algébrico, e ao mesmo tempo ao funcional, pois expressa uma relação entre as grandezas comprimento e área. Por outro lado, a expressão “*figuras geométricas planas*” leva-nos a pensar no campo conceitual da geometria do qual fazem parte as figuras planas. Mas ainda podemos pensar no que se obtém através das fórmulas, na maioria das vezes números resultantes de operações, levando-nos a pensar também no campo conceitual numérico.

Ao questionarmos qual a contribuição, do ponto de vista didático e cognitivo, de cada um destes campos conceituais para o estudo das fórmulas de área de figuras geométricas planas, nos apoiamos nas idéias de Vergnaud (1990), segundo as quais um objetivo prioritário na pesquisa didática é investigar, analisar e classificar, tão exaustivamente quanto possível, as situações-problema que conferem significação e função a um conceito. Além disso, é um trabalho do pesquisador desvendar as conceitualizações subjacentes às condutas dos alunos, aos procedimentos que utilizam, aos erros que cometem. Isto permite, em primeiro lugar, recorrer no ensino a uma maior variedade de relações e problemas; em segundo lugar, aprofundar sua epistemologia e principalmente identificar a sua função (a que problemas responde) e a sua radicação (em quais outros conceitos se apoia), para compreender o desenvolvimento e a apropriação do conhecimento.

Neste artigo discutimos especificamente aspectos relacionados aos conhecimentos do campo conceitual algébrico que influenciam na resolução de situações que envolvem fórmulas de área de figuras planas.

Algumas visões coerentes e complementares têm sido formuladas em torno do Campo Conceitual Algébrico. Para Lins e Gimenez (1997), a álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdades e desigualdades. Segundo Garcia (1997), a álgebra revoluciona por ser uma ferramenta a serviço da resolução de problemas e ser um objeto matemático em si, um ramo autônomo das Matemáticas, de que todas as disciplinas científicas se nutrem para estabelecer melhores e mais cômodas vias de comunicação entre elas e com o exterior.

Segundo Souza e Diniz (1996), a álgebra é a linguagem da Matemática utilizada para expressar fatos genéricos. Como toda linguagem, a álgebra possui seus símbolos e suas regras. Estes símbolos são as letras e os sinais da aritmética, enquanto as regras são as mesmas regras da aritmética que nos permitem manipular os símbolos assegurando o que é permitido e o que não é.

A álgebra, segundo diversos estudos em Educação Matemática, apresenta várias dimensões, entre elas a dimensão funcional, que se relaciona à nossa problemática, onde as letras são utilizadas para expressar relações entre grandezas ou quantidades, assumindo o papel de variáveis. O aspecto funcional é citado nos PCNs (BRASIL, 1998) no desenvolvimento de conteúdos referentes à geometria e a grandezas e medidas, onde os alunos terão oportunidades de identificar regularidades, fazer generalizações, aperfeiçoar a linguagem algébrica e obter fórmulas, como para áreas.

Há também a dimensão interpretativa e procedimental, onde as letras assumem o papel de representar simbolicamente, através de uma equação, situações envolvendo um ou mais valores desconhecidos para, em seguida, simplificá-las e resolvê-las, neste caso são incógnitas.

Dada a complexidade deste campo conceitual, para Da Rocha Falcão (1997), a tarefa global de resolução de um problema algébrico pode ser decomposta, para fins de análise, em quatro etapas:

- 1 – Mapeamento do problema;
- 2 – Escrita algébrica (colocação do problema em equação);
- 3 – Procedimento de resolução (cálculo algébrico no senso estrito);
- 4 – Retomada do sentido (formulação da resposta final).

Ainda segundo Da Rocha Falcão (1997), o trabalho em quatro etapas não reproduz necessariamente a abordagem proposta para a introdução à álgebra na maioria dos currículos escolares. Para ele, a abordagem da álgebra num contexto que respeite as etapas acima descritas favorece a exploração integrada das várias vertentes deste complexo campo conceitual, como por exemplo: conceitos de variável e parâmetro, fórmula e equação; aritmética e álgebra.

Conforme Meira (2003) é preciso também, diversificar as situações de uso da álgebra como ferramenta de modelagem e resolução de problemas. Neste contexto, o estudo das

fórmulas cria situações para aprendizagem da álgebra, tais como grandezas e medidas gerando expressões algébricas, identidades e operações com expressões algébricas; ou vice - versa a álgebra cria situações para aprendizagem da geometria, por exemplo, o cálculo do perímetro do retângulo em função dos comprimentos dos lados; ou da área do retângulo em função dos comprimentos dos lados.

Especificamente nos propomos a analisar aspectos relacionados às etapas para resolução de um problema algébrico, tais como procedimentos corretos e errôneos no mapeamento do problema; conhecimentos mobilizados para colocação do problema em forma de equação, ou seja, para escrita algébrica; procedimentos de resolução e formulação da resposta final nestas situações.

3. Procedimentos Metodológicos

Com objetivo mais amplo de estudar imbricações entre campos conceituais em situações envolvendo fórmulas de área de figuras geométricas planas, elaboramos, após vários estudos teóricos e empíricos testes diagnósticos que foram aplicados para 259 alunos do 2º ano do Ensino Médio de 5 escolas da Região Metropolitana de Recife – PE, contemplando três redes de ensino: pública estadual, pública federal e privada. Foram elaborados cinco testes diferentes, cada um com quatro questões, sendo a primeira questão idêntica para todos os testes e as outras três seguindo uma lógica relacionada às imbricações entre os campos conceituais, refletida no tipo de uso da fórmula em cada questão. As fórmulas nunca eram fornecidas na questão. Os testes tiveram como objetivo caracterizar os conhecimentos oriundos dos diversos campos conceituais subjacentes aos procedimentos de resolução nas situações e mapear, sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990), situações, invariantes operatórios e representações simbólicas referentes à fórmula de área destas figuras.

Neste trabalho analisamos aspectos relacionados ao campo conceitual algébrico em três questões, utilizadas no teste diagnóstico:

1) Questão 3 do Teste 2 (Q3 –T2):

Extraída de um livro didático, coloca em jogo as seguintes variáveis e seus respectivos valores: uso da fórmula para calcular; tipo de figura quadrado e triângulo; presença da figura no enunciado; natureza dos dados – letras assumindo o papel de incógnitas; domínio numérico do resultado – natural; operações em jogo: operações com letras, ou

seja, algébricas; contexto intramatemático. Esta questão envolve as áreas do quadrado e do triângulo, sendo necessário igualar as áreas, escrevendo uma expressão algébrica, resolver esta expressão e interpretar os resultados obtidos:

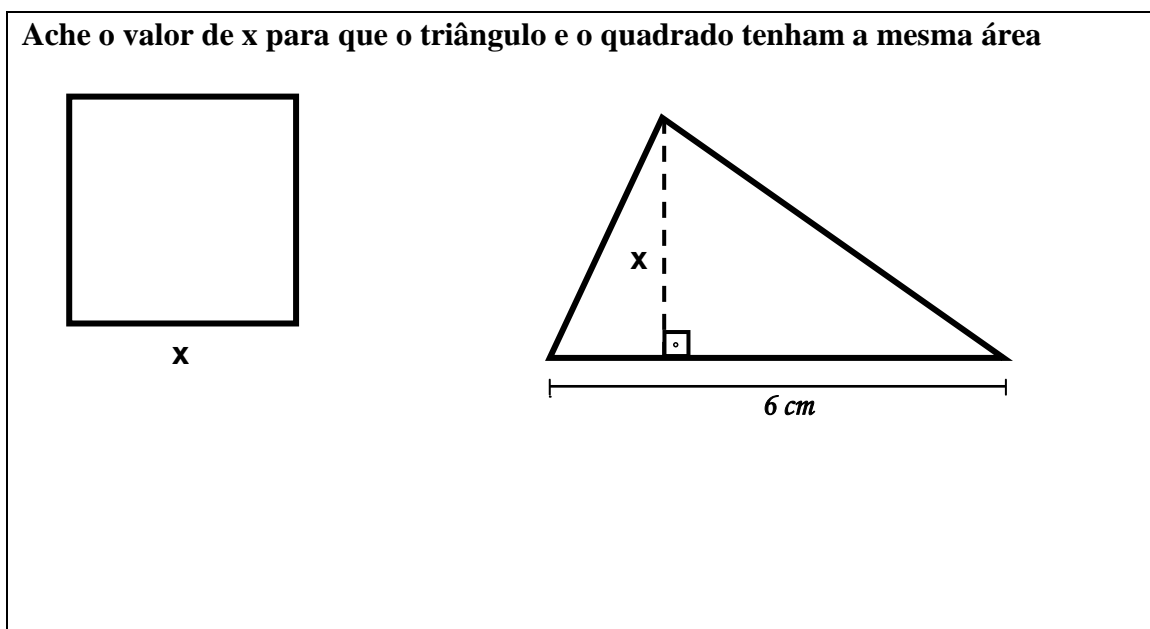


FIGURA 1: Q3 –T2

FONTE: PIRES, Célia Carolino, CURI, Edda e PIETROPAOLO, Ruy. Educação Matemática. 1ª Edição. São Paulo: Atual, 2002. 8ª série, pág. 118.

Nesta questão podemos identificar aspectos relacionados aos diversos campos conceituais. Do campo geométrico: identificação das figuras geométricas planas: quadrado e triângulo, e suas respectivas propriedades geométricas: no quadrado 4 lados iguais; no triângulo a identificação da altura correspondente a um lado tomado como base. Do campo das grandezas: mobilização da fórmula da área do quadrado e do triângulo; há implícita uma relação importante sobre invariância da área: “figuras diferentes podem ter a mesma área” e do campo algébrico modelização e resolução da expressão algébrica que compara as áreas do quadrado e do triângulo. Neste caso intervém a dimensão interpretativa e procedimental da álgebra.

2) Questão 3 do Teste 3 (Q3 – T3):

Também extraída de um livro didático, propõe o cálculo das dimensões do retângulo em função do perímetro e da área. Coloca em jogo as seguintes variáveis e seus respectivos valores: uso da fórmula para calcular; tipo de figura - retângulo; ausência da figura no

enunciado; Domínio numérico - números naturais; Unidade de comprimento – cm e de área cm^2 .

Uma região retangular tem 42 cm de perímetro e 104 cm^2 de área. Quais são as dimensões dessa região retangular?

FIGURA 2: Q3 – T3

FONTE: Dante, Luiz Roberto. Tudo é Matemática. Editora Ática: São Paulo, 2002. 8ª série.

Neste problema o campo algébrico intervém como uma ferramenta a serviço da resolução de problemas (GARCIA, 1997), possibilitando a formulação e a resolução desta questão por meio de equações através de regras para manipulação de símbolos algébricos.

Porém, para escrever a expressão algébrica que poderá conduzir à resposta correta, é preciso também mobilizar conhecimentos do campo das grandezas geométricas: os conceitos de área e perímetro e as relações que podem ser estabelecidas entre eles e ainda conhecimentos do campo geométrico: propriedades do retângulo.

3) Questão 3 do Teste 4 (Q3-T4):

Este é um problema misto, a fórmula é usada para estabelecer relações entre grandezas e também para operar com grandezas de mesma natureza. O tipo de figura é o retângulo; a figura está ausente do enunciado; o domínio numérico dos dados e dos resultados é natural. Com relação à natureza dos dados são números e também letras assumindo o papel de variáveis.

Focaliza o cálculo dos comprimentos dos lados de uma figura em função de variações impostas à área, podendo o aumento dado ser fixo ou variável. Os cálculos são feitos em função da área ou em função das medidas dos comprimentos. Foi baseada numa questão de um livro didático, tendo sido acrescentada a solicitação do item b.

De uma folha de papel retangular de 30 cm por 20 cm são retirados, de seus quatro cantos, quadrados de lado x .

a) Determine a expressão que indica a área da parte que sobrou em função de x ;

b) Qual o valor de x para que a área restante seja igual a 200 cm^2 ?

FIGURA 3: Q3-T4

FONTE: DANTE, Luiz Roberto. Matemática (Ensino Médio). 1ª Edição. São Paulo. Ática, 2004. Volume 1, pág. 117.

Com relação aos conhecimentos requisitados de cada campo conceitual podemos destacar: no campo geométrico, conhecimentos relativos às propriedades do retângulo e do quadrado; no campo das grandezas, conceito de área e fórmula da área do quadrado e do retângulo. No campo algébrico, interpretação do enunciado e escrita de uma expressão algébrica e no campo funcional a escrita de uma regra que relacione a variável x e a medida da área.

A tabela abaixo apresenta a quantidade de alunos que respondeu cada uma das questões, o percentual de acerto, erro e respostas em branco em cada uma delas:

Tabela 1: visão geral do resultado nas três questões

	QUANTIDADE DE ALUNOS QUE RESPONDERAM A QUESTÃO	% DE ACERTO	% DE ERROS	% DE RESPOSTAS EM BRANCO
Q3-T2	54 ALUNOS	48,15	18,52	33,33
Q3-T3	46 ALUNOS	34,78	17,39	47,83
Q3-T4 A (expressão)	60 ALUNOS	28,33	31,67	40,00
Q3-T4 B(valor de x)	60 ALUNOS	26,67	31,67	41,67

A seguir discutimos qualitativamente aspectos relacionados ao campo conceitual algébrico que puderam ser identificados nestas questões.

4. Discussão dos Resultados

4.1. Aspectos Relacionados às Etapas de Resolução de um Problema Algébrico

Alguns aspectos relacionados a procedimentos corretos e errôneos nas etapas de mapeamento do problema; escrita algébrica (colocação do problema em equação); procedimento de resolução (cálculo algébrico no senso estrito) e retomada do sentido (formulação da resposta final), puderam ser identificados nestas situações. Por exemplo, a tabela abaixo mostra, num universo de 46 alunos testados na questão Q3- T3 (*Uma região retangular tem 42 cm de perímetro e 104 cm² de área. Quais são as dimensões dessa região retangular?*- Figura 2) que teve 47,83 % de ausência de resposta, o número de acertos e erros relacionados às etapas para resolução do problema algébrico:

Tabela 2: visão geral do resultado nas etapas para resolução do problema na questão Q3 – T3

Modelagem/escrita algébrica		Resolução		Interpretação	
Certo	Errado	Certo	Errado	Certo	Errado
13	1	9	5	9	5

Com relação à escrita algébrica, a análise dos dados evidenciou que muitos alunos têm dificuldade para expressar simbolicamente uma situação geral, preferindo procedimento numérico pontual e a generalização a partir de um exemplo numérico mesmo em situações de cunho algébrico ou funcional.

Na questão sinalizada acima, 37,5% dos alunos que a responderam utilizaram “procedimento numérico”, procurando por tentativas, pares de números cujo produto seja 104 e a soma 21. Em todos os casos as tentativas restringem-se ao domínio natural.

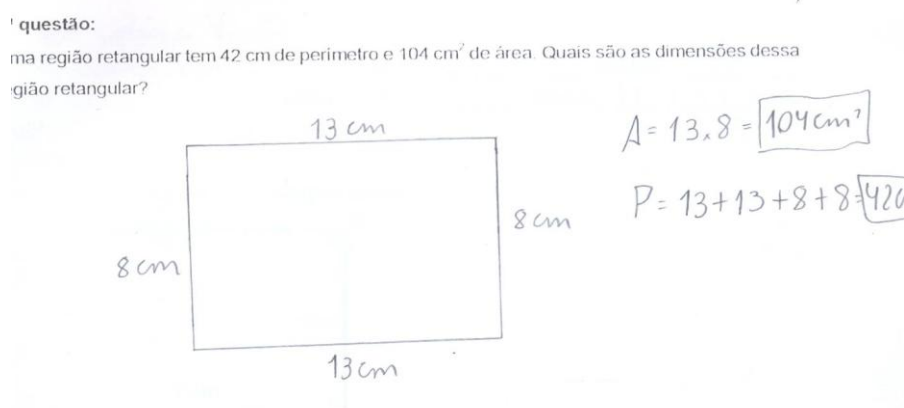


Figura 4. Protocolo 51 – Q3T3G₄

A opção por procedimentos numéricos, nesta questão, coloca em jogo o evitamento de um procedimento geral, baseado em propriedades geométricas e a opção por um procedimento particular e sua conseqüente generalização.

Dentre os erros relacionados à escrita algébrica (modelagem) destacamos no protocolo abaixo a mobilização de conhecimentos corretos do ponto de vista da manipulação simbólica e das operações numéricas, mas obtenção de um resultado errôneo em decorrência de erro no mapeamento do problema. O aluno não considerou a propriedade do retângulo: lados iguais dois a dois, conseqüentemente mobilizou conhecimentos incorretos sobre o cálculo do perímetro da figura.

3ª questão:

Uma região retangular tem 42 cm de perímetro e 104 cm² de área. Quais são as dimensões dessa região retangular?

$$\begin{cases} b+h=42 \\ b \cdot h=104 \end{cases} \quad \begin{cases} b=42-h \\ b \cdot h=104 \end{cases}$$

$$\frac{104+h}{h} = \frac{42}{1}$$

$$\frac{104+h^2}{h} = \frac{42h}{h}$$

$$h^2+104-42h=0$$

$$\Delta=42^2-4 \cdot 104$$

$$\Delta=1348$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ 42 \\ \hline 184 \\ 168 \\ \hline 1764 \\ -416 \\ \hline 1348 \end{array}$$

Figura 5. Protocolo 59 – Q3T3D5

Outro aspecto relacionado à escrita algébrica foi a dificuldade de mobilizar a noção de variável. Na Questão 3 do teste 4 (FIGURA 3): “De uma folha de papel retangular de 30 cm por 20 cm são retirados, de seus quatro cantos, quadrados de lado x. a) Determine a expressão que indica a área da parte que sobrou em função de x; b) Qual o valor de x para que a área restante seja igual a 200 cm²?”, dos 60 alunos testados, apenas 2 mobilizaram a linguagem funcional:

3ª questão:

De uma folha de papel retangular de 30 cm por 20 cm são retirados, de seus quatro cantos, quadrados de lado x.

- Determine a expressão que indica a área da parte que sobrou em função de x;
- Qual o valor de x para que a área restante seja igual a 200 cm²?

$$a) f(x) = 600 \text{ cm}^2 - 4x$$

$$b) 600 \text{ cm}^2 - 4x = 200 \text{ cm}^2 \Rightarrow 600 \text{ cm}^2 - 200 \text{ cm}^2 = 4x \Rightarrow 4x = 400 \text{ cm}^2 \Rightarrow x = \frac{400 \text{ cm}^2}{4} \Rightarrow x = 100 \text{ cm}^2$$

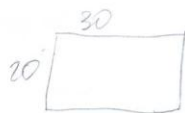


Figura 6. Protocolo 65 – Q3T4O2

A opção por procedimentos numéricos em questões que subtendem um procedimento algébrico mais geral e sofisticado nos inquietou no sentido de refletir sobre os motivos que conduzem os alunos a evitar o procedimento algébrico. Será que não dispõem de

ferramentas conceituais para isto? Em nossa pesquisa foi possível verificar que, em alguns casos o procedimento numérico pode conduzir a respostas corretas, em outros não, principalmente naquelas questões onde o aspecto funcional é mais acentuado.

4.2. Procedimentos Algébricos de Resolução

Na questão 3 do teste 2: “ache o valor de x para que o triângulo e o quadrado tenham a mesma área”, embora alguns alunos tenham resolvido por tentativas numéricas, atribuindo um valor a x e generalizando, outros alunos escreveram uma equação mobilizando a fórmula para calcular área do quadrado e a fórmula para calcular área do triângulo, resolveram a equação e interpretaram a resposta obtida, mobilizando assim as etapas para resolução de um problema algébrico propostas por Da Rocha Falcão (1997).

Dentre os procedimentos de resolução da equação identificamos três estratégias predominantes:

- a) Resolver a equação aplicando a propriedade da equivalência (42,3% das respostas certas obtidas). No protocolo abaixo o aluno explicita a retomada do sentido, ao substituir o valor de x encontrado nas expressões iniciais e conferir que as áreas das figuras quando x vale 3 possuem medidas iguais.

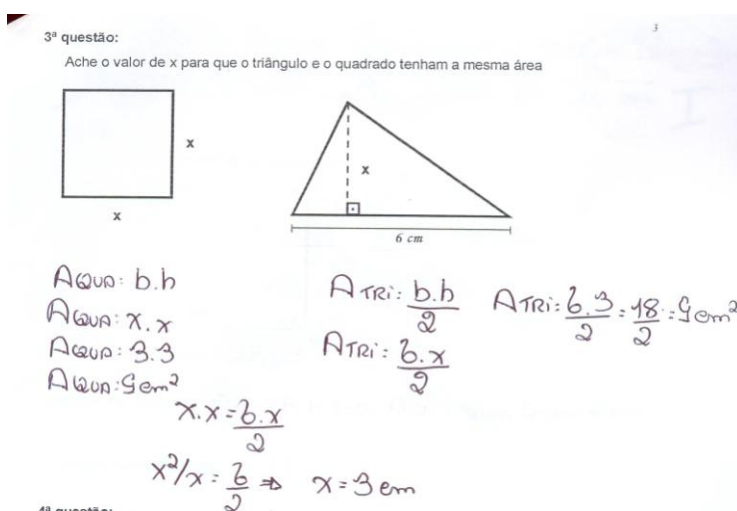


Figura 7. Protocolo 55 – Q3T2I₂

- b) Resolver a equação do 2º grau, utilizando a fórmula de Báskara (19,2% das respostas certas obtidas).

$$x^2 = \frac{6x}{2}$$

$$x^2 = 3x$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1}$$

$$\frac{3 \pm 3}{2} \begin{cases} 3 \\ 0 \end{cases}$$

$$X = 3$$

Figura 8. Protocolo 57 – Q3T2E₅

c) Resolver a equação do 2º grau colocando x em evidência (5,6%), ou seja, fatorando o polinômio:

$$x^2 = \frac{6x}{2} \rightarrow x^2 = 3x \rightarrow x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x-3) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 0 \text{ ou } x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3 \text{ cm}}$$

NÃO PODE V

Figura 9. Protocolo 57 – Q3T2D1

Também foi possível identificar erros de manipulação algébrica, relacionados à aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração. Por exemplo, na questão Q3 do teste 3, identificamos erro na resolução do sistema de equações e erro na multiplicação de um número inteiro por uma fração com denominador literal e também na questão Q3 – T2, o aluno constrói corretamente a expressão algébrica para comparar as áreas, mas erra na resolução da equação.

$$x^2 = \frac{3 \cdot 6 \cdot x}{x}$$

$$2x^2 - 3x = 0$$

$$\Delta = -3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0$$

$$\Delta = 9$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x' = 6 \\ x = 0 \end{cases}$$

6 cm

$$X = 6$$

Figura 10. Protocolo 58 – Q3T2H 4

Considerações Finais

Neste trabalho, discutimos a partir da análise de procedimentos corretos e errôneos em questões extraídas de livros didáticos de matemática, como conhecimentos dos diversos campos conceituais, em especial do campo algébrico, influenciam no mapeamento e escrita algébrica de situações envolvendo fórmulas de área de figuras planas; também como dificuldades que o aluno enfrenta para colocar os problemas em forma de equação, ou seja, escrever simbolicamente, podem estar relacionadas tanto ao campo algébrico quanto ao campo das grandezas geométricas. Identificamos também dificuldades específicas de manipulação simbólica nestas situações associadas ao campo algébrico, mas por outro lado a interpretação dos resultados obtidos supõe a mobilização de conhecimentos conceituais sobre a grandeza área.

Apesar de estudarmos um pequeno recorte do saber matemático, fórmulas de área de figuras geométricas planas, esperamos contribuir para formulação de situações didáticas eficientes do ponto de vista do ensino aprendizagem da Matemática, pois a tese subjacente à Teoria dos Campos Conceituais é a de que a elaboração de situações didáticas potencialmente ricas do ponto de vista da aprendizagem baseia-se necessariamente no conhecimento da dificuldade relativa das tarefas cognitivas, dos obstáculos habitualmente enfrentados, do repertório de procedimentos disponíveis, das representações simbólicas possíveis e dos esquemas formados anteriormente pelo sujeito (VERGNAUD, 1990).

Referências

- BALTAR, Paula Moreira. *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège*. Grenoble, 1996. Tese (Doutorado em Didática da Matemática). Université Joseph Fourier, Grenoble, 1996.
- BELLEMAIN, Paula Moreira Baltar; LIMA, Paulo Figueiredo. *Um estudo da noção de grandeza e implicações no ensino fundamental*. Natal: SBHMat, 2002.
- BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*, Secretaria de Educação Fundamental, Brasília. MEC/SEF, 1998.
- DA ROCHA FALCÃO, Jorge Tarcísio. A Álgebra como Ferramenta de Representação e Resolução de Problemas. In: SCHLIEMANN, Analúcia Dias. *Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. 2.ed. Recife: Ed. UFPE, 1997.

- DOUADY, Regine; PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*. V. 20, n. 4. p. 387-424, 1989.
- GARCIA, Francisco Fernández. Aspectos históricos del paso de la aritmética al álgebra. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Número 14, ano IV, outubro de 1997. Graó, Barcelona, 1997.
- LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI. Campinas: Papirus, 1997.
- MEIRA, Luciano. *Atividade algébrica e produção de significados em matemática*. Boletim TV ESCOLA, maio/2003.
- SOUZA, Eliane Reame; DINIZ, Maria Ignez de S. Vieira. *Álgebra: das Variáveis às Equações e Funções*. São Paulo: IME-USP, 1996.
- TELES, Rosinalda Aurora de Melo. *Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas*. Tese de Doutorado em Educação. UFPE, 2007.
- VERGNAUD, Gérard. La théorie des champs conceptuels. *Recherches em Didactique des Mathématiques – RDM*, v. 10, n° 2, 3. Grenoble, 1990. p. 133 – 170.