Uma matemática para o ensino de combinação simples a partir de um estudo do conceito com professores

A Mathematics for simple combination teaching from a study of the concepts with teachers.

JEAN LÁZARO DA ENCARNAÇÃO COUTINHO[1]
JONEI CERQUEIRA BARBOSA[2]

Resumo

Neste artigo, buscamos modelar uma Matemática para o Ensino de combinação simples a partir do Estudo do Conceito realizado com um grupo de professores. Para tanto, foi elaborado um estudo coletivo com professores atuantes nos níveis fundamental, médio e/ou superior com experiência no ensino de Análise Combinatória, no intuito de identificar formas de comunicar o conceito de combinação simples que utilizavam na comunicação desse tema. Foram identificados quatro panoramas de análise: formalista; instrumental; ilustrativo e comparativo. O estudo sugere um modelo que apresenta potencialidades para a formação de professores e para outras pesquisas no campo da Educação Matemática.

Palavras-chave: *Matemática para o Ensino; Estudo do Conceito; Combinação Simples.*

Abstract

In this article, we propose one Mathematical for Teaching of simple combination, having as base a Concept Study performed with a group of teachers. In favor of that, we have elaborated a collective study with teachers from primary, secondary and/or higher education who had experience in teaching Combinatory Analysis, aiming to identify, in their actions, any forms of communicating the concept of simple combination in situations in which they were teaching this subject. We have identified four landscapes of analysis: formalist, instrumental, illustrative, and comparative. This study suggests a model that presents potentialities for the teacher training and other possible investigations in Mathematics Education.

Keywords: *Mathematics for teaching; Concept Study; Simple Combination.*

Introdução

[1] Instituto Federal da Bahia – jeancoutinho@ifba.edu.br

[2] Universidade Federal da Bahia – jonei.cerqueira@ufba.br

Segundo Morgado et al. (1991), a Análise Combinatória (AC) é um ramo em Matemática que estuda as estruturas e relações discretas, ocupando-se da existência e da contagem de subconjuntos de conjuntos finitos que satisfazem determinadas condições. Nessa contagem, não há necessidade de listar ou enumerar todos os elementos que compõem o referido subconjunto (PESSOA; BORBA, 2009). No Ensino Básico, essas estratégias de contagem são discutidas em termos de produto cartesiano, permutações simples, arranjos simples e *combinações simples*.

Estudos indicam que AC é um importante conteúdo a ser ensinado e aprendido em Matemática, pelo seu significado em práticas profissionais em outras áreas do conhecimento (Computação, Estatística, Genética, Engenharia, Gestão Empresarial), no cotidiano (MORO; SOARES, 2006; GROENWALD; ZOCH NETO; HOMA, 2009) e na própria Matemática (FERNANDES; CARVALHO; CARVALHO, 2010; AZEVEDO; BORBA, 2013). A AC apresenta-se como um dos ramos de maior complexidade para os alunos (GROENWALD; ZOCH NETO; HOMA, 2009). Essa problemática pode ter origem na forma com que ela vem sendo comumente abordada, e o que se vê, na maioria das vezes, são tentativas de enquadramento dos exercícios ou problemas em fórmulas e, em muitas vezes, de maneira inadequada (PESSOA; BORBA, 2010).

Entre todos os tipos de problemas de AC discutidos no Ensino Básico, os que envolvem o conceito[3] de *combinação simples* se evidenciam como os mais problemáticos em sua abordagem (ALVES; SEGADAS, 2012; PESSOA; BORBA, 2010; CORREA; OLIVEIRA, 2011). Uma das maiores dificuldades é encontrar formas de diferenciar as *combinações* dos *arranjos*, pois as mudanças na ordenação dos elementos nas *combinações* não geram novas possibilidades (PESSOA; BORBA, 2009; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013). Inicialmente, essas constatações nos despertaram os seguintes questionamentos: O que os professores mobilizam do conceito de *combinação simples* no ensino? Há algo específico nessa ação?

Tais especificidades na ação do professor ao ensinar algum conceito em Matemática vêm sendo discutidas amplamente em termos de Matemática para o Ensino[4], as quais reconhecem a existência de uma Matemática mobilizada especificamente por professores ao ensinar – o que inclui abordagem de conceitos matemáticos – que se diferencia da Matemática mobilizada por outros profissionais (ADLER, 2005; DAVIS; SIMMT, 2006;

[3] Mais adiante explicaremos o que entendemos por conceito matemático. Neste momento, leiam de forma intuitiva.

[4] Faremos uma maior discussão ao longo do texto.

DAVIS; RENERT, 2009, 2012; RIBEIRO, 2012). Como um exemplo dessa diferença, Ribeiro (2012) destaca a prática de matemáticos e de professores de Matemática. Embora ambos, por exemplo, precisem realizar análises de erros matemáticos, o foco no fazer do professor são os erros produzidos por outros, nesse caso, os alunos (RIBEIRO, 2012).

Entendemos que essa especificidade também perpassa pela variabilidade de formas de comunicar das quais o professor se utiliza no ensino de um determinado conceito. Embora não se refira à Matemática para o Ensino, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) recomendam as diversas possibilidades na comunicação em sala de aula pelo fazer do professor. O reconhecimento dessa heterogeneidade possibilita ao docente sustentar suas tomadas de decisões quanto a que caminhos e estratégias adotarem frente ao ensino (RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2014; RIBEIRO, 2013). No que se refere à AC, Pessoa e Borba (2010) e Fernandes, Carvalho e Carvalho (2010) corroboram o reconhecimento dessa variabilidade, quando sublinham a solução de problemas combinatórios por meio de diferentes formas.

Tomando o conceito de *combinação simples*, percebemos essa variabilidade na literatura, onde tal conceito é comunicado por meio de diagrama de árvores (PESSOA; BORBA, 2010; BORBA; PESSOA; ROCHA, 2013; AZEVEDO; BORBA, 2013), fórmula (LANDÍN; SANCHEZ, 2010; PESSOA; BORBA, 2010; ALVES; SEGADAS, 2012; SANTOS-WAGNER, BORTOLOTI; FERREIRA, 2013), tabela e desenho (SERRAZINA; RIBEIRO, 2012), listagem (PESSOA; BORBA, 2009; SERRAZINA; RIBEIRO, 2012), manipulação de objetos (GROENWALD; ZOCH NETO; HOMA, 2009) ou, ainda, sendo comparado aos *arranjos* (PESSOA; BORBA, 2010; BORBA, PESSOA; ROCHA, 2013).

Diante do exposto, nosso interesse neste estudo é mapear, a partir de uma investigação com professores, as diversas formas com as quais eles comunicam o conceito de *combinação simples* em sua tarefa de ensinar. Com o intuito de apresentar o nosso objetivo em termos mais específicos, faremos uma discussão sobre o que concebemos como Matemática para o Ensino e uma das formas – o Estudo do Conceito – que pode ser utilizada para modelá-la.

Matemática para o ensino e o estudo do conceito

Como mencionado anteriormente, a forma pela qual um professor faz uso da Matemática no ensino difere da forma como outros profissionais a utilizam em suas respectivas tarefas (ADLER, 2005; ADLER et al., 2005; BEDNARZ; PROULX, 2009; RIBEIRO, 2012). Essa especificidade que permeia a tarefa de ensinar do professor de Matemática vem sendo discutida em termos de Matemática para o Ensino (ADLER, 2005; DAVIS; SIMMT, 2006; DAVIS; RENERT, 2009, 2012, 2014).

Adler et al. (2005) marcam a Matemática para o Ensino como uma Matemática que, por característica própria, é produzida na prática de ensino e nela utilizada. Davis, Adler e Parker (2007), Bednarz e Proulx (2009) e Rangel, Giraldo e Maculan (2014) também reconheceram em seus trabalhos que existem especificidades para o ensino de Matemática e que contextos diferentes podem produzir diferentes Matemáticas para o Ensino, pois elas emergem com o trabalho pedagógico, no fazer do professor.

Segundo Davis e Renert (2014), Matemática para o Ensino está pautada na forma como o professor organiza as ações que compõem sua tarefa de ensinar, por exemplo, a organização e execução de uma aula. Assumiremos Matemática para o Ensino neste estudo como a Matemática específica que o professor mobiliza na sua tarefa de ensinar. Além disso, lançamos como proposta modelá-la teoricamente, ou seja, apresentá-la de forma sistematizada de modo que possamos identificar sua diversidade de *realizações*. Essas especificidades – aqui reconhecidas como Matemática para o Ensino – vêm sendo estudadas de formas variadas e em contextos variados (DAVIS; ADLER; PARKER, 2007), por exemplo, no estudo com professores.

Davis e Simmt (2006) e Davis e Renert (2009, 2012, 2014) propõem uma abordagem investigativa para suscitar tal Matemática para o Ensino, sustentada nas reflexões coletivas de professores. Essa abordagem investigativa é denominada de Estudo do Conceito (EC) (DAVIS; SIMMT, 2006; DAVIS; RENERT, 2009, 2012, 2014). Para eles, o EC pode ser visto como uma estrutura de colaboração em que professores interagem apresentando, interpretando, confrontando, elaborando e reelaborando seus entendimentos sobre um determinado conceito matemático selecionado por algum motivo.

O EC está estruturado em quatro ênfases principais: *realizations (realizações); landscapes (panoramas); entailments (vinculações); blends (misturas)*[5] (DAVIS; RENERT, 2012, 2014). Segundo eles, a opção pelo termo ênfase é atribuída ao fato de

[5] A ênfase *misturas* não se manifestou em nosso estudo, por isso não a discutiremos aqui.

evitar uma hierarquia dos elementos presentes no EC, marcando possíveis simultaneidades entre eles. Caracterizaremos, a seguir, cada ênfase proposta neste trabalho, tomando por base os estudos de Davis e Renert (2009, 2014) e Davis (2012) com o conceito de multiplicação. Também tomaremos o estudo de Rangel, Giraldo e Maculan (2014), os quais utilizaram a abordagem, para discutir o conceito de números racionais com um grupo de professores.

As *realizações* podem ser descritas como as diversas formas, por exemplo, definições, algoritmos, metáforas, imagens, aplicações, gestos, entre outros, que o professor utiliza para comunicar um determinado conceito matemático (DAVIS, 2012; DAVIS; RENERT, 2014). Para os mesmos autores, as *realizações* não são fixas, podendo variar com grupos diferentes ou com a evolução do processo de compartilhamento; não são nem certas nem erradas, mas emergentes de um entendimento pessoal que surge na própria tarefa de ensinar. Vale a pena ressaltar que, ainda assim, existe uma estabilidade, um núcleo comum de *realizações* mobilizado por professores.

Os *panoramas* são estruturas interpretativas maiores, obtidas da lista de *realizações* (DAVIS; RENERT, 2009, 2014). Essas estruturas são entendidas aqui como as relações existentes entre as *realizações* que apresentam características semelhantes. Sintetizando, “o *panorama* é uma visão de macro nível, ao passo que uma *realização* é uma visão de micro nível, de um conceito” (DAVIS; RENERT, 2014, p. 62, tradução nossa).

A ênfase *vinculações* busca identificar, descrever e refletir sobre as diferentes implicações e relevâncias imbricadas em cada uma das *realizações* de um determinado conceito (DAVIS; RENERT, 2009, 2014; DAVIS, 2012). No trabalho de Davis (2012), a intenção dessa ênfase, por exemplo, é examinar as possibilidades de entendimento da multiplicação como uma adição repetida.

Apesar da identificação de elementos que buscam caracterizar cada ênfase, é perceptível, na estrutura metodológica do EC, uma abertura interpretativa para as ênfases *panoramas* e *vinculações*. A constatação surge da própria análise dos autores que afirmam: “apenas a primeira ênfase poderia ser descrita como intencional em qualquer sentido estrutural. As outras são emergentes – inesperadas, não planejadas, decorrentes da partilha de interesses, saberes divergentes, e encontros acidentais” (DAVIS; RENERT, 2009, p. 38, tradução nossa).

Uma vez que apresentamos o EC, passamos agora a delimitar o nosso entendimento de “conceito matemático” neste estudo, para que os dados coletados e analisados como formas de comunicar o conceito de *combinação simples* fiquem claros. Tomaremos a definição de conceito matemático como uma combinação da palavra que indica o tema em discussão e seus símbolos, imagens, metáforas, analogias e outros recursos textuais reconhecidos como parte da Matemática (DAVIS; RENERT, 2009), ou seja, é a reunião da palavra que indica o tema a ser discutido e todas as suas *realizações*. Portanto, o conceito matemático, ele mesmo, constitui-se na comunicação realizada e atrelada à palavra que o nomeia.

Considerando a discussão delineada até este ponto em temos de especificidades na tarefa de ensinar do professor – apresentadas como Matemática para o Ensino – e da variabilidade de formas de comunicar um conceito nessa tarefa e suas implicações – suscitadas a partir da estrutura do EC – podemos enunciar o nosso objetivo: modelar uma Matemática para o Ensino de *combinação simples* a partir do EC realizado com um grupo de professores. Este estudo – e, por consequência, seu modelo – justifica-se pelo fato de servir como subsídio para professores que ensinam AC, mais precisamente *combinação simples*, bem como para processos de formação de professores sobre esse conceito. Além disto, a elaboração do modelo supracitado pode fornecer à área da Educação Matemática elementos para o desenvolvimento de estudos futuros sobre o ensino e aprendizagem do conceito de *combinação simples*.

Procedimentos metodológicos

Para a produção, coleta, categorização e análise de dados, utilizamos a estrutura do EC (DAVIS; SIMMT, 2006; DAVIS; RENERT, 2009, 2012, 2014; DAVIS, 2012; RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2014), em que a Matemática que o professor mobiliza foi capturada por tal estrutura. Para os mesmos autores, essa é uma estrutura colaborativa que envolve professores convidados a analisar e elaborar entendimentos sobre um determinado conceito.

Assim, focalizamos um grupo de professores trabalhando coletivamente, de maneira que, na interação entre/com eles possamos identificar a variabilidade de formas do conceito de *combinação simples*. No EC, o papel do pesquisador consiste em "estruturar as tarefas que são significativas e apropriadas para os participantes e organizar ambientes de modo a permitir que os participantes e suas ideias possam interagir" (DAVIS; SIMMT, 2006, p. 300, tradução nossa). Seguindo essa orientação, conduzimos os encontros estruturando e propondo atividades, que tinham como tema o conceito de *combinações simples* como: elaborações e resoluções de problemas; elaboração de listas indicando metáforas, interpretações, analogias que comunicassem o conceito; elaboração de planos de aulas e apresentação de aulas.

Como ponto de partida para nossas discussões no grupo, utilizamos alguns problemas de *combinação simples* com o intuito de que o nome do conceito aparecesse. A partir daí lançamos a pergunta diretriz: *O que é combinação?* Diante das respostas, que foram interpretadas como a ênfase das *realizações,* deu-se início à construção da lista pelos pesquisadores. O nosso papel foi incentivar os professores a explicitarem mais este conceito com perguntas do tipo: *O que mais? E daí? Como vocês falam sobre isso para os alunos? E quando eles não entendem quais estratégias vocês usam?*

Essas primeiras atividades foram as únicas pré-definidas, pois, como já foi dito, no EC apenas a primeira ênfase, *realizações*, pode ser estruturada intencionalmente. Para o registro das informações, utilizamos o diário de anotações dos pesquisadores, recolhimento de todo o material escrito produzido pelos participantes e o procedimento de gravações audiovisuais para posteriores análises. Essas gravações permitiram registrar ações dos participantes da pesquisa que não foram percebidas durante o processo. Além disso, foi solicitado que os participantes respondessem a um questionário[6] com intuito de melhor caracterizá-los.

Seguindo os pressupostos do EC, após a coleta das informações, a análise foi feita a partir da identificação e discussão de três ênfases[7]: *realizações*, *panoramas* e *vinculações.* Por fim, apresentamos uma Matemática para o Ensino de *combinação simples* a partir de um EC.

O contexto e os participantes da pesquisa

Esta pesquisa teve como contexto de coleta e dados um grupo de professores que atuam nos níveis fundamental, médio e superior da cidade de Barreiras, localizada no Estado da Bahia. O grupo foi formado a partir de um curso de extensão promovido pelo primeiro autor deste artigo no *campus* do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA) da referida cidade.

A formação do grupo por seus sujeitos levou em consideração critérios como: (1) todos eram professores de Matemática que tinham experiência no ensino de AC; (2) a heterogeneidade dos contextos onde trabalhavam/trabalharam – no nosso caso, foram

---

[6] Listas de perguntas a serem respondidas pelos participantes do estudo (ROSA, 2010).

[7] Como dito anteriormente, a ênfase *misturas* não foi identificada neste estudo.

escolhidos professores que atuassem em diferentes níveis de ensino; (3) tempos de docência diferentes. O grupo foi convidado a refletir coletivamente sobre o conceito de *combinação* em AC. O convite para o curso de extensão se estendeu à comunidade de professores do próprio IFBA e de outras escolas, municipais e estaduais, que ofertavam Ensino Fundamental e Médio.

O curso teve carga horária total de oitenta horas, divididas em quarenta horas de atividades presenciais e quarenta horas de atividades não presenciais. O grupo contou com a participação de seis[8] professores, sendo um licenciando, os quais estão caracterizados no Quadro 1. No início do primeiro encontro, houve a apresentação da proposta, a consulta sobre a possibilidade de utilizarmos as informações geradas durante os encontros em pesquisa científica, o pedido de permissão para as gravações audiovisuais e o preenchimento do questionário de caracterização do participante. Após concordância, todos eles assinaram Termo de Consentimento Livre e Declarado, e optaram pela utilização de pseudônimos na escrita do relatório de pesquisa.

Quadro 1 - Perfil dos professores participantes

IDENTIFICAÇÃO	FORMAÇÃO INICIAL	TEMPO DE DOCÊNCIA	NÍVEL DE ATUAÇÃO EM QUE TRABALHA OU TRABALHOU COM AC
Professor Alberto	Licenciatura em Matemática	32 anos	Fundamental
Professor Biano	Licenciatura em Matemática	15 anos	Médio
Professora Carla	Licenciatura em Matemática	12 anos	Médio e Superior
Professor Diogo	Licenciatura em Matemática	13 anos	Fundamental, Médio e Superior
Professora Elba	Licenciatura em Matemática	15 anos	Fundamental e Médio
Professor Fausto	Licenciatura em Matemática (em curso)	06 meses	Médio

Fonte: Elaborado pelos autores, 2015

Os dois primeiros encontros tiveram como propósito preparar o ambiente para o EC. Os participantes foram convidados a apresentar suas formas de entender AC, que culminou em discussões em torno das problemáticas no seu ensino. A maioria dos professores já evidenciava que uma das maiores problemáticas está em apresentar ao aluno os diferentes conceitos de AC. Com a concordância de todos, ficou definido que o nosso foco seria o conceito de *combinação simples*.

[8] Inscritos efetivamente no curso e que se dispuseram em participar da pesquisa.

Esses dois encontros iniciais já indicavam que os professores estavam bastante à vontade no ambiente e eram receptíveis às potencialidades das discussões e reflexões coletivas, fundamentais para a estrutura metodológica escolhida. Dessa forma, entendemos que o ambiente se encontrava pronto para o início do EC, que ocorreu a partir do terceiro encontro. Seguimos os pressupostos da nossa abordagem metodológica, gerando as informações que transformamos em dados e submetemos à análise, as quais serão apresentadas e discutidas na próxima seção.

As ênfases do nosso estudo do conceito

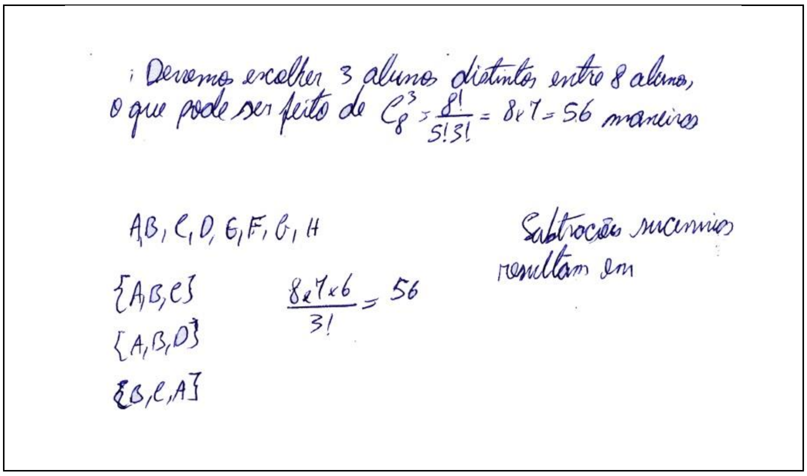
Como dito anteriormente, das quatro ênfases atribuídas ao Estudo do Conceito (EC) (DAVIS; RENERT, 2009, 2014), conseguimos identificar três no nosso estudo: *realizações*, *panoramas* e *vinculações*. Embora não tenha ocorrido uma sucessão temporal linear entre as ênfases – algumas *realizações*, por exemplo, emergiram nos últimos encontros – nós as analisaremos em dois grandes blocos, buscando as possíveis conexões entre elas. Referente à temporalidade não linear, a situação corrobora o ponto sublinhado por Davis e Renert (2012, 2014) e Rangel, Giraldo e Maculan (2014), de que as ênfases não são hierárquicas e podem ocorrer simultaneamente.

O início do estudo

No terceiro encontro, com o intuito de lançar a pergunta diretriz (DAVIS; SIMMT, 2006; DAVIS; RENERT, 2009) para o início do EC, convidamos os participantes a buscarem solução do seguinte problema: Em uma sala de aula há 8 alunos. De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos 3 alunos para representar a turma?

Durante as discussões com o intuito de resolver o problema proposto em que uma variabilidade de *realizações* já emergia, o professor Fausto foi convidado a apresentar sua solução na lousa (Figura 1), para o que contou com a participação dos demais.

Figura 1 – Solução do professor Fausto para o problema motivador


; Devemos escolher 3 alunos distintos entre 8 alunos, o que pode ser feito de $C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = 8\times7 = 56$ maneiras

A, B, C, D, E, F, G, H

{A, B, C}

{A, B, D}

{B, C, A}

$\frac{8\times7\times6}{3!} = 56$

Subtrações sucessivas resultam em

Fonte: Registros escritos do Professor Fausto, 2015

Em sua apresentação, ele explicou: "*O que eu estou fazendo na questão é pegando um conjunto de 8 elementos e pegando 3 elementos lá de dentro*". A visualização da solução e a fala do professor já nos permitia perceber o aparecimento das noções de *combinação simples* e suas primeiras formas de *realizações.* O grupo evidenciou que o problema poderia ser resolvido de várias maneiras, o que referenciava a existência de outras formas de *realizações.* Nessas discussões, a seguinte intervenção nos permitiu lançar a pergunta diretriz.

> Professor Diogo: Como nesse caso aqui ele diz que você tem lá: quantas maneiras diferentes eu posso escolher 3. Aí, você tem 8, 7, 6 (multiplicação). Porém, se eu pegar esses 3 aqui ou esses 3 aqui (indicando os subconjuntos {A, B, C} e {B, C, A}) não vai fazer diferença na formação do grupo. E é aí, como não tem diferença, você tem que lembrar de fazer a divisão pela permutação dos 3. Que é o caso que depois vai se definir a combinação.

Com a explicação do professor Diogo, indagamos o professor Fausto sobre a fórmula que havia sido utilizada na solução e sua resposta foi de que se tratava da fórmula de *combinação simples.* Nesse momento, lançamos a pergunta diretriz para o grupo: "O que é *combinação*?". As respostas iniciais foram pautadas na definição formal, na construção de subconjuntos. Essas manifestações são chamadas por Davis e Renert (2009) de definições bem ensaiadas.

Como nosso intuito era ampliar entendimentos e mapear as diversas formas que podemos utilizar para comunicar o conceito de *combinação simples*, elaboramos algumas atividades e solicitamos outras dos professores participantes. Dentre essas atividades – que contou com resoluções de problemas, elaboração e execução de uma proposta de aula – requisitamos a elaboração de uma lista com todas as possíveis maneiras que retratassem como esse conceito era introduzido, retomado, aplicado, e/ou elaborado no nível de ensino em que cada um atuava.

A análise de todas essas atividades teve como resultado uma lista – elaborada pelos autores – que chamamos de *realizações* do conceito de *combinação simples* a ser apresentada na próxima seção. Essas *realizações* foram caracterizadas em termos de descrições, exemplificações, convergências, implicações e relevâncias – que nos permitiram configurar os *panoramas* e *vinculações*, ao longo dos encontros.

Realizações

Retomando as *realizações* como as diversas formas de que o professor se utiliza para comunicar certo conceito matemático na sua tarefa de ensinar (DAVIS; RENERT, 2009, 2014), iniciamos seu processo de identificação no contexto coletivo com professores. Como Davis e Renert (2012), nosso interesse é analisar a *realização* como ela emerge das tarefas de cada professor e na interação com seus pares.

Não tivemos o intuito de elaborar julgamento de certo ou errado para cada *realização* e à medida que cada *realização* era identificada, discussões em torno de suas implicações, potencialidades e limitações eram elaboradas. Essas discussões realizadas coletivamente apresentaram um bom entrosamento entre os participantes, requisito necessário para o EC. Além disso, a heterogeneidade dos componentes, principalmente no quesito nível de ensino em que atua, contribuiu para discussões bastante produtivas. A lista construída a partir de nossas análises das atividades desenvolvidas no curso é apresentada no Quadro 2.

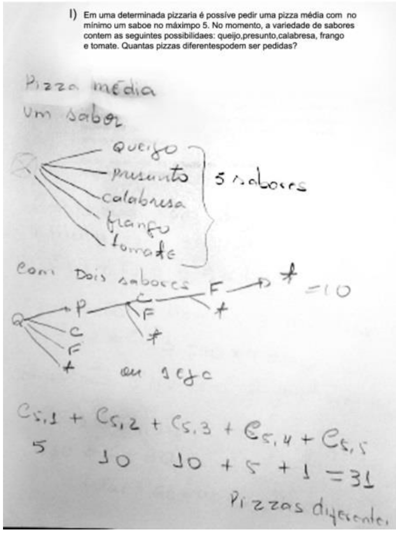
Quadro 2 – Lista de realizações resultante das análises.

1) Diagrama de árvores.
2) Definição formal.
3) Listagem dos agrupamentos.
4) Fórmula.
5) Ordenação irrelevante dos elementos.
6) Contagem dos agrupamentos usando modelos concretos.
7) Comparação com arranjo.

Fonte: Elaborada pelos autores, 2015.

Os diagramas de árvore apareceram em diversos momentos durante as sessões com os professores. Como ilustração, trazemos a solução (Figura 2) de um problema proposto por um dos participantes. Observamos que a utilização do diagrama pela professora Elba é feita no intuito de organizar e ilustrar os agrupamentos que ele está considerando como solução.

Figura 2 – Realização: diagrama de árvores.



Fonte: Registros da Professora Elba, 2015.

Os professores ainda enfatizaram que defendem a introdução ao conceito, utilizando o diagrama de árvores por tornar a solução mais clara:

> Professor Fausto: Porque é algo mais claro. Quando você vai começar, você vai começar com problemas que envolvem valores pequenos. Então, você começa desenhando (diagrama) e consegue contar um por um no diagrama de árvores. Você conta a quantidade de possibilidades para cada uma das escolhas. Então, fica bem mais claro.

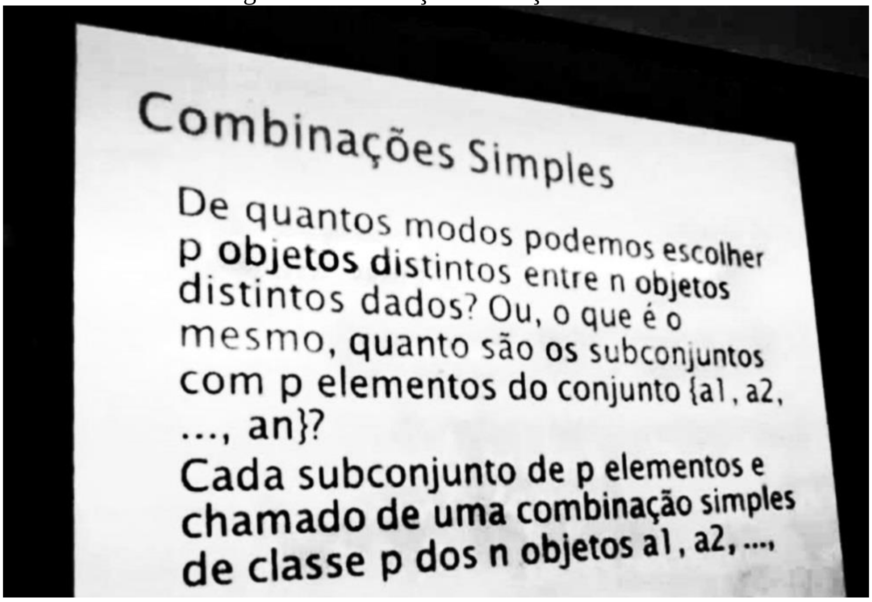
Tal depoimento contribuiu para a caracterização desse item. Assim, a *realização* de *combinação simples* como diagrama de árvores tem como propósito ilustrar a composição da solução do problema, torná-la mais clara e organizada, possibilitando a visualização da solução.

Outra forma de *realizar* observada foi a definição formal. Ela emergiu nas respostas à pergunta diretriz e em uma atividade em que foram sugeridos dois integrantes do grupo para elaboração e execução de um plano de aula. Na resposta à pergunta de partida, um dos participantes explana:

> Professora Elba: A combinação é formar subconjuntos de um conjunto respeitando determinadas condições... Condições essas que cada combinação todos os elementos tem a mesma natureza.

Já na atividade da aula, outro participante traz uma definição (Figura 3) de forma escrita.

Figura 3 – Realização: definição formal.

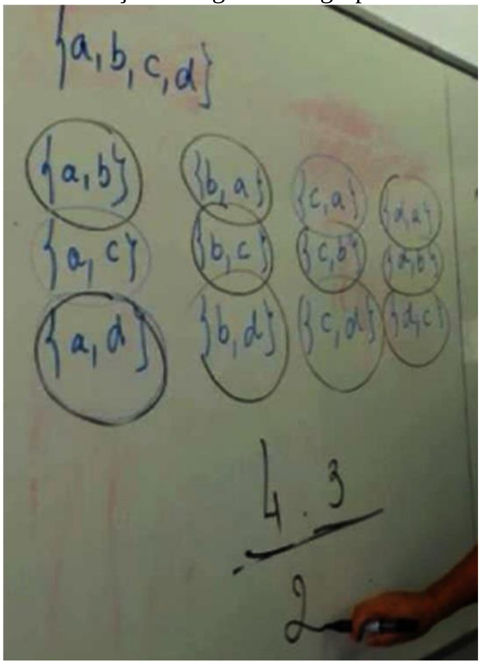


Fonte: Registros do Professor Fausto, 2015.

Nesses dois episódios e em todas as manifestações deste item, evidenciou-se uma preocupação com uma característica própria dos agrupamentos que podem ou não ser considerados *combinações*. Dessa forma, na *realização* de *combinação simples* como definição formal, o propósito é a caracterização na formação dos agrupamentos a serem contados, apresentando as relações e propriedades que precisam ser verificadas.

A *realização* como listagem dos agrupamentos aparece em dois contextos durante os encontros: nas soluções de problemas com um número pequeno de elementos e na execução de uma aula do professor Diogo. Durante a explanação, ele indica que estava repetindo uma aula que havia dado em sua turma para introduzir o conceito e diz: “Eu peguei separadinho um conjunto menor {a, b, c, d} e pedi que fizessem subconjuntos de 2”. O próprio professor apresentou uma possível solução (Figura 4) para o problema listando os agrupamentos.

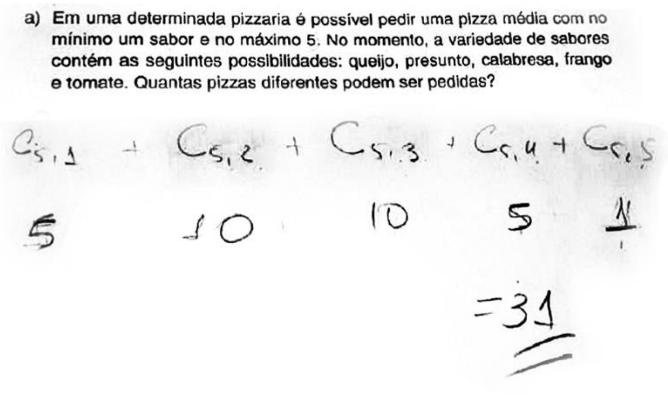
Figura 4 – Realização: listagem dos agrupamentos.



Fonte: Registros do Professor Diogo, 2015.

Observamos que a *realização* de *combinação simples* como listagem dos agrupamentos tem como característica a enumeração de todos os agrupamentos válidos no problema. A fórmula de *combinação simples* (Figura 5) também emergiu como forma de realização do conceito, principalmente nas soluções de professores que buscavam estratégias mais rápidas de solução.

Figura 5 – Realização: fórmula.



a) Em uma determinada pizzaria é possível pedir uma pizza média com no mínimo um sabor e no máximo 5. No momento, a variedade de sabores contém as seguintes possibilidades: queijo, presunto, calabresa, frango e tomate. Quantas pizzas diferentes podem ser pedidas?

$C_{5,1} + C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5}$

5 10 10 5 1

$= 31$

Fonte: Registros da Professora Carla, 2015.

Observamos nesta e nas outras ocorrências que a *realização* desse conceito, partindo de fórmula, tem como característica principal permitir a contagem dos agrupamentos em questão, sem a necessidade da enumeração.

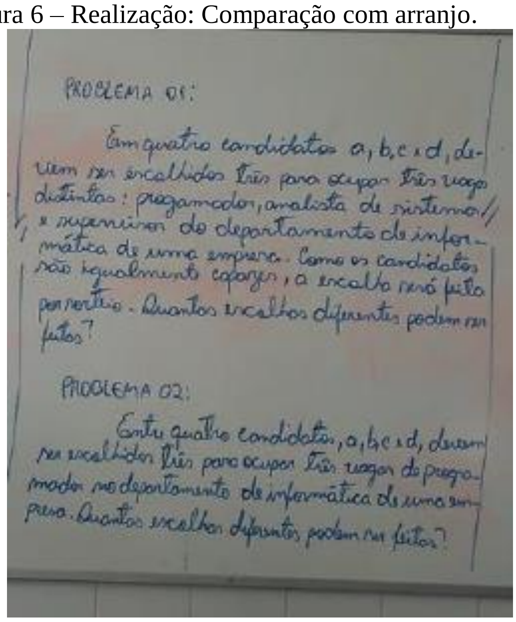
A irrelevância da ordenação dos objetos que compõem os agrupamentos das *combinações simples* também foi identificada como uma forma de *realizar* esse conceito. O diálogo entre dois professores participantes sobre a implicação de alterar a ordem dos elementos torna isso evidente:

> Professora Elba: Essa combinação, se eu mudar a ordem dos elementos vai gerar outra combinação? Não! Aí eu fiquei falando de ordem e sem ordem, pra depois chegar na definição.

> Professora Carla: Eu geralmente uso 5 nomes de alunos da sala mesmo. Vamos pegar esses 5 alunos e vamos fazer duplas. Se a gente for fazer dupla para apresentação de trabalho, altera se eu pegar João e Pedro ou se eu pegar Pedro e João? Não!

O diálogo contribuiu para inferirmos que a *realização* de *combinação simples* como ordenação irrelevante dos elementos tem como objetivo comunicar que mudanças nas ordens dos elementos que compõem os agrupamentos das *combinações simples* não geram novas possibilidades. Outra forma de *realização* observada no curso e que se aproxima de ordenação irrelevante foi a comparação com arranjo. Em um dos episódios em que esta realização emergiu (Figura 6), um dos professores participantes apresentou uma sequência com dois problemas, sendo o primeiro referente a *arranjo* e o segundo à *combinação*.

Figura 6 – Realização: Comparação com arranjo.



PROBLEMA 01:

Em quatro candidatos a, b, c e d, devem ser escolhidos três para ocupar três vagas distintas: programador, analista de sistemas e supervisor do departamento de informática de uma empresa. Como os candidatos são igualmente capazes, a escolha será feita por sorteio. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas?

PROBLEMA 02:

Entre quatro candidatos, a, b, c e d, devem ser escolhidos três para ocupar três vagas de programador no departamento de informática de uma empresa. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas?

Fonte: Registros do Professor Fausto, 2015.

Na sequência da atividade proposta, o professor explica que o intuito desses dois problemas é o de que os alunos percebam as *combinações* a partir das diferenças em relação aos *arranjos*. Observamos, por episódios similares a esse, que a *realização* de *combinação simples* como comparação com arranjo tem por característica possibilitar o contraste das duas técnicas de contagem, *arranjos* e *combinações*.

Para essa *realização*, é imprescindível a discussão anterior dos *arranjos,* para que seja possível a comparação, que, por fim, surgiu da solução de um problema que tinha como objetivo formar uma junta médica, por intermédio dos modelos concretos (Figura 7), em que o professor manipulava os objetos para comunicar e ilustrar os agrupamentos que satisfaziam ou não a solução do problema.

Figura 7 – Realização: contagem dos agrupamentos usando modelos concretos.

Fonte: Professor Fausto, 2015.

Esse episódio nos permitiu perceber que a *realização* do conceito de *combinação simples* por via da contagem dos agrupamentos usando modelos concretos tem por característica, além da visualização, a manipulação dos elementos com o intuito de formar os agrupamentos desejados.

Entendemos que essa lista de *realizações* representa uma variabilidade de formas de comunicar um mesmo conceito, em que não há a intenção de julgar qualquer um dos itens como certo ou errado, mas apenas como adaptáveis ao contexto em que se constroem as discussões, principalmente naqueles de salas de aulas dos diferentes níveis de ensino.

Nessa direção, Pessoa e Borba (2010, p. 1) indicam que existe a “necessidade de serem considerados em sala de aula os variados significados, distintas relações e propriedades e diversificadas representações simbólicas que compõem as situações combinatórias”.

Segundo Rangel, Giraldo e Maculan (2014), considerando as especificidades de cada contexto de ensino, reconhecer as relevâncias de cada uma das *realizações* pode contribuir para elaboração de diferentes estratégias no modo de ensinar. O objetivo da lista é possibilitar a percepção da diversidade de formas que temos para comunicar o conceito de *combinação simples*, na tarefa de ensinar AC, para que possamos conhecer e reconhecer as variabilidades de que poderemos dispor.

Panoramas e Vinculações

Retomando nosso entendimento de que a Matemática para o Ensino busca identificar e modelar de forma teórica a diversidade de *realizações* que professores podem mobilizar – fazer uso - na tarefa de ensinar Matemática, no nosso caso o conceito de *combinação simples,* apresentamos ao final desta seção um modelo teórico dessa Matemática (Quadro 3).

Partindo do pressuposto de que os *panoramas* são estruturados com visão de macro nível orientados pela lista de *realizações*, ampliamos a visão sobre tais *realizações*, categorizando os *panoramas* com suas respectivas composições e descrições. As composições dos *panoramas* consideram as características semelhantes de algumas *realizações* que permitiram organizá-las em uma única categoria. Retomando *vinculações* como implicações e relevâncias das diferentes formas de *realizações*, também apresentamos nesta seção uma discussão em torno dessas *vinculações* diluídas ao longo da análise de cada *panorama*.

O *panorama* formalista, ilustrado pela *realização* definição formal, é caracterizado em termos de uma generalização da contagem de elementos de um dado subconjunto que possuem características definidas. Dante (2010, p. 286) apresenta que "combinações simples de n elementos tomados **p** a **p** ($p \leq n$) são subconjuntos com exatamente **p** elementos que se podem formar com os **n** elementos dados". A relevância deste *panorama* repousa na necessidade de saber o que é o conceito visto na Matemática formal, mas ressaltamos que a sua comunicação por este *panorama* requer entendimentos de outros conceitos matemáticos. A definição formal de *combinação simples* mobiliza outros conceitos como subconjuntos.

Este *panorama* manifesta-se na literatura considerada neste estudo (PESSOA; BORBA, 2010; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013). Embora não canalizem seu foco para uma discussão em termos de suas implicações e relevâncias, Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013) indicam que o mais comum são as definições desse conceito de forma imprecisa ou equivocada, situação que pode ocorrer devido à carga generalista mobilizada na definição formal.

Comunicar o conceito de *combinação simples* a partir deste *panorama* implica o reconhecimento da teoria de subconjuntos, como composição e propriedades. É necessário, por exemplo, reconhecer que o subconjunto {a, b, c} do conjunto {a, b, c, d} é igual ao subconjunto {b, c, a} do mesmo conjunto, ou seja, as *combinações* somente serão diferentes pela natureza dos elementos que compõem o agrupamento.

O *panorama* instrumental, ilustrado pela *realização* fórmula, é caracterizado pelo procedimento instrumental/mecânico na busca de soluções por meio de cálculos utilizando a fórmula: $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, em que n representa a quantidade de elementos do conjunto do qual se quer tomar p elementos distintos. Mobilizar o conceito de *combinação simples* por meio de sua fórmula pode ser necessário para soluções de problemas em outros ramos da Matemática que têm AC como pré-requisito, a exemplo de Estatística e Probabilidade (LANDÍN; SANCHEZ, 2010), mas isso precisa ser feito de maneira adequada (PESSOA; BORBA, 2010).

Para Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013), as fórmulas têm por objetivo facilitar a contagem dos agrupamentos sem a necessidade de enumerá-los. Percebe-se que a utilização de fórmulas é a maneira mais comum utilizada nas soluções de problemas de *combinação*, mas nem sempre isso é feito de forma correta (ALVES; SEGADAS, 2012). A tentativa de enquadrar as soluções de problemas combinatórios na aplicação de fórmulas ainda é comum (Figura 8), e foi identificada na tentativa de solução de um dos professores.

Figura 8 – Solução equivocada enquadrada na aplicação de fórmula.

I) Em uma determinada pizzaria é possível pedir uma pizza média com no mínimo um sabor e no máximo 5. No momento, a variedade de sabores contém as seguintes possibilidades: queijo, presunto, calabresa, frango e tomate. Quantas pizzas diferentes podem ser pedidas?

Seja ~~x_1, x_2, x_3, x_4, x_5~~ q, p, c, f e t a quantidade de fatias ~~de~~ dos sabores queijo, presunto, calabresa, frango e tomate, respectivamente. Suponha que uma pizza média contenha 5 fatias. Devemos encontrar uma solução ~~de~~ com valores inteiros não-negativos para a inequação

$q+p+c+f+t \leq 5$, que é o mesmo que encontrar uma solução para

$q+p+c+f+t+x=5$, onde $x \in \mathbb{Z}_+$.

Sendo assim, temos:

$$C^{p}_{n+p+1} = C^{5}_{6+5-1} = C^{5}_{10} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252.$$

Fonte: Registros do Professor Fausto, 2015.

Observamos nessa tentativa de solução do problema pelo professor Fausto que os agrupamentos válidos foram contados mais de uma vez. Segundo Pessoa e Borba (2010), a utilização da fórmula não pode ser desconsiderada no processo de comunicação do conceito de *combinação*, uma vez que problemas com um número muito grande de elementos requerem um processo mais instrumental. Sugerimos que a maneira com que a fórmula é introduzida na comunicação precisa ser cuidadosa.

O *panorama* ilustrativo, mostrado pelas *realizações* diagrama de árvores, listagem dos agrupamentos e contagem dos agrupamentos usando modelos concretos, é comunicado a partir delas, sendo sua característica principal permitir a visualização dos agrupamentos a serem contados em determinada situação. Os professores mostraram-se bem à vontade com a sua utilização, defendendo, inclusive, que as discussões em torno de *combinações simples* deveriam sempre começar por ele.

Isso é corroborado pela literatura em AC estudada neste trabalho, que traz as potencialidades do uso do que chamamos de *panorama* ilustrativo. Essas ilustrações, simultâneas ou não, contribuem para o desenvolvimento combinatório do indivíduo (PESSOA; BORBA, 2010; AZEVEDO; BORBA, 2013) e auxiliam na compreensão do conceito, precedendo sua comunicação de maneira mais formal (PESSOA; BORBA, 2009).

Percebemos, como pudemos ver na Figura 2, que a exploração deste *panorama* torna a compreensão dos problemas iniciais de *combinação* mais claros, pois é possível contar visualmente os agrupamentos que se estão formando, evitando as rotineiras repetições. Essas potencialidades tornam o *panorama* ilustrativo necessário na compreensão do conceito, mas algumas limitações, como resolver um problema com número muito grande de elementos, sugerem que apenas ele não é suficiente.

O *panorama* comparativo, ilustrado pelas *realizações* ordenação irrelevante dos elementos e comparação com arranjo, é caracterizado pelo contraste com o conceito de *arranjo* que, por sua vez, difere das *combinações* devido às questões da ordenação dos seus elementos serem irrelevantes. Fica evidente que a ocorrência deste *panorama* está condicionada a uma discussão prévia da estratégia de contagem dos *arranjos*. Como em Borba, Pessoa e Rocha (2013), os professores evidenciaram a diferenciação dos problemas com ordem relevante e irrelevante como uma das maiores dificuldades para apresentar ao aluno o conceito de *combinação simples*.

O contraste entre esses dois conceitos apresenta-se como uma das maiores dificuldades em AC (PESSOA; BORBA, 2010; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013; GROENWALD; ZOCH NETO; HOMA, 2009) que é a de conseguir comunicar, quando a ordenação dos elementos que compõem o agrupamento importa ou não. Este *panorama*, ao comunicar *combinação simples* em contraponto com os arranjos, permite um caminho mais preciso na sua diferenciação.

Como o objetivo deste trabalho foi modelar uma Matemática para o Ensino de *combinação simples* a partir do EC, realizado com um grupo de professores, apresentamos uma síntese (Quadro 3) do que foi observado e analisado no curso com os professores e que traz suas *realizações*, *panorama*s, *vinculações*. No quadro, as *vinculações* foram diluídas em estratégias utilizadas e interpretação de resultados.

Quadro 3 – Modelo.

Panorama	**Realizações originárias**	**Breve descrição**	**Níveis** [9]	**A estratégia utilizada é...**	**O resultado é interpretado como...**
Formalista	Definição formal	O conceito de *combinação* é caracterizado em termos de uma generalização da contagem de elementos de um dado subconjunto os quais possuem características definidas.	Ensino Médio e Superior.	Compreender as relações e propriedades que validam o agrupamento como *combinação simples*.	A quantidade de agrupamentos que atendem os requisitos pré-estabelecidas.
Instrumental	Fórmula	O conceito de *combinação* é comunicado a partir do uso de fórmulas e a característica principal está no procedimento instrumental / mecânico na busca de soluções por meio de cálculos, pela fórmula: $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ em que n representa a quantidade de elementos do conjunto do qual se quer tomar p elementos distintos.	Ensino Médio e Superior.	Trabalhar com a substituição de n e p da expressão $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ pelos respectivos valores atribuídos a eles no problema em questão.	O valor numérico obtido após procedimento de substituição e cálculo.
Ilustrativo	Diagrama de árvores; Listagem dos agrupamentos; Contagem dos agrupamentos usando modelos concretos.	O conceito de *combinação* é comunicado a partir de diversas ilustrações e sua característica principal é permitir a visualização dos agrupamentos a serem contados em determinada situação.	Ensino Fundamental e Médio.	Representar por meio de diagrama de árvores, desenhos, listagens, tabelas ou objetos concretos / virtuais, todos – ou em parte – os subconjuntos	A quantidade de agrupamentos que foram visualizados pela(s) *realização* / *realizações* escolhida(s).

[9] Níveis de ensino com maior ocorrência identificados pelos próprios professores que compunham o grupo.

				que serão contados.	
Comparativo	Ordenação irrelevante dos elementos; Comparação com arranjo.	O conceito de *combinação* é concebido a partir do contraste com o conceito de *arranjo* que, por sua vez, difere das *combinações* devido às questões da ordenação de os seus elementos ser irrelevante.	Ensino Fundamental e Médio.	Contagem de todos os subconjuntos com a quantidade de elementos requeridos no problema, para posterior exclusão daqueles que possuem elementos repetidos, mas em ordens diferentes.	A quantidade de agrupamentos restantes após as exclusões.

Fonte: Elaborado pelos autores, 2015.

O resultado apresentado na tabela anterior, descrito a partir das discussões com o grupo de professores no Estudo do Conceito de *combinação simples* contribui para evidenciar uma diversidade de formas de comunicar o conceito de combinação simples utilizada por professores em sua tarefa de ensino. Essa variabilidade permitiu-nos modelar teoricamente uma Matemática para o Ensino de *combinação simples.*

Considerações finais

Como dito anteriormente, o objetivo deste trabalho foi modelar uma Matemática para o Ensino de combinação simples a partir do EC realizado com um grupo de professores. Para isso, seguimos os pressupostos da Matemática para o Ensino e utilizamos o EC como estrutura metodológica de coleta e análise de dados (DAVIS; RENERT, 2009; 2014).

Preocupações com as dificuldades de alguns professores ao tratar o tema combinações simples são visíveis na literatura (BORBA, PESSOA; ROCHA, 2013). Além disso, Sabo (2010) sugere que os baixos índices de acertos em problemas de combinação simples explicitados em sua pesquisa podem ser consequência do que e de como os professores mobilizam esse conceito matemático em suas aulas. Ribeiro (2012) sublinha a importância de os professores reconhecerem estratégias diferentes no ensino de um conceito em sala de aula.

Considerando essas preocupações, sugerimos o modelo aqui apresentado como ferramenta para o trabalho dos professores em AC, mas não como receita para a condução de suas atividades. Entendemos que, apresentar formas variadas de comunicar o conceito de combinação simples, potencializa as possibilidades de diálogos entre professores e alunos, para que o ensino desse conceito não se limite apenas a um dos panoramas. Como Pessoa e Borba (2010), sustentamos a ideia de que essa variabilidade de formas precisa ser vista, apresentada e discutida. Os panoramas aqui apresentados servem como enriquecedores no repertório de formação de professores de Matemática, corroborando as diretrizes dos aspectos teóricos da Matemática para o Ensino (DAVIS; RENERT, 2009, 2014).

Uma vez que nosso olhar é para o fazer docente, não conseguiríamos investigar a sala de aula de cada professor envolvido no curso. Dessa forma, o EC permitiu-nos reunir no mesmo lugar professores com experiências diferentes. O trabalho coletivo também possibilitou que os diferentes professores explicitassem, analisassem e confrontassem suas diferentes formas de comunicar, contribuindo para um processo coletivo de entendimento do conceito.

Com a finalização do trabalho, destacaríamos que o fato do EC não ser pré-definido ou padronizado (DAVIS; RENERT, 2009), permite suscitar realizações que muitas vezes não são valorizadas no trabalho do professor de Matemática, mas que possuem suas relevâncias.

As discussões referentes ao conceito de combinação simples permitiram-nos perceber a variabilidade das formas que temos para comunicar tal conceito. Segundo Groenwald, Zoch Neto e Homa (2009, p. 49), "a apresentação dos conceitos com mais de uma perspectiva didática favorece a aprendizagem [...] o que demonstra a importância da diversificação didática para um ensino de qualidade, atingindo um maior número de estudantes em sala de aula."

Os resultados obtidos neste estudo abrem uma agenda de investigação no campo da Educação Matemática, no que refere à Matemática para o Ensino de conceitos combinatórios, os quais acreditamos ter relevância na formação de professores de Matemática.

Referências

ADLER, Jill. Mathematics for teaching: what is it and why is it important that we talk about it? Pythagoras: University of the Witwatersrand, 2005.

ADLER, Jill et al. Working with learners mathematics: exploring key elements of mathematical knowledge for teaching. In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL

GRUPO DE PSICOLOGIA DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 29., 2005. Anais…Melbourne: PME, 2005.v.2. p. 1-8. Disponível em: < http://www.emis.ams.org/proceedings/PME29/PME29RRPapers/PME29Vol2AdlerEtAl.pdf > Acesso em: 01 ago. 2015.

ALVES, Renato; SEGADAS, Claudia. Sobre o ensino da análise combinatória: fatores a serem considerados, lacunas a serem evitadas. Acta Scientiae, Canoas, v. 14, n. 3, p. 405-420. Canoas, 2012.

AZEVEDO, Juliana; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Combinatória: a construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de software. ALEXANDRIA- Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Santa Catarina, v. 6, n. 2, p. 113-140, 2013.

BEDNARZ, Nadine; PROULX, Jérôme. Knowing and using mathematics in teaching: conceptual and epistemological clarifications. For the learning of mathematics, Canadá, v. 29, n. 3, p. 1-7, Nov. , 2009. Disponível em: < http://flm-journal.org/Articles/90007B35446B191D39748441966D2.pdf> Acesso em: 01 ago. 2015.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Vamos combinar, arranjar e permutar: aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática (XI ENEM). Curitiba, 2013.

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos; ROCHA, Cristiane de Arimatéa. Como estudantes e professores de anos iniciais pensam sobre problemas combinatórios. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 15, n. esp. p. 895-908, 2013.

CORREA, Jane; OLIVEIRA, Gisele. A escrita do problema e sua resolução: o entendimento intuitivo acerca da combinatória. The written text of mathematical word problems and the success of solution. Educar em Revista, Curitiba, n. esp. 1, p. 77-91, 2011.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. V. 2 / Ensino Médio. São Paulo, Editora Ática. 2010.

DAVIS, Brent. Subtlety and complexity of mathematics teachers’ disciplinary knowledge. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 12, Seoul, Korea, 2012. Anais… Seoul, Korea: ICME, 2012.

DAVIS, Zain; ADLER, Jill; PARKER, Diane. Identification with images of the teacher and teaching in formalized in-service mathematics teacher education and the constitution of mathematics for teaching. Journal of Education, v. 42, p. 33-60, 2007.

DAVIS, Brent; RENERT, Moshe. Mathematisc-for-Teaching as shared dynamic participation. For the Learning of Mathematics, v. 29, n. 3, p. 37-43, 2009.

___________________. Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers’ disciplinary knowledge. Educational Studies in Mathematics, v. 82, n. 2, p. 245-265, Feb. 2012.

___________________. The math teachers know: profound understanding of emergent mathematics. New Yor: Routledge, 2014.

DAVIS, Brent; SIMMT, Elaine. Mathematics-for-teaching: an ongoing investigation of the mathematics that teachers (need to) know. Educational Studies in Mathematics, v. 61, n. 3, p. 293-319, March, 2006.

FERNANDES, José António; CARVALHO, Bárbara do Alvar de; CARVALHO, Carolina Fernandes de. O trabalho colaborativo como meio de desenvolver o conhecimento didático de duas professoras em combinatória. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 12, n. 1, p. 43-74. São Paulo, 2010.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; ZOCH NETO, Lisiane; HOMA, Agostinho Iaqchan Ryokiti. Sequência didática com análise combinatória no padrão SCORM. Bolema, Rio Claro (SP), v. 22, n. 34, p. 27-56, 2009.

LANDÍN, Pedro Rubén; SÁNCHEZ, Ernesto. Níveis de razonamiento probabilístico de estudantes de bachillerato frente a tareas de distribucíon binomial. Educação Matemática Pesquisa, v. 12, n. 3, p. 598-618. São Paulo, 2010.

MORGADO, AC de O. et al. Análise combinatória e probabilidade. Impa/vitae, 1991.

MORO, Maria Lúcia Faria; SOARES, Maria Thereza Carneiro. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 8, p. 99-124, 2006.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. Zetetiké, Campinas, SP, v. 17, n. 31 , p.105-150, jun. 2009.

___________________. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. EM TEIA Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, São Paulo, v. 1, n. 1, 2010.

RANGEL, Letícia; GIRALDO, Victor; MACULAN, Nelson. Matemática elementar e saber pedagógico de conteúdo: estabelecendo relações. Professor de Matemática Online – SBM. v. 2, n. 1, p. 1-14, 2014.

RIBEIRO, Alessandro Jacques. Equação e conhecimento matemático para o ensino: relações e potencialidades para a educação matemática. Bolema: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, abr., 2012. Disponível em: <http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/> Acesso em: 02 ago. 2013.

___________________. Elaborando um perfil conceitual de equação: desdobramentos para o ensino e a aprendizagem de matemática. Ciência & Educação, v. 19, n. 1, p. 55-71. Santo André (SP), 2013.

ROSA, Paulo Ricardo da Silva. Um curso de metodologia da pesquisa em ensino de ciências. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2010.

SABO, Ricardo Dezso. Saberes docentes: análise combinatória no ensino médio. 2010. 2010f. Dissertação (Mestrado acadêmico em Educação Matemática)- Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira; BORTOLOTI, Roberta D´Angela Menduni; FERREIRA, Juliana Rodrigues. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 15, n. 3, p. 606-629, 2013.

SERRAZINA, Maria de Lurdes; RIBEIRO, Deolinda. As Interações na atividade de resolução de problemas e o desenvolvimento da capacidade de comunicar no ensino básico. Bolema, Rio Claro, v. 26, n. 44, p. 1367-1393, 2012.

Recebido 27/08/2015
Aprovado 29/05/2016