Tecnologias digitais no ensino: discussões a partir de propostas desenvolvidas por licenciandos envolvendo polinômios

Digital technologies in teaching: discussions from proposals developed by undergraduates involving polynomials

---

MARIA IVETE BASNIAK[1]
DIRCEU SCALDELAI[2]
CELINE MARIA PAULEK[3]
NATALI ANGELA FELIPE[4]

Resumo

O presente trabalho discute as diferentes propostas que alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática desenvolveram para a utilização de quatro objetos de aprendizagem envolvendo polinômios. Os objetos foram desenvolvidos no software GeoGebra, e possibilitam o ensino das operações envolvendo polinômios relacionando-as a medidas de áreas de retângulos. A pesquisa ocorreu durante seis aulas, sendo um primeiro momento para exploração dos objetos e um segundo para a elaboração de um plano de aula utilizando um ou mais objetos de aprendizagem. A forma como os alunos trabalharam com os objetos de aprendizagem nos fornecem indícios de que ainda não superamos a lógica de reprodução de métodos de ensino que privilegiam a utilização e apropriação de algoritmos à discussão de conceitos matemáticos. Apesar disso, percebemos que alguns futuros professores começaram a "arriscar", propondo tarefas que questionam mais os alunos do que fornecem explicações prontas.

Palavras-chave: Tecnologias Digitais; Objetos de Aprendizagem; Formação de Professores.

Abstract

This work discusses the different proposals that students of the fourth year of a Bachelor's Degree in Mathematics developed about using four learning objects involving polynomials. The objects were developed in GeoGebra software, and enable the teaching of transactions involving polynomials related to rectangle's measured. The research took place for six classes, being at first for exploration of objects and at second to prepare a lesson plan using one or more learning objects. The way the students worked with learning objects provide us evidences that we still haven't overcome the logic reproduction of teaching methods that emphasize the use and appropriation of algorithms to the discussion of mathematical concepts. Despite of this,

---

[1] Professora Adjunta da Universidade Estadual do Paraná – e-mail: basniak2000@yahoo.com.br
[2] Professor Assistente do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná, campus de União da Vitória – e-mail: dirceuscaldelai@gmail.com
[3] Professora Colaboradora do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná, campus de União da Vitória – e-mail: celemaria03@yahoo.com.br
[4] Professora Colaboradora do Colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Paraná, campus de União da Vitória – e-mail: natthali_felipe@hotmail.com

we realize that some prospective teachers started "to risk", proposing tasks that challenge more students than providing ready explanations.

Keywords: Digital Technologies; Learning objects; Teacher training.

Introdução

Podemos dizer que desde que a linguagem Logo começou a ser introduzida nas escolas do Brasil por meio do projeto Educom, iniciaram-se as discussões quanto a possibilidade de utilizar o computador como uma ferramenta de ensino com mudanças na perspectiva do ensino tanto da matemática quanto de outras disciplinas. De acordo com os memoriais do Projeto Educom (1983) isso se deu a partir de 1981 quando uma equipe coordenada pelas professoras Maria Cecília Calani Baranauskas e Heloísa V. R Correa Silva começaram a desenvolver atividades com crianças, que, em duplas e reunidas semanalmente, com a ajuda de um instrutor, tinham contato com a linguagem e metodologia Logo no ensino de geometria (PROJETO EDUCOM, 1983).

Propor construções com a linguagem Logo foi e ainda é uma maneira de abordar conteúdos de matemática abandonando a mera reprodução de algoritmos, explorando aplicações desses conteúdos e discutindo-os conceitualmente.

Atualmente, além do SuperLogo outros softwares foram desenvolvidos e apresentam grande potencial para serem utilizados no ensino da matemática nesta mesma perspectiva. Entre esses softwares, o GeoGebra tem se destacado por ser livre e gratuito e também graças a facilidade de uso e a possibilidade de abordar a representação gráfica, geométrica, algébrica e numérica dos conteúdos de maneira dinâmica e concomitante.

Apesar dessas possibilidades serem vislumbradas atualmente e inúmeros materiais serem produzidos e disponibilizados virtualmente, na prática do professor que ensina matemática nos mais diversos níveis de ensino o que se tem observado predominar são aulas em que prevalecem exposições de algoritmos e sua aplicação na resolução de exercícios privilegiando a reprodução. Não ocorrem discussões e/ou aplicações dos conteúdos matemáticos em situações que requeiram realmente tais conteúdos. E, dessa forma, não são raros os casos em que presenciamos malsucedidas tentativas de contextualizar conteúdos de matemática em situações do cotidiano que não requerem, necessariamente, aplicações matemáticas para serem realizados no dia a dia. E, por outro lado, aplicações da Matemática necessárias à própria Matemática, ou que poderiam ser exploradas por meio das tecnologias digitais, são descartadas.

Nesse sentido, destacamos a forte tendência que ainda presenciamos da reprodução da forma de ensino que vivenciamos em nossos anos de escolarização e, mais que isso, os recursos digitais construídos para possibilitarem a exploração de conteúdos de matemática com enfoque que ultrapasse a reprodução de algoritmos acabam sendo adaptados à essa mesma metodologia e não provocam mudanças no processo de ensino.

Enquanto professores de matemática, vivenciamos as dificuldades dos alunos em compreender operações algébricas. Da mesma forma, não são raros os relatos de colegas que reforçam as dificuldades que permeiam o ensino da álgebra, entre as quais destacamos o nível de abstração exigido dos alunos, que acaba gerando, em certos casos, repúdio ao conteúdo.

A fim de contribuir para alterar esse quadro, buscamos desenvolver um material dinâmico que possibilite atribuir algum significado ao estudo das operações envolvendo polinômios, relacionando-as à medida de área de retângulos. Verificamos que trabalhos anteriores, como Bonadiman (2012) e Bertoli e Schuhmacher (2013) mostraram resultados satisfatórios ao trabalhar com o mesmo conteúdo de forma similar, entretanto utilizando material concreto, enquanto nós utilizamos tecnologias digitais, mais especificamente o GeoGebra para a construção dos objetos de aprendizagem.

Discutimos neste trabalho as diferentes abordagens que alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática propuseram para a utilização desses objetos em sala de aula.

Apresentamos os objetos de aprendizagem de monômios e polinômios desenvolvidos no âmbito do GETIEM[5] e as abordagens que visualizamos ao construir esses objetos embasados em propostas já utilizadas anteriormente (BONADIMAN, 2012; BERTOLI; SCHUHMACHER, 2013), bem como os diferenciais por se tratarem de objetos dinâmicos. Passamos aos encaminhamentos das tarefas propostas e as discussões sobre as abordagens propostas pelos alunos, finalizando com reflexões acerca dos rumos e perspectivas das tecnologias digitais e a formação de professores que ensinam matemática, com destaque a formação inicial desses professores.

[5] Grupo de Estudos Teóricos e Investigativos em Educação Matemática

2. Novas abordagens de conteúdos de Matemática

Não é de hoje que, nos mais diferentes níveis de ensino, surgem questionamentos e discussões referentes aos métodos utilizados no processo de ensino nas escolas, suas potencialidades e a compatibilidade do uso desses métodos com o aluno que desejamos formar, como consta nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> A insatisfação revela que há problemas a serem enfrentados, tais como a necessidade de reverter um ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para o aluno. Há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama (BRASIL,1997, p.15).

Nesse sentido o processo de ensino carece de abandonar abordagens fragmentadas e mecânicas, possibilitando que o aluno construa significados de conceitos matemáticos. Entretanto, não é o que ocorre na maioria das vezes nas aulas de matemática, em que há uma maquiagem da metodologia tradicional com a inserção de novos recursos tecnológicos. O simples fato de usar tais recursos não garante a mudança no processo metodológico a fim de possibilitar um ensino baseado na construção de argumentos, de indagações, investigações e explorações que favorecem o pensamento matemático, desapegando de regras, possibilitando ao aluno a construção de significados matemáticos aos conceitos abordados. Mediante isso, os PCN destacam:

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos (BRASIL, 1997, p.19).

De tal forma, não é o fato de inserir recursos tecnológicos nas aulas que garantirá mudanças no processo de ensino: é necessária uma mudança de postura do professor em relação ao uso que fará desses recursos e que metodologia empregará para abordar cada conteúdo. Novas abordagens dos conteúdos necessitam de uma reflexão ampla por parte do professor sobre o conteúdo e como desenvolvê-lo para atingir o objetivo proposto usando esses recursos. Assim, a construção e discussão de conceitos matemáticos dependerá das possibilidades e da condução dada ao aluno, bem como a compreensão do professor diante do conceito abordado, na qual reincidem suas concepções de ensino, seus conhecimentos teóricos matemáticos e experiências e bagagens oriundas de sua escolarização e formação.

Esse processo de mudança de prática em relação ao ensino da matemática com possibilidade da inserção de novos recursos não é fácil, como relata Lévy quanto ao uso da tecnologia em sala de aula:

> É certo que a escola é uma instituição que há cinco mil anos se baseia no falar/ditar do mestre, na escrita manuscrita do aluno e, há quatro séculos, em um uso moderado da impressão. Uma [...] verdadeira integração da tecnologia supõe o abandono de um hábito antropológico mais que milenar, o que não pode ser feito em alguns anos (LÉVY, 2000, p.8-9).

3. Tecnologias Digitais no Ensino

Bittar (2011) discute a formação de professores de forma que esses passem a integrar a tecnologia em suas aulas e não apenas a inseri-las. A autora apoia suas discussões em conceitos de psicologia de Piaget e "em especial na ideia de esquema definida por Piaget e utilizada e ampliada por Vergnaud (1990)", bem como na "teoria da instrumentação [desenvolvida por Rabardel (1995)] que fornece elementos teóricos apropriados ao estudo da ação do sujeito, mediado por um instrumento" (BITTAR, 2011, p. 160).

Nesse sentido, o professor ao manipular um programa de computador executando tarefas que incluam simplesmente o manejo do software não integra tecnologias em sua prática pedagógica, mas apenas as insere. Assim, as tecnologias são apenas artefatos e não se constituíram ainda como instrumentos ao trabalho do professor, que passa a integrar tecnologias a seu trabalho quando consegue desenvolver tarefas que promovam o ensino e aprendizagem em sala de aula, modificando a metodologia.

Porém isso normalmente está longe de ser realidade, pois de acordo Sancho (2006 *apud* SIMONIAN, 2009) o que ocorre na maioria dos casos é os professores adaptarem o uso de recursos computacionais à forma como acreditam que ocorre a aprendizagem dos alunos, mantendo a velha metodologia utilizada em suas aulas. E dessa forma, adaptam o uso dessas tecnologias a seu trabalho em sala de aula ao invés de aproveitarem as vantagens que as tecnologias podem oferecer para modificarem sua prática pedagógica. Essa questão possui forte relação com a formação para o uso de recursos tecnológicos na educação, a qual quase sempre possui caráter instrumental, possibilitando ao professor entender apenas como manipular o artefato, porém não oportunizando reflexões sobre possibilidades de utilização pedagógica em sala de aula. E assim, ainda que disponham de recursos tecnológicos atuais, esses continuam desempenhando as mesmas funções, não ocasionando mudanças no cotidiano escolar.

Bueno (2013) destaca que atualmente "faz-se necessário o aprofundamento na formação continuada dos professores, destacando, sobretudo, o caráter histórico-social da tecnologia" (BUENO, 2013, p. 420). Seu trabalho sugere que a possibilidade da superação da reificação[6] da tecnologia no interior das escolas está na tomada de consciência dos professores de que podem superar os limites da escola e da sala de aula criando espaços coletivos de discussão, a fim de repensar a forma como a tecnologia é concebida na escola, pois os discursos democráticos ficam presos ao papel, não se concretizando nas ações que se desenvolvem no ambiente educacional.

A autora conclui que ousa "enfatizar ainda que torna-se urgente repensar todo o *design* da escola – sua estrutura – atualmente em face da tecnologia educacional seguido da organização do trabalho pedagógico" (BUENO, 2013, p. 422), pois o modelo vigente é o de "linha de montagem" que tende a reificar e robotizar cada vez mais alunos e professores. A pesquisa evidencia ainda a necessidade de uma reflexão mais ampla, crítica e problematizadora em torno da tecnologia educacional.

A forma como os professores participam das decisões políticas também é muito superficial, pois se limitam a, no máximo, ouvir alguns que possuem um pouco mais de afinidade com as ferramentas tecnológicas (BUENO, 2013). Não há portanto real participação dos profissionais da educação nos processos de decisão em relação a tecnologias e tecnologias educacionais nas escolas públicas, sendo um indicador de que o discurso da gestão democrática é apenas uma oratória e que, na verdade, o que se concretiza é a mercantilização das ferramentas tecnológicas.

[6] Deriva do latim *res*=coisa, *reifis*=tornar coisa, coisificar; portanto pensar em algo já formatado, uma coisa, um objeto, uma ação materializada que toma vida própria (BUENO, 2013, p.27).

Bueno (2013) destaca, ainda, que o projeto político pedagógico de cada escola revela o caráter instrumental assumido pelas tecnologias, em que o professor é tido, nesse contexto, como um trabalhador solitário com sua prática fragmentada, já que espaços para discussões coletivas não são incentivados. Daí a necessidade do professor se rebelar contra a ridigez e burocracia do sistema e construir seu espaço, o que, segundo a autora, seria o caminho apontado para a superação da reificação frente às tecnologias a partir de uma concepção histórico-crítica e revolucionária.

Dessa forma, há necessidade de repensar a formação dos professores de forma que sejam propiciados espaços de discussão das tecnologias na educação, considerando a exclusão sócio-tecnológica dos professores e suas necessidades (SIMONIAM, 2009).

Garcia (1999 *apud* SIMONIAM, 2009) destaca ainda a necessidade de, ao formar professores, viabilizar condições para realizar trabalhos em colaboração, como "a participação na elaboração e discussão de propostas de ensino, projetos pedagógicos, análise e avaliação de materiais didáticos, incluindo também as tecnologias" (p. 64).

Concordamos com as ideias de Borba e Penteado (2010, p.48) de que "o conhecimento é produzido por um coletivo formado por seres-humanos-com-mídias, ou seja, seres-humanos-com-tecnologias". Assim, a evolução dos humanos e sua capacidade de desenvolver tecnologias cada vez mais dinâmicas, auxiliam na produção de conhecimento e contribuem com a ciência e a tecnologia.

Entretanto, nem sempre na escola esse potencial das tecnologias tem sido aproveitado. A falta de discussões em relação às possibilidades que a utilização das tecnologias pode trazer a rotina de sala de aula, em detrimento as formações que priorizam o treinamento dos professores na parte técnica dos recursos tecnológicos, tem ocasionado que o que se vê nas escolas é a adaptação das tecnologias de informação e da comunicação às velhas metodologias utilizadas em sala de aula, sem observarmos mudanças no processo de ensino e aprendizagem.

4. Os objetos de aprendizagem desenvolvidos

Bonadiman (2012) e Bertoli e Shuhmacher (2013), buscando uma aprendizagem da álgebra com mais significado para o aluno, desenvolveram e aplicaram tarefas utilizando materiais manipulativos e algeplan[7], respectivamente, para o ensino da álgebra e das operações, consequentemente. Os autores desenvolveram propostas que aproximam a Álgebra da Geometria, o que aparece também como um indicativo nas Diretrizes Curriculares de Matemática da Educação Básica do Paraná, indicando que "os conteúdos devem ser apresentados de modo que um seja abordado sob o contexto do outro. Assim, os Conteúdos Estruturantes transitam entre si através dessas articulações" (PARANÁ, 2008, p. 62).

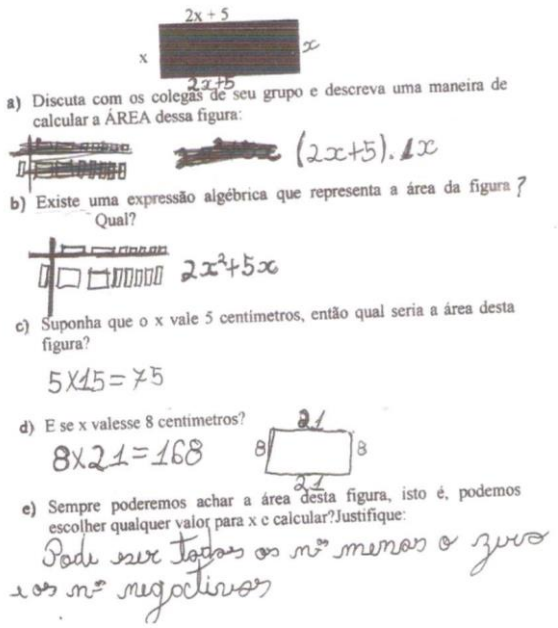
Portanto, podemos aplicar um polinômio definido nos reais positivos à medida de área de uma figura, limitando o grau máximo desse polinômio a dois, sendo seus coeficientes pertencentes ao conjunto dos inteiros. A intenção do material é que o aluno consiga atribuir algum sentido às operações, para conseguir desenvolver noções básicas de como essas operações podem ser efetuadas.

Bertoli e Shuhmacher (2013) destacam entre os resultados de seu trabalho com o algeplan que "aos poucos os estudantes vão engajando-se no processo de construção do conhecimento, seus questionamentos quanto a como juntar o x com x, deixam de existir quando eles substituem o x por uma figura geométrica, torna-se muito mais fácil operar com material visual" (p. 14).

Ao tratar da multiplicação, especificamente, Bonadiman (2012), que trabalhou com material manipulativo composto por retângulos e quadrados confeccionados em papel cartão colorido, cujos lados representavam diferentes medidas, destaca entre os resultados obtidos, o fato dos alunos, ao serem solicitados a resolverem uma questão que pedia a medida da área de determinada figura dado o valor de x, que "todos, sem exceção, utilizaram a figura inicial como parâmetro para responder e substituíram o valor de x nas expressões algébricas associadas aos lados do retângulo" (p. 114), como no exemplo exibido na figura1.

[7] Material que relaciona figura geométrica (quadrados e retângulo) com a álgebra (BONADIMAN, 2012).

Figura 1 – Solução de aluno para problema envolvendo atividade com o uso de operações (multiplicação)



Fonte: BONADIMAN (2012, p. 114)

Bonadiman (2012) cita entre os limitadores do material o fato da rigidez deste dar a falsa ideia ao aluno de *x* e *y* serem maiores que a unidade de medida, devido à dimensão das peças. Um diferencial entre o material concreto e o uso das tecnologias digitais é que estas possibilitam variar os tamanhos das peças e fornecem maior dinamicidade ao material e à aprendizagem do conteúdo. Acreditamos que a interação dos alunos com *softwares* dinâmicos de Matemática, como é caracterizado o GeoGebra, deve favorecer também uma aprendizagem mais ativa e mudanças na metodologia utilizada pelo professor em sala de aula, pois entendemos que o trabalho com tecnologias deve possibilitar novas formas de aprendizagem e, consequentemente, mudanças e avanços no ensino da matemática.

Assim, o material foi pensado a partir das dificuldades observadas em compreender monômios e polinômios, buscando superá-las associando álgebra e geometria, ou, mais especificamente, monômios à medida de área de retângulos.

Apresentamos a seguir os objetos[8] monômios, adição, multiplicação e divisão de polinômios. Dependendo da forma como o professor trabalhar esses objetos em sala de aula, fará com que o objeto se constitua em um artefato ou instrumento (BITTAR, 2011). Entretanto, não é foco neste trabalho fazer uma análise neste sentido e sim apresentar os objetos de aprendizagem que depois serão utilizados em uma tarefa desenvolvida por licenciandos.

4.1 Objeto de aprendizagem: monômios

O objeto de aprendizagem monômios[9] possibilita alterar o valor de x e y pela manipulação dos dois controles deslizantes. Conforme alteramos x e y, as medidas das áreas das figuras e as medidas de seus lados são alterados, podendo assumir inúmeros valores. Ressaltamos aqui que esses controles estarão presentes nos outros objetos de aprendizagem, com a mesma função e objetivo.

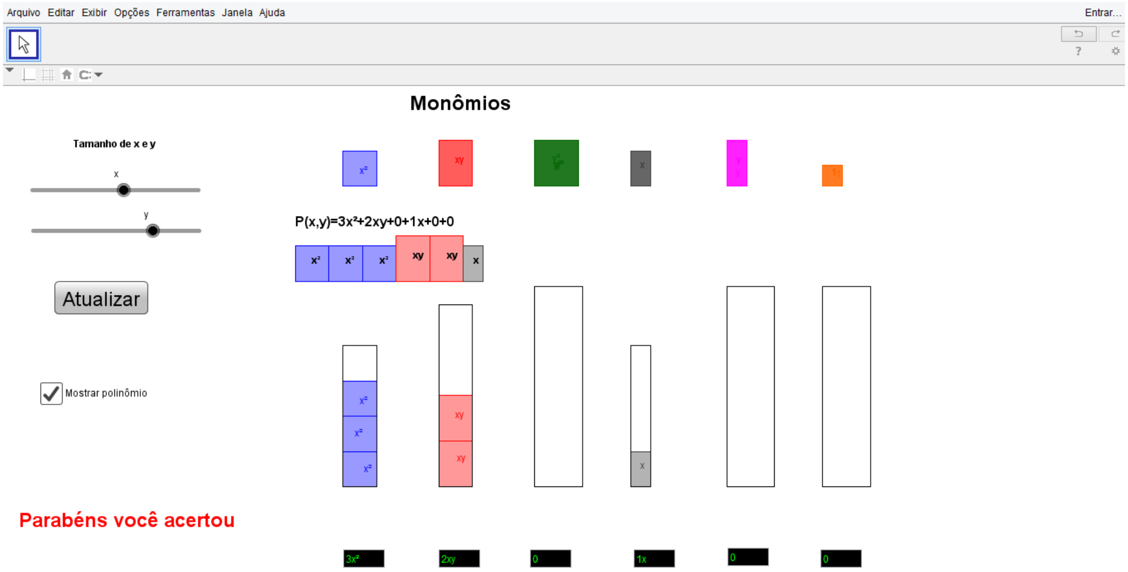
Além disso, podemos explorar também a definição e soma de monômios por intermédio da manipulação da representação geométrica desses monômios arrastando-os para dentro das caixas (retângulos inicialmente vazios). A partir do momento que uma caixa recebe um retângulo (representação geométrica de um monômio), a mesma só aceitará receber outros retângulos semelhantes, visto que a caixa se ajusta ao retângulo.

Logo abaixo das caixas, há campos de entrada em preto nos quais é possível completar o monômio correspondente à representação geométrica formada após adicionar os retângulos de cada caixa ordenadamente. Quando o resultado digitado é correto, o valor fica verde; se está incorreto, fica vermelho. Para escrever as potências, é necessário utilizar as teclas **Alt Gr + 2**, diretamente no teclado.

Ainda, neste objeto de aprendizagem é possível abordar a construção de um polinômio, pois o mesmo apresenta o polinômio formado algébrica e geometricamente, ao selecionar a caixa Mostrar Polinômio. Neste momento, é importante a intervenção do professor para definir com os alunos o que é um polinômio e abordar as limitações que este objeto de aprendizagem tem, uma vez que no objeto não há monômios de grau maior do que dois, nem com coeficientes negativos por trabalharmos com medidas de áreas de figuras. Essas mesmas abordagens devem ser feitas nos outros objetos de aprendizagem, nas quais encontrarmos as mesmas situações.

[8] Os objetos foram desenvolvidos na versão 5.0.156.0-3D do GeoGebra.
[9] Disponível em: <http://tube.geogebra.org/material/show/id/1430209>.

Figura 2 – Objeto monômios



Fonte: os autores

4.2 Objeto de aprendizagem: adição de polinômios

O objeto de aprendizagem adição de polinômios[10] (Figura 3) possibilita movimentar catorze controles deslizantes, sendo dois para o tamanho de *x* e *y* e doze para alterar os coeficientes de dois polinômios: *p(x,y)* e *r(x,y)*. Conforme movimentamos esses controles, alteram-se as representações algébrica e geométrica desses polinômios.

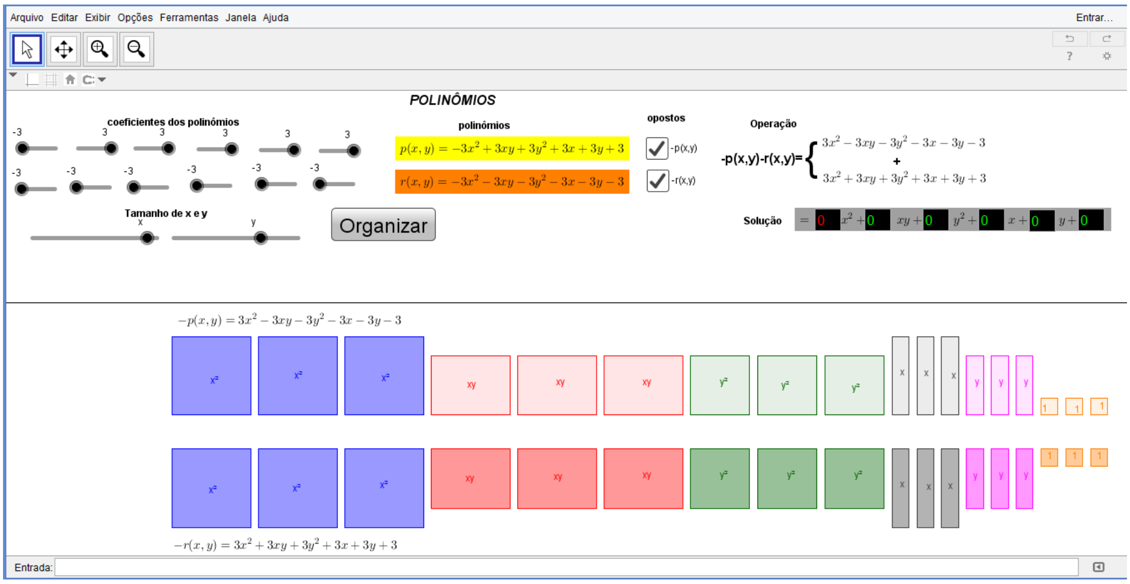
Tem-se a opção de operar com os opostos desses polinômios, selecionando as caixas -*p(x,y)* e/ou -*r(x,y)*, o que altera as representações algébricas e geométricas no objeto.

A operação é realizada geometricamente pela manipulação e contagem dos retângulos que representam x^2, xy, y^2, x, y e *1* unidade de medida de área. As tonalidades escuras representam os monômios positivos e as tonalidades claras representam os monômios negativos. É possível arrastar e sobrepor retângulos que quando se encaixam perfeitamente e são de mesma cor, mas de diferentes tonalidades, "desaparecem". Assim, após todos os retângulos de mesma cor e tonalidade diferente serem sobrepostos, basta contar os retângulos que sobraram e completar os campos de entrada

[10] Disponível em <http://tube.geogebra.org/material/show/id/1430199>.

da **Solução**. Se o valor completado ficar verde, está correto; se ficar vermelho, deve-se rever o valor completado.

Figura 3 – Objeto Adição de Polinômios



Fonte: os autores

É importante discutir com os alunos que não há medidas negativas de áreas, o que temos no objeto é uma figura com mesmas medidas em que a tonalidade mais clara indica uma medida de área a ser retirada, representando monômios negativos.

4.3 Objeto de aprendizagem: multiplicação de polinômios

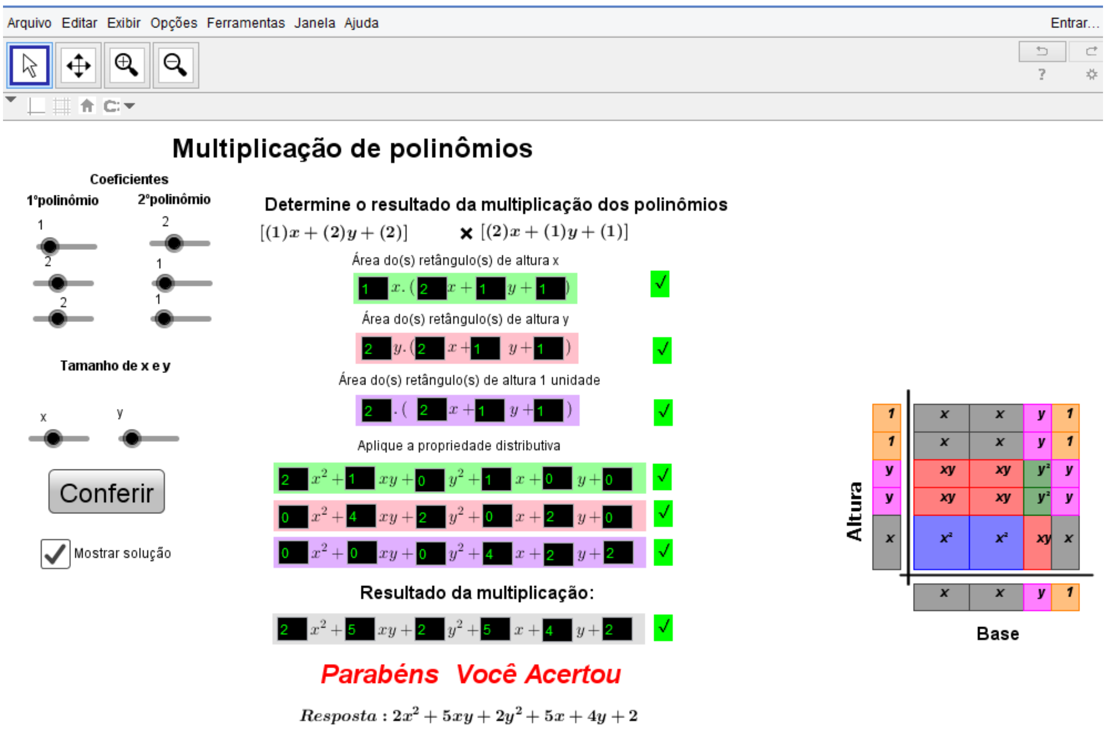
O objeto de aprendizagem multiplicação de polinômios[11] (Figura 4) possibilita movimentar oito controles deslizantes. Três deles controlam a quantidade de segmentos que formarão os lados verticais do retângulo que aparece na tela e outros três controles deslizantes, os lados horizontais. Assim, os lados do retângulo são compostos pela soma de segmentos, de forma que um deles terá tamanho conhecido de uma unidade de medida (coeficiente de x^0), e dois segmentos que podem variar pela manipulação de outros dois controles deslizantes nomeados x e y que variam a medida desses segmentos.

Na multiplicação de polinômios, aplicamos a propriedade distributiva e agrupamos os termos semelhantes. O algoritmo da multiplicação está disposto no objeto, sendo necessário completar os coeficientes, seguindo as orientações dispostas no

[11] Disponível em: <http://tube.geogebra.org/material/show/id/1430185>.

objeto, onde é possível visualizar geometricamente os termos (lados do retângulo) e o resultado da multiplicação. Quando os valores digitados no campo de entrada estão incorretos ficam vermelhos, quando estão corretos, ficam verdes. Quando a expressão toda está correta, no final da equação o marcador vermelho X ficará verde √. O objeto oferece, após cinco tentativas erradas, a possibilidade de visualizar a resposta correta. O que não pode ocorrer é assumir valores negativos por estar relacionado à medida de área de uma figura. Essa discussão precisa ser feita com os alunos, partindo para a formalização da multiplicação de polinômios que podem ser aplicados a outras situações que não apenas às medidas de áreas, admitindo valores negativos e também envolvendo mais que duas incógnitas e com grau maior que dois.

Figura 4 – Objeto Multiplicação de Polinômios



Fonte: os autores

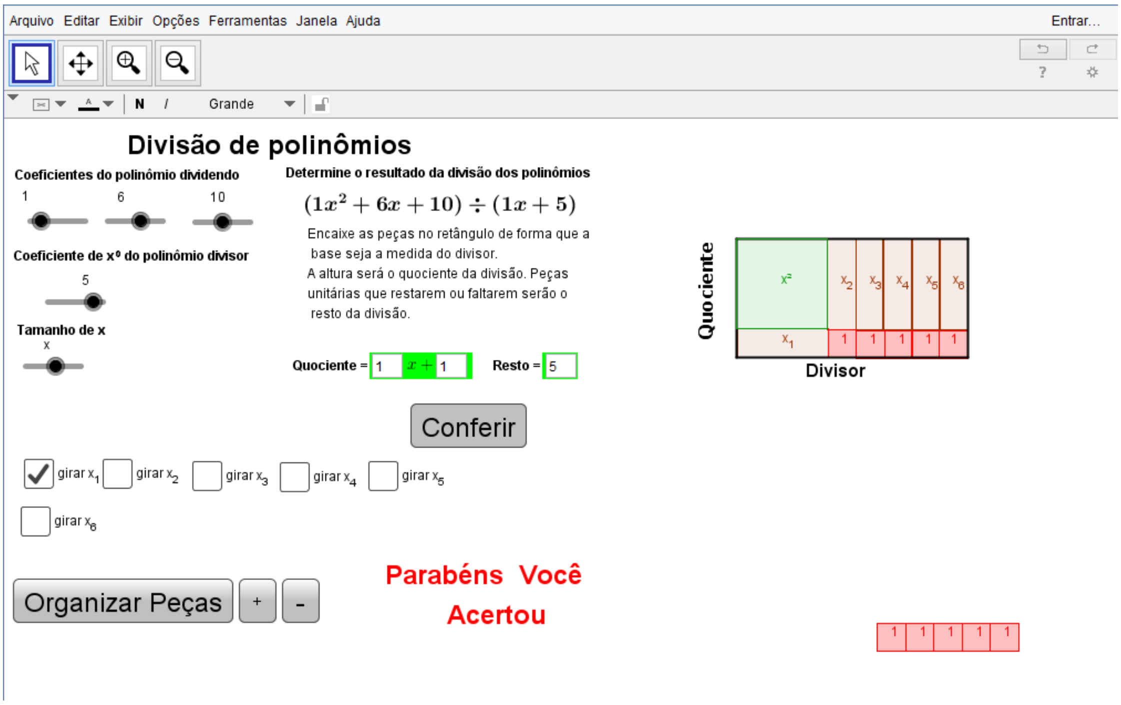
4.4 Objeto de aprendizagem: divisão de polinômios

O objeto de aprendizagem divisão de polinômios[12] (Figura 5) oportuniza manipular retângulos para encontrar o resultado da divisão de um polinômio por outro. Portanto, é possível alterar os valores dos três coeficientes do polinômio dividendo e um

[12] Disponível em: <http://tube.geogebra.org/material/show/id/1225525>.

coeficiente do polinômio divisor. Após a escolha desses dois polinômios e de ter definido o tamanho que x assumirá, pode-se clicar em **Organizar Peças** e nos botões + ou – para organizar a tela do GeoGebra e facilitar a ação seguinte, que consiste em encaixar os retângulos coloridos na caixa. Para isso, em algumas situações, será preciso girar os retângulos cujos lados medem x e uma unidade, clicando na opção **girar x_n.**

Figura 5 – Objeto Divisão de Polinômios



Fonte: os autores

Para visualizar geometricamente o resultado é necessário encaixar os retângulos na caixa de forma que um dos lados seja a medida correspondente ao quociente e o outro a medida do divisor, conforme indicado no objeto, e que sobrem ou não retângulos correspondente ao resto. Caso o resto seja um valor positivo sobrarão retângulos fora da caixa, caso contrário, se o resto for negativo, esse é visualizado nos espaços que faltam para completar a caixa. Dependendo dos polinômios escolhidos e da forma como encaixarmos os retângulos, podemos encontrar respostas diferentes da correta, se não considerarmos as condições da definição de divisão de polinômios[13].

[13] *Dados dois polinômios f (dividendo) e g ≠ 0 (divisor), dividir p por q é determinar outros dois polinômios q (quociente) e r (resto) de modo que se verifiquem duas condições:*

a) q . g + r = f

b) ∂r < ∂g (ou r = 0, caso em que a divisão é exata)

É importante que o aluno consiga visualizar que o total das retângulos correspondem ao polinômio dividendo, e que o divisor e quociente serão representados pelos lados da caixa. Assim como nos demais objetos, é importante que seja discutido com o aluno as limitações que o objeto apresenta, visto que não possibilita divisões de valores negativos e nem de polinômios com grau maior que dois.

5. A tarefa solicitada aos alunos

A pesquisa ocorreu em seis aulas de uma disciplina que discute tecnologias aplicadas ao ensino da matemática. O planejamento inicial previa quatro aulas conjugadas para que os alunos em duplas analisassem e explorassem os quatro objetos de aprendizagem. Inicialmente, não foi realizado nenhum comentário sobre os objetos além das informações que os mesmos apresentavam em seus respectivos arquivos. Acompanhamos o trabalho dos alunos prestando auxílio e questionando-os sobre como compreenderam o objeto ou sobre as possibilidades de utilização em sala de aula. Na sequência, os alunos elaboraram um plano de aula utilizando um ou mais desses objetos, com os seguintes itens: série, duração, conhecimentos prévios (caso considerassem necessário), conteúdo, objetivos, desenvolvimento (em que deveriam descrever os encaminhamentos das aulas para atingir o(s) objetivo(s) proposto(s) e como o(s) objeto(s) seriam utilizado(s)) e avaliação.

Após as análises iniciais da tarefa, desenvolvida nestas quatro aulas, sentimos a necessidade de um segundo momento para esclarecer alguns pontos que não ficaram claros. Para este momento, despendemos mais duas aulas.

5.1 Desenvolvimento e considerações sobre a tarefa

Mais da metade do tempo planejado para o primeiro dia, cerca de duas horas, foi empregado na exploração dos objetos. O objeto monômios apresentou problemas em sua configuração devido a resolução da tela dos computadores ser diferente da que foi criado o arquivo e também devido a lentidão de um arquivo em que foi utilizado muitas linhas de programação. Talvez esse tenha sido o principal motivo pelo qual nenhuma das duplas propôs a utilização desse objeto no desenvolvimento do planejamento de aula que foi solicitado como segunda tarefa.

O objeto adição de polinômios apresentou problema técnico devido a versão do GeoGebra presente no laboratório (versão 3.2.42.0), de forma que quando as representações geométricas de dois monômios opostos eram sobrepostas estas não sumiam. Diante deste problema foi necessária uma atualização do *software* em todos os computadores utilizados, e o objeto passou a funcionar normalmente. Após a atualização, quando questionamos os alunos sobre como o objeto funcionava, nenhum deles havia manipulado os retângulos, fixaram-se apenas em alterar a parte algébrica do objeto, declarando que não tentaram movimentar os retângulos. Quando os questionamos sobre o que as tonalidades diferentes de uma mesma cor significavam, responderam que eram monômios opostos, sendo que a tonalidade mais escura representava um monômio positivo e a tonalidade mais clara um monômio negativo. E quando solicitamos que experimentassem movimentar esses retângulos buscando sobrepô-los, demonstraram entusiasmo ao perceberem que representações geométricas de monômios opostos desapareciam quando sobrepostos, declarando que "Ah, assim é bem mais interessante!". Esse interesse pode ser confirmado nos planejamentos realizados, pois, dos seis planos, em quatro o objeto escolhido para ser utilizado foi adição de polinômios.

O objeto multiplicação de polinômios, de acordo com os alunos, foi o mais fácil de compreender, porém foi utilizado em um dos planos de aula. Já em relação ao objeto divisão de polinômios, nenhum dos alunos conseguiu compreendê-lo sem ser guiado por questionamentos. Ao identificar o quociente na representação geométrica, consideraram a legenda de cada retângulo como sendo a medida do lado e não a medida da área do retângulo, e, dessa forma alegavam “que o resultado não fechava”. Somente quando questionados sobre o que a legenda dos retângulos estava representando, no caso da medida de sua área, buscaram relacionar a medida de área com as medidas dos lados e muitos exclamaram: “Ah, agora faz sentido!”. Isso reflete a dificuldade que há em relacionar conteúdos matemáticos de forma diferente daquela em que foram ensinados.

Portanto, nesse primeiro momento, observamos grande dificuldade dos alunos em associar os polinômios na forma algébrica e sua representação geométrica, voltando sua atenção e esforço em entender e justificar a parte algébrica com o algoritmo de resolução. Os controles deslizantes que permitem explorar o tamanho das medidas dos lados dos retângulos e consequentemente a medida da área das representações, que poderiam ser explorados na compreensão do que as variáveis representam em álgebra, não foram citados por nenhum dos grupos. O mesmo ocorreu nos planejamentos das aulas, no segundo momento do desenvolvimento do trabalho.

Após a exploração dos objetos, os alunos efetuaram os planejamentos de aula. O primeiro ponto importante a destacar em relação a esses planejamentos é que, apesar da dificuldade inicial que os acadêmicos claramente demonstraram em compreender os objetos propostos, em apenas um planejamento foi prevista a explicação do objeto e de como este funcionava. Observa-se aí a tendência que os futuros professores têm em reproduzir, em sua prática, as práticas usadas em sua formação. Nós não explicamos inicialmente os objetos de aprendizagem aos acadêmicos, uma vez que nosso objetivo era identificar o uso que eles fariam desses objetos em sala de aula; consequentemente, não previram em seus planos essa explanação com os alunos, ainda que o objetivo nesse caso fosse o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Dos seis planejamentos de aula, nenhum trabalhou com o objeto monômios, quatro grupos planejaram com o objeto adição de polinômios, um com divisão e um com multiplicação e divisão de polinômios. Todos consideraram que os alunos já sabiam o que eram polinômios, mas não especificaram como este conteúdo havia sido ensinado, e nem o que esperavam que os alunos soubessem sobre. Por esse motivo, foi solicitado, em momento posterior, que especificassem como seria a aula anterior e a posterior a planejada, e, também, o que esperavam que os alunos compreendessem que é um monômio e o que é um polinômio a partir dos objetos de aprendizagem.

Nosso objetivo, nesse segundo momento, foi verificar a primeira impressão que tivemos dos planos, de que o objeto não seria utilizado como objeto de ensino, mas apenas para "ilustrar" ou "reforçar" o conteúdo trabalhado e que os acadêmicos não realizariam uma reflexão sobre o conceito de monômios e polinômios que seria trabalhado com os alunos. Isto foi confirmado, uma vez que demoraram cerca de uma hora para conseguir expressar um conceito de monômios e polinômios que satisfizesse o trabalho com os objetos de aprendizagem. Além disso, cinco das seis duplas escreveram que a aula que antecederia a planejada por eles, iniciaria com o conceito de monômios a partir da definição geométrica utilizando os arquivos, como pode ser observado nos recortes dos planos:

> Na aula anterior a aplicação desse plano, será introduzido o conceito de monômio com a utilização do arquivo "Monômios" do GeoGebra, em que será mostrado aos alunos a definição Geométrica no trabalho escrito.
>
> Espera-se que com essa explicação, os alunos **compreendam o conceito de monômios** a partir de figuras geométricas. Com esses conceitos, o aluno deve ser capaz de reconhecer que os monômios são a união de figuras iguais. Sendo as figuras diferentes, **introduz-se o conceito de polinômio** a partir de figuras geométricas [...] (Dupla A).
>
> Na aula que antecederia, seria trabalhado com o **conteúdo de monômios**. Desta maneira para levar os alunos a **compreenderem o que é um monômio** e a realizar as **operações de adição e subtração com monômios**, seria trabalhado com o arquivo relacionado a adição de monômios. Explorando este arquivo seria abordado o que é um monômio, seria explicado que um **monômio é: uma expressão algébrica formada por um único termo, e este termo no arquivo seria representado pela figura geométrica referente a este termo** (Dupla D).
>
> Para que a aula que elaboramos possa ocorrer é necessário que anteriormente os alunos tenham visto mesmo que de forma rápida **o que é um monômio representado no objeto de aprendizagem**. Podendo ele estabelecer a relação da cor e tamanho da figura com a parte literal sabendo que só posso agrupar as figuras iguais, ou seja, os termos de mesma parte literal, termos semelhantes.
>
> Como já conheceram o que é um monômio no objeto de aprendizagem, podemos estabelecer a **definição de polinômio** numa aula expositiva, partindo do pressuposto do que foi apresentado no objeto de aprendizagem, através da soma das figuras, ou seja, a soma dos termos (Dupla C).

É possível perceber aqui que as duplas afirmam que utilizariam o objeto monômios para trabalhar monômios e também polinômios, porém, ou não deixam claro como fariam essa abordagem, ou optariam por uma exposição de definições e explicações.

Foi solicitado aos alunos que definissem monômios e polinômios relacionando com os objetos de aprendizagem.

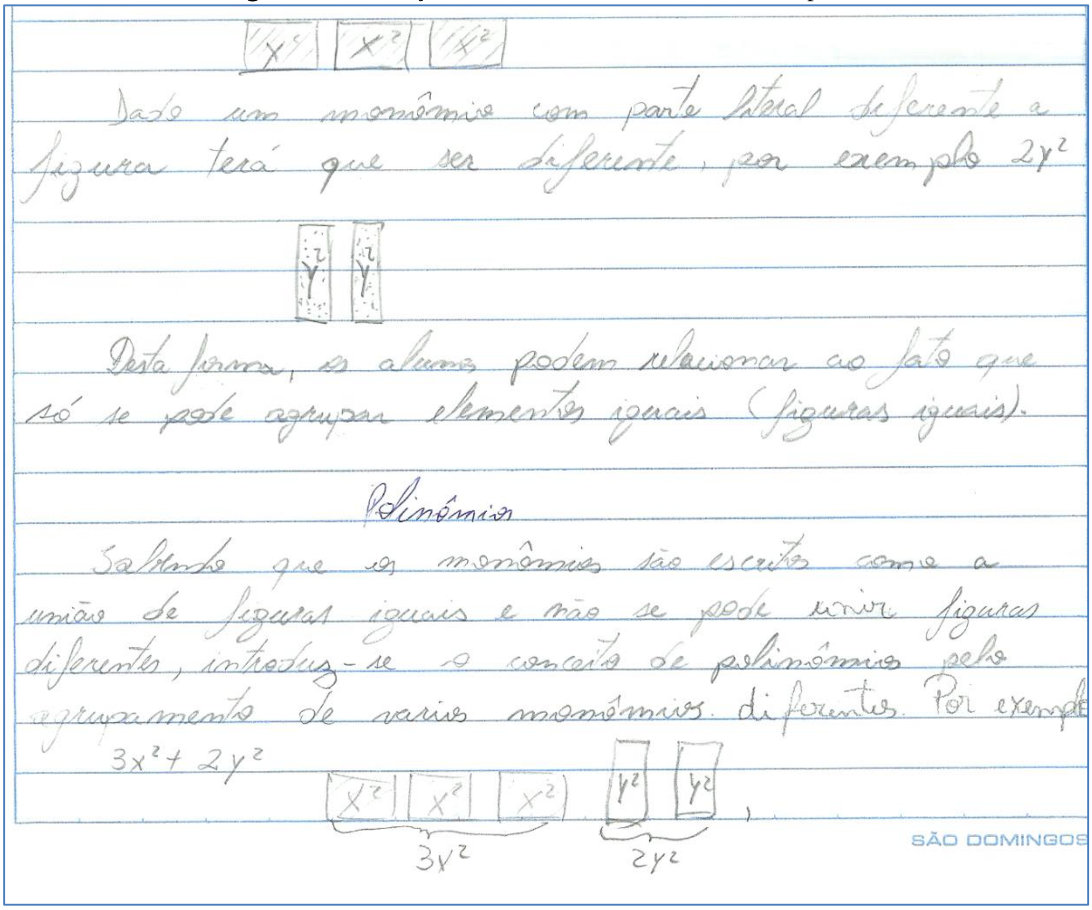
> Podemos observar que os casos em que temos um polinômio são as expressões que envolvem cada sentença onde temos o grau do expoente da variável maior do que ou igual a 0. Diferente dos monômios que envolvem apenas uma "sentença". Ou seja, um polinômio é escrito da forma: $ax^0 + ax^1 + ax^2 + \cdots + ax^n$. O monômio pode ser escrito da forma ax^n, x, a. Onde a é uma constante, ou coeficiente e x é a variável e ambos são valores numéricos, representados de formas diferentes (Dupla B).

A definição da *Dupla B* não atende ao solicitado, pois envolve polinômios de apenas uma variável e de grau n. Os objetos envolvem polinômios de até duas variáveis e grau máximo dois. Entretanto, durante o Ensino Médio e Superior, essa é a definição comumente estudada pelos alunos. Mais uma vez, observamos a tendência a reprodução dos conteúdos estudados, sem reflexão ao fazer a transposição didática.

Nas definições apresentadas pela *Dupla A* (Figura 6), a representação geométrica de cada monômio é “uma figura geométrica, na qual esta representação se dá em tamanho e cor relacionada a parte literal e a parte numérica com a quantidade de retângulos [...]”.

É possível observar que as representações geométricas dos monômios não se relacionam à medida de área, pois as peças x^2 e y^2 não são quadradas, são apenas peças nominadas x^2 e y^2 e que mantém sempre as mesmas dimensões.

Figura 6 – Definição de Monômios e Polinômios - Dupla A


x^2 x^2 x^2

Dado um monômio com parte literal diferente a figura terá que ser diferente, por exemplo $2y^2$

y^2 y^2

Desta forma, os alunos podem relacionar ao fato que só se pode agrupar elementos iguais (figuras iguais).

Polinômios

Sabendo que os monômios são escritos como a união de figuras iguais e não se pode unir figuras diferentes, introduz-se o conceito de polinômios pelo agrupamento de varios monômios diferentes. Por exemplo

$3x^2 + 2y^2$

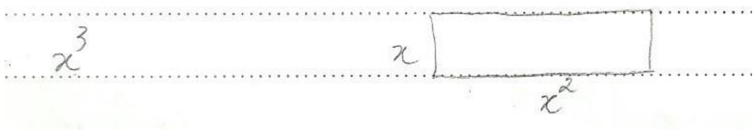
$\underbrace{x^2 \; x^2 \; x^2}_{3y^2}$ $\underbrace{y^2 \; y^2}_{2y^2}$,

SÃO DOMINGOS

Fonte: dados da pesquisa (dupla A)

O mesmo problema em relação a não observação do conceito de área pode ser observado no texto da *Dupla F* (Figura 7):

Figura 7 – Definição de Monômios e Polinômios - Dupla F



Fonte: dados da pesquisa (dupla F)

As definições apresentadas pela *Dupla E* foram estritamente algébricas, sem fazer nenhuma relação com medidas de área: "expressões algébricas que possuem um único termo são chamadas monômios, as quais se constituem por uma parte literal e um coeficiente" e "expressões algébricas que são constituídas por vários monômios são chamados de polinômios". Questionados se aquela definição satisfazia o que poderiam explorar nos objetos, concordaram que não, e a complementaram. Embora tenham concordado e modificado a definição, não modificaram o plano de aula, em que parece que o objeto foi incluído apenas para cumprir uma exigência, sem relacionar a álgebra com a geometria.

O plano de aula apresentado pela *Dupla E* teve como conteúdo multiplicação e divisão de polinômios, e apresentou fortes elementos que nos fizeram acreditar que os objetos de aprendizagem seriam utilizados apenas em substituição a uma lista de exercícios, ou seja, como forma de fixação da aprendizagem, visto que, tanto no conteúdo proposto quanto em conhecimentos prévios, apresenta-se o mesmo conteúdo. Isso foi confirmado posteriormente, quando os alunos, ao descreverem como seria a aula anterior à planejada, citam a utilização do livro didático e a realização de exemplos no quadro:

> Nas aulas que antecederam o plano de aula que fizemos, discutimos de forma discursiva dialogada os conceitos sobre conceito de monômios e polinômios (parte literal e coeficiente), identificação de termos semelhantes, multiplicação e divisão de polinômios. [...]
> Para a multiplicação e divisão de polinômios, desenvolvemos vários exemplos no quadro:
> - $4y^2 \cdot (-2)y^3 = 4 \cdot (-2) \cdot y^2 \cdot y^3 = -8y^5$
> - $(-8am) \cdot (+2m) = (-8) \cdot 2 \cdot a \cdot m \cdot m = -16am^2$
> - $(20x^5):(4x^2) = \frac{20x^5}{4x^2} = \frac{20.x.x.x.\cancel{x}.\cancel{x}}{4.\cancel{x}.\cancel{x}} = 5.x.x.x = 5x^3$
>
> Acreditamos que através da observação da resolução dos exercícios os alunos sejam capazes de manipular os objetos de aprendizagem calculando os polinômios que ali serão solicitados (Dupla E).

Portanto, nesse plano o objeto de aprendizagem seria utilizado apenas para que o aluno exercitasse cálculos, mas não é vislumbrado em nenhum momento como objeto de aprendizagem. Os outros objetos não são citados nem na aula anterior nem na aula posterior, sendo que o que promove a aprendizagem dos alunos seria a aula expositiva em que seria explicado o que são monômios e polinômios e como operar com esses. Questionou-se os acadêmicos sobre a dificuldade que os alunos têm em relação às abstrações quanto a álgebra, e, embora concordem que é um conteúdo que os alunos têm muita dificuldade para compreenderem, nas tarefas realizadas não vislumbraram outra forma de trabalhar o conteúdo diferente da aula expositiva e da reprodução de algoritmos.

A *Dupla B*, conforme a figura 8, trabalhou com a divisão de polinômios. Desenvolveu o plano propondo questões a fim de que os alunos compreendessem a divisão de polinômios, porém a última questão chama a atenção para a necessidade de os alunos compreenderem o algoritmo da divisão de polinômios:

Figura 8 – Algoritmo da Divisão - Dupla B

Observe que na questão 1, o algoritmo realizado foi:

$$\begin{array}{l|l} 1x^2 + 1x + 1 & 1x + 0 \\ \underline{-1x^2} & \overline{\;1x + 1\;} \\ \quad 0 + 1x & \\ \quad\;\; \underline{-1x} & \\ \qquad 0 + 1 & \end{array}$$

Construa o algoritmo das questões 2) e 3).

Fonte: dados da pesquisa (dupla B)

Ao questionar os acadêmicos sobre como vislumbravam ser possível compreender o algoritmo da divisão a partir do arquivo, disseram que não sabiam se os alunos chegariam ou não, mas que consideravam que “tinham que conseguir chegar”, pois caso contrário “para que servia o objeto? ”. Questionados então se esse era o único algoritmo possível, responderam que era o que “deveriam usar para resolver uma divisão”, caso se deparassem com uma, e além disso, que era esse o algoritmo que conheciam.

Embora não vislumbrassem o algoritmo utilizando o objeto de aprendizagem, fica evidente na conversa com os alunos, que só atingiriam o objetivo proposto, "realizar divisão entre polinômios; identificar o processo de divisão de polinômios", se os alunos conseguissem realizar a divisão de polinômios pelo método da chave, algoritmo que os acadêmicos conheciam. A partir do que foi proposto, é possível identificar que há uma tendência maior dos acadêmicos em ensinar apenas métodos resolutivos conhecidos do que propriamente usar os conceitos envolvidos nas operações para explicá-las correlacionando álgebra e geometria.

O planejamento proposto pela *Dupla F* envolve a adição de polinômios, e aborda a representação algébrica e a manipulação das figuras. Entretanto, como é possível visualizar nas orientações descritas abaixo, é solicitado que os alunos manipulem as figuras, mas não é explorada a relação com a medida de área de figuras planas e não é discutida a relação existente entre o polinômio e as figuras.

> 1) Realizem a soma dos polinômios $p(x,y) = \mathbf{2x^2 + xy + 3y^2 + x + 2y - 2}$ e $q(x,y) = \mathbf{x^2 - xy + 2y^2 - 2x + y + 1}$ utilizando os seletores referentes aos "coeficicientes dos seletores" para escrever os polinômios. Manipule as figuras coloridas abaixo sobrepondo-as.
> **a)** Utilizando o software, de que forma encontramos o resultado desta soma?
> **b)** Qual é o resultado desta soma?
> **c)** É possível sobrepor peças com valores algébricos diferentes? Justifique
> **d)** Digite o resultado encontrado, no campo de entrada "Solução". O que aconteceu? (Dupla F).

Assim como esse plano de aula, outros quatro também se pautaram em questionamentos aos alunos para o desenvolvimento das tarefas, o que mostra que, de alguma forma, as duplas vislumbram a utilização dos objetos para o ensino de conteúdos matemáticos.

No plano de aula da *Dupla C,* observa-se que um dos objetivos específicos se distancia do conteúdo matemático e foca no objeto de aprendizagem "compreender o funcionamento do objeto de aprendizagem de adição e subtração de polinômios", destoando dessa forma do objetivo geral, "adicionar e subtrair polinômios".

Algumas duplas evidenciam, ainda, que a aula se daria no laboratório de informática e destacam a importância de o professor verificar antes se está tudo funcionando e organizar previamente a turma estabelecendo um "contrato pedagógico". Quando questionamos os alunos sobre porque essa organização prévia merecia ser lida em seu texto de planejamento, exprimiram o receio que sentem de trabalhar com recursos que podem falhar e comprometer o desenvolvimento da aula prevista caso não funcionem adequadamente.

Em relação a como se daria a continuidade do processo de ensino sobre monômios, assim como em relação a aula anterior, todos citam que trabalharão com os outros objetos, ou com situações problemas, com exceção de uma dupla, que destaca que dará continuidade com uma discussão seguida de aula expositiva dialogada:

> Após a aula destinada a ser trabalhada com os objetos de aprendizagem, a aula seguinte consistirá em uma discussão buscando verificar e esclarecer o que eles aprenderam com a aula anterior. Com isso, será feito um trabalho avaliativo descritivo contendo questões sobre a temática trabalhada nas aulas anteriores. Depois disso será trabalhada também com aula expositiva dialogada os conceitos de produtos notáveis e fatoração (Dupla E).

Considerações Finais

Consideramos que a forma como os alunos trabalharam com os objetos de aprendizagem nos fornecem indícios de que ainda não superamos a lógica de reprodução de métodos de ensino que privilegiam a utilização e apropriação de algoritmos em detrimento da discussão de conceitos matemáticos, sendo que, em alguns casos, visualizamos a adaptação dos recursos disponibilizados para atenderem a velha metodologia em que os futuros professores foram "educados". Portanto, ainda não rompemos com essa velha metodologia. Ainda, urge a necessidade de aproveitar as potencialidades que as tecnologias digitais oferecem para modificar o ensino da matemática, oferecendo oportunidades de aprendizagem diferentes daquelas que vivenciamos em nossa escolarização.

Por outro lado, nos parece que algumas sementes foram plantadas e que alguns alunos, futuros professores, começam a "arriscar" inovar no processo de ensino, propondo tarefas que questionam mais os alunos do que fornecem explicações prontas, além de se disporem a discutir com os alunos os conceitos que fundamentam os conteúdos matemáticos. Acreditamos que esse é um importante primeiro passo, em relação aos rumos que a educação matemática pode tomar hoje, graças ao desenvolvimento das tecnologias digitais que apresentam inúmeros recursos que podem contribuir para mudar o ensino da Matemática, discutindo mais conceitos e abandonando algoritmos que ainda tem hoje importante papel, mas em outro sentido.

As tecnologias digitais podem dar novos rumos ao ensino da Matemática, mas isso depende daqueles que estão a frente do processo de ensino aceitarem essa nova possibilidade de reestruturarem o processo educacional. A quebra dessa lógica de reprodução precisa ser rompida também na universidade, nos cursos de formação de professores, que, em sua grande maioria, ainda seguem um modelo completamente rígido em que os conteúdos específicos são trabalhados desvinculados do didático. Sabemos que essa ruptura não é algo simples e imediato, por isso consideramos que, apesar de muito se ter que avançar, há algumas sementes germinando que podem romper com as barreiras de reprodução no ensino da Matemática.

Referências

BONADIMAN, A. Álgebra no Ensino Fundamental: Produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas. In: BÚRIGO, E. Z.; GRAVINA, M.; BASSO, M. V. A.; GARCIA, V. C. V. **A Matemática na Escola:** novos conteúdos, novas abordagens. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2012.

BERTOLI, V. SHUMAHCHER, E. Aprendendo polinômios utilizando o algeplan: uma prática no ensino da Matemática para o Ensino Fundamental. IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática. **Anais....** Canoas, 2013.

BITTAR, Marilena. A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. **Educar em Revista**, n. se 1, p. 157-171, 2011.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BUENO, N. L. **Tecnologia educacional e reificação:** uma abordagem crítica a partir de Marxs e Luckás. 2013. 503f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2013.

LEVY, P. **As tecnologias da inteligência**: o futuro do pensamento na era da informática. 9. ed. Rio de Janeiro: Ed. 34, 2000.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica**: Matemática. Curitiba, 2008.

PROJETO EDUCOM. **Núcleo de Informática Aplicada a Educação**, 1983. Disponível em: <http://www.nied.unicamp.br/ojs/index.php/memos/article/view/57/56>. Acesso em: 07 out. 2015.

SIMONIAN, M. **Formação continuada em ambiente virtual de aprendizagem: elementos reveladores da experiência de professores da educação básica**. 2009. 162f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.