CONSTRUÇÃO DE UM DESENHO METODOLÓGICO DE ANÁLISE SEMIÓTICA E COGNITIVA DE PROBLEMAS DE GEOMETRIA QUE ENVOLVEM FIGURAS[1]

CONSTRUCTION OF A METHODOLOGICAL PICTURE OF SEMIOTIC AND COGNITIVE ANALYSIS CONCERNING GEOMETRY PROBLEMS INVOLVING FIGURES

MÉRICLES THADEU MORETTI[2]
CELIA FINCK BRANDT[3]

***Resumo**:*
Com a presente discussão, pretendemos, a partir das ideias de Duval sobre as apreensões e os tipos de olhares em geometria, criar um ambiente favorável à aprendizagem da geometria. A este ambiente, denominaremos, em referência a Lotman, semiosfera da aprendizagem da geometria. Uma vez que a semiosfera tenha sido construída, faremos um florilégio cognitivo e semiótico de procedimentos possíveis de serem observados na resolução de problemas geométricos. Neste trabalho, em particular, trataremos de problemas comumente presentes em livros didáticos que envolvem figuras geométricas. Veremos que as operações cognitivas de designação e identificação também são aspectos importantes a serem considerados na compreensão das dificuldades envolvidas na resolução desse tipo de problema.
***Palavras-chave**: Desenho metodológico. Semiosfera do olhar. Apreensões em geometria. Olhar em geometria. Designação e identificação.*

Abstract:
In this discussion, we intend, based on Duval's ideas on seizures and the types of perspectives on geometry, to create a favorable environment for learning geometry. This environment, in a reference to Lotman, will be called semiosphere of learning geometry. Once the semiosphere has been built, we will make a cognitive and semiotic anthology of possible procedures to be followed in solving geometric problems. In this work, in particular, we will address problems that are common in textbooks. All the problems involve geometric figures. We will see that the cognitive operations of designation and identification are also important aspects to be considered in understanding the difficulties involved in resolving this kind of problem.
Keywords: *methodological design. Semiosphere. Seizures in geometry. Sight in geometry. Designation and identification.*

Resumen:
Con la presente discusión pretendemos, inicialmente, generar un ambiente favorable para el aprendizaje de la geometría, a partir de las ideas de Duval sobre las asimilaciones y las miradas sobre la misma. A este ambiente denominaremos semiósfera del aprendizaje de

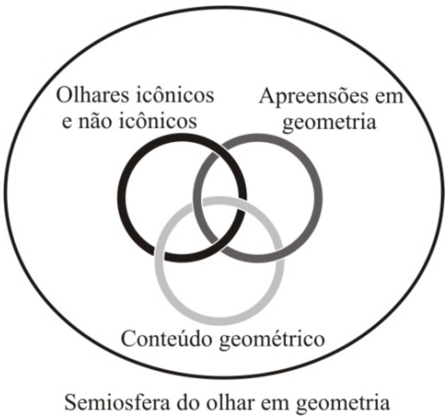
[1] O presente artigo é um aprofundamento de um texto levado ao "III Fórum de discussão: parâmetros balizadores da pesquisa em Educação Matemática no Brasil", na PUC/SP, em 2015, sob o título "A confluência de ideias para criar um espaço de aprendizagem da geometria".
[2] Doutor em Educação Matemática – ULP/Estrasburgo. Professor PPGECT – UFSC. E-mail: mthmoretti@gmail.com
[3] Doutora em Educação Matemática – PPGECT - UFSC. Professora PPGE – UEPG. E-mail: brandt@bighost.com.br

geometría, en referencia a Lotman. Una vez construida la semiósfera, haremos una recopilación cognitiva y semiótica de procedimientos posibles de observar en la resolución de ejercicios de geometría, los cuales involucran figuras geométricas de variedades bastantes comunes en los libros didácticos. Veremos que las operaciones cognitivas de designación e identificación son también aspectos importantes a considerar en la comprensión de las dificultades de resolución de estos tipos de ejercicios.
***Palabras clave**: diseño metodológico. Semiósfera de la mirada. Asimilaciones de geometría. Mirada en geometría. Designación e identificación.*

1. INTRODUÇÃO

Os caminhos para uma discussão profícua sobre a criação de um espaço para a aprendizagem da geometria são sintetizados na figura espacial do Nó de Borromeu, a seguir.

Figura 1: Relação entre diversos sistemas semióticos que compõem a semiosfera do olhar em geometria



Fonte: Moretti (2013, p. 300)

Podemos destacar, nesta figura:

- a ideia dos olhares icônicos e não icônicos em Duval (2005);
- a ideia das apreensões na aprendizagem em geometria, ainda em Duval (1995, 1997, 2012a, 2012b);
- com a inclusão do conteúdo geométrico a ser tratado, os sistemas semióticos que compõem o ambiente de aprendizagem são integrados à ideia de semiosfera desenvolvida por Lotman (1990, 2005).

Além dessas ideias, traremos para discussão a questão da identificação e da designação, temas fundamentais na resolução de problemas em matemática, em particular na resolução de problemas em geometria.

Lotman concebe a ideia de semiosfera em analogia ao conceito de biosfera de Vladimir I. Vernadsky[4] (“a totalidade e o todo orgânico da matéria viva e também a condição para a continuação da vida”) e a define como:

> ... um espaço semiótico para a existência e funcionamento de linguagens, não a soma total das diferentes linguagens; em um certo sentido, a semiosfera tem uma existência prévia e está em constante interação com as linguagens. LOTMAN (1990, p. 123).

Lotman (1990, p. 127) considera que semiosferas construídas a partir de sistemas semióticas heterogêneos são mais promissoras por terem mais possibilidade de ganho de informação. A heterogeneidade dos sistemas semióticos, em Lotman, pode ser enquadrada no estágio do terceiridade de um signo, correspondente ao nível das categorias mais evoluídas dos signos em Charles S. Peirce.

Em Moretti (2013), é elaborado um espaço semiótico, uma *semiosfera do olhar*, considerando a aprendizagem da geometria, principalmente nas séries iniciais do ensino fundamental. Nessa semiosfera, a ênfase foi dada à educação do olhar para a aprendizagem da geometria. Buscamos, nos trabalhos de Duval (1995, 1997, 2012a, 2012b), van Hiele e van Hiele-Geldof (1958), Frostig e Horne (1964) e Hoffer (1977), sobre as categorias de capacidades espaciais, um forte apoio à sua construção.

2. AS APRENSÕES NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

Um caminho frutífero para compreendermos o modo como acontece a aprendizagem da geometria é a partir da ideia das *apreensões*, desenvolvida por Duval (1995, p. 173-207; 2012a, p. 120-153), que se divide em apreensões perceptiva, discursiva, operatória e sequencial. Podemos destacar, desde já, a posição central dada à **apreensão perceptiva**, que apresenta a fundamental **função de identificação**. Sobre as apreensões perceptiva e discursiva, Duval (2012a, p. 120, 121) escreve:

> Não importa qual a figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas e outra controlada que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva de elementos figurais.

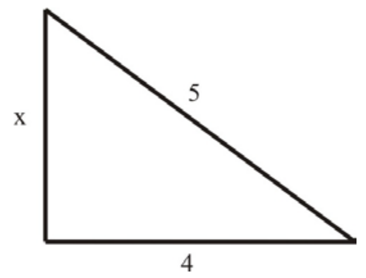
[4] Geólogo russo especialista em geoquímica.

Esta citação alerta para o fato de que uma figura não é o que ela mostra, mas o que é levada a mostrar, em geral, o que está no enunciado.

O exemplo estudado por Mello (1999, p. 65), apresentado na Figura 1, a seguir, revela uma forte vinculação das apreensões perceptiva e discursiva.

Figura 1: Exemplo apresentado por Mello (1999, p. 65)

> Calcule os valores possíveis de x na figura, dados os comprimentos na mesma unidade de medida.

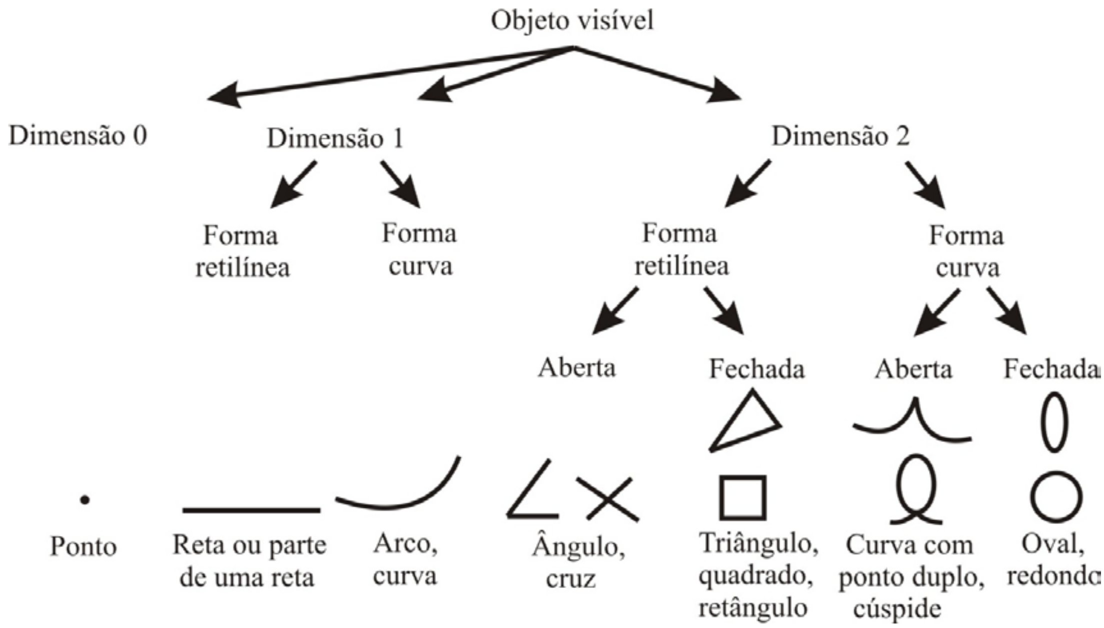


Neste problema, a posição do triângulo praticamente determina o tipo de tratamento a ser empreendido. Os alunos são compelidos, pela apreensão perceptiva da figura, à aplicação do Teorema de Pitágoras. Dois fatores exercem esta influência: a posição do triângulo que sugere fortemente um ângulo reto em uma posição bastante privilegiada (lados horizontal e vertical) e os valores 4 e 5 que lembram a tríade pitagórica 3, 4 e 5, conhecida de muitos alunos, sobrepujando o que está expresso na formulação da questão "**Calcule os valores possíveis de x ...**". Esta impressão inicial, quando nos deparamos com uma figura, é individual – é a apreensão perceptiva da figura que precisa ser levada em conta quando pretendemos ensinar ou aprender geometria. O que se chama de **figura geométrica** é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva: é preciso ver a figura geométrica a partir do que é dito e não das formas que se destacam ou das propriedades evidentes. Além disso, Duval (1995, p. 174) alerta para o fato de que:

> A necessidade de coordenar os tratamentos que se originam dos registros figurais e discursivos, a falsa proximidade entre os tratamentos matematicamente pertinentes e aqueles espontaneamente praticados em cada um desses dois registros, comandam os problemas ligados à aprendizagem da geometria.

Os problemas de aprendizagem da geometria encontram explicação nas dificuldades dessa coordenação e, também, nos tratamentos espontâneos ligados a cada um desses registros, o figural e o discursivo (Figura 2, a seguir).

Figura 2: Classificação das unidades figurais elementares



Fonte: Duval (1995, p. 177)

Dois aspectos podem ser ressaltados a partir dos elementos que compõem uma figura: a exigência de uma avaliação qualitativa desses elementos (curva aberta, fechada, redonda, oval, reta, ponto, arco etc.) e a relevância da dimensão (D0, D1, D2, D3). Sobre a dimensão, Duval (1995, p. 178) escreve:

> Mesmo uma figura aparentemente reduzida a uma só unidade de dimensão figural 2 (um quadrado, por exemplo), só é uma figura, em matemática, à condição de que seja considerada como uma configuração de unidades figurais de dimensão 1 (os segmentos formando os lados), uma vez que são as relações (paralelismo, simetria, tangência,...) entre as unidades figuras elementares o conteúdo pertinente de uma figura geométrica.

A figura do Exemplo 1, tratado adiante, é de um trapézio, figura fechada, convexa e de dimensão 2 (D2). Para a resolução do problema, esta figura é transformada na Figura E2, composição de dois retângulos, ambos D2. No entanto, no momento em que a fórmula da área do trapézio deve ser fornecida, o que são olhados nessas figuras: o ponto (D0) e, para definir os lados b e B – b, ambos D1. A causa de insucesso em muitos problemas em geometria está na dificuldade de olhar uma figura nas dimensões inferiores ao que é dada. Neste exemplo, é preciso olhar elementos em D0 e D1 em uma figura D2 e ainda permanecer, em alguns momentos, em D2.

Nesta classificação, podemos observar que um ponto de dimensão D0, por exemplo, deverá, em algum problema, ser identificado em uma figura D1 (ponto médio em um segmento de reta, por exemplo), em uma figura de dimensão D2 (vértice de um triângulo, por exemplo). Do mesmo modo, podemos imaginar figuras de dimensão D1 identificadas em figuras de dimensão D2 e figuras D2 em figuras D3.

Duval (1995, p. 181-182) argumenta que, no lugar do termo *apreensão perceptiva*, podemos também dizer **apreensão gestáltica**. A gestalt, ou psicologia da forma, procura entender como as figuras organizam-se e são percebidas pelo sujeito. Algumas leis da gestalt importantes para a aprendizagem da geometria são as seguintes (GOMES FILHO, 2004, p. 27 - 38):

- **Unidade**. Uma figura que pode ser consubstanciada em um único elemento, ainda que em um sentido mais amplo, pode ser entendida como um conjunto de vários elementos, configurando o todo como um único elemento. A foto de uma multidão: o conjunto caracteriza um todo, uma multidão, mas cada indivíduo também pode ser considerada uma parte desse todo, um elemento;
- **Pregnância da forma**. As forças de organização da forma tendem a ser vistas de tal modo que a estrutura resultante é tão simples quanto o permitem as condições dadas; a possibilidade perceptiva de destacar, evidenciar e separar unidades formais em um todo ou em partes desse todo;
- **Fechamento**. As forças de organização da forma encaminham-se para uma ordem espacial que tende para a formação em todos fechados. É importante observar que a gestalt trata da sensação: uma figura pode não estar fisicamente fechada, mas ser percebida como tal;
- **Continuidade**. É a sensação de como as partes de uma figura se sucedem para formar um todo coerente, sem quebras e interrupções na sua fluidez visual;
- **Proximidade**. Os elementos próximos um dos outros tendem a ser vistos como unidades dentro de um todo.

Quanto à forma, as figuras podem organizar-se em diversas dimensões: ponto, linha, plano e volume. Pode ainda ter uma configuração real ou esquemática e quanto à categoria conceitual, as figuras organizam-se em harmonia, desarmonia, equilíbrio (simetria), desequilíbrio (assimetria) e contraste. Em uma figura, "É impossível construir rigorosamente o todo pela adição das partes". (GUILLAUME, 1979, p. 47).

2.1. APREENSÃO OPERATÓRIA

Na resolução de problemas que envolvem figuras, podemos distinguir dois níveis: o primeiro nível corresponde à apreensão gestáltica que influencia fortemente o segundo nível que é o da **apreensão operatória**, apreensão das operações sobre as figuras com fins heurísticos, de descoberta da resolução do problema.

A apreensão operatória trata das modificações geométricas possíveis em uma figura, que podem ser feitas de muitas maneiras (Quadro 1).

Quadro 1: Tipos de apreensão operatória de figuras

TIPO DE MODIFICAÇÃO FIGURAL	**OPERAÇÕES QUE CONSTITUEM A PRODUTIVIDADE HEURÍSTICA**	**FATORES QUE INTERFEREM NA VISIBILIDADE**
MODIFICAÇÃO MEREOLÓGICA (decomposição da figura em subfiguras)	- Reconfiguração intermediária - Imersão	- Característica convexa ou não convexa das partes elementares
MODIFICAÇÃO ÓTICA	- Superposibilidade - Anamorfose	- Recobrimento parcial - Orientação
MODIFICAÇÃO DE POSIÇÃO	- Rotação - Translação	- Estabilidade das referências do campo perceptivo para o suporte das figuras

Fonte: Duval (2012a, p. 127).

O quadro nos mostra várias possibilidades de operação sobre figuras. Vamos abordar algumas delas, adiante, a partir de exemplos, alguns deles, comuns em livros didáticos.

As apreensões não aparecem de forma isolada. Em algum problema, uma pode ser mais requisitada do que outra, mas todas elas aparecem em maior ou menor grau. Veremos, adiante, vários exemplos em que a reconfiguração intermediária é utilizada e em que há sinergia das várias apreensões na resolução de um mesmo problema. Os problemas em geometria, mesmo aqueles com aparência simples, podem tornar-se mais complexos, pelo fato de existir até uma quádrupla apreensão na resolução desses problemas, o que pode elevar o grau de não congruência semântica. Dependendo do problema, a articulação, principalmente, entre dois ou mais tipos de apreensão pode ser requerida na sua resolução. Duval (1997) destaca quatro delas:

i. O que chamamos de **figura geométrica** é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e discursiva: é preciso ver a figura geométrica a partir das hipóteses e não das formas que se destacam ou das propriedades evidentes. A apreensão discursiva é subordinada pela apreensão perceptiva;

ii. O que chamamos de **visualização** é o resultado da conexão entre as apreensões perceptiva e operatória. A visualização não exige nenhum conhecimento matemático, mas ela pode comandar a apreensão operatória;

iii. A **heurística** e a **demonstração** são resultado da conexão entre as apreensões operatória (que é subordinada pela apreensão perceptiva) e discursiva;

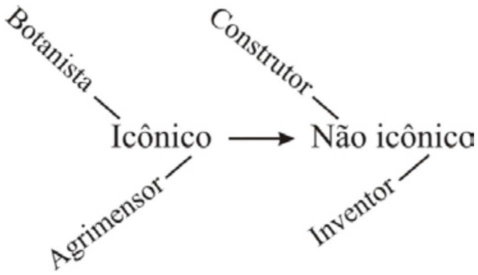
iv. A **construção geométrica** é o resultado da conexão entre as apreensões discursiva e sequencial – especialmente requisitada em atividades dessa natureza, de construção geométrica, também requer a apreensão perceptiva.

Por essas articulações, podemos perceber a importância da apreensão perceptiva na aprendizagem da geometria: as apreensões operatória, discursiva e sequencial subordinam-se, em maior ou menor grau, dependendo do tipo de problema, à apreensão perceptiva. A importância da apreensão perceptiva leva Duval (2005, p. 5-12) a caracterizar diversas maneiras de olhar, as quais sintetizamos na Figura 3, a seguir.

3. A EVOLUÇÃO DOS OLHARES EM GEOMETRIA

Podemos perceber que o esquema da Figura 3 possui uma orientação que vai do olhar do botanista a um olhar mais elaborado, o olhar do inventor; apreender a olhar em geometria é aprender a fazer os olhares desse percurso. O passo inicial é a aprendizagem do olhar icônico (sem perder de vista o olhar não icônico).

Figura 3: As quatro maneiras de olhar uma figura geométrica



Fonte: Moretti (2013, p. 293), a partir de Duval (2005, p. 5 - 12).

O **olhar botanista** é aquele que permite reconhecer o contorno de formas, diferenciar um triângulo de um quadrilátero ou de uma figura oval; é um “olhar qualitativo”. As atividades que exigem esse tipo de olhar possuem muito pouco do que poderia ser chamado de *atividade* em geometria. Muitas vezes são confundidas como tal por tratarem de figuras geométricas euclidianas típicas, e poderiam tratar de qualquer outro tipo de forma de figura, como por exemplo, de formas diferentes de folhas de árvores.

Não há nenhum tipo de propriedade, medida ou relação que precisa ser reconhecida em atividades que requerem este tipo de olhar; basta apenas observar semelhanças e diferenças sem, no entanto, quantificá-las ou estabelecer relações métricas entre elas. No entanto, as qualidades requeridas neste olhar preparam os alunos para os demais olhares.

O **olhar agrimensor** é aquele que faz medidas no terreno e consegue passar essas medidas para o plano do papel. As atividades que exigem este tipo de olhar são aquelas que passam de uma escala de grandeza a outra: "neste tipo de atividade, as propriedades geométricas são as mobilizadas para fins de medida", como por exemplo, o procedimento utilizado por Erastóstenes para medir o raio da terra (DUVAL, 2005, p. 6).

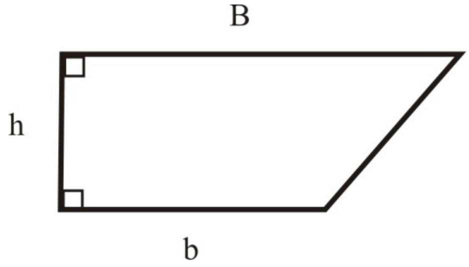
O **olhar do construtor** se forma no uso de instrumentos – régua não graduada e compasso. O aluno pode verdadeiramente tomar consciência que uma propriedade geométrica não é apenas uma característica perceptiva (DUVAL, 2005, p. 6). Atualmente, alguns programas computacionais – como, por exemplo, o *GeoGebra* e o *Cabri géomètre* – podem substituir o uso desses instrumentos.

O olhar do **inventor** é aquele que, para resolver um problema, adiciona traços na figura dada, opera sobre a figura e a modifica para descobrir um procedimento de resolução. Um exemplo de uma atividade para o inventor poderia ser: como dividir um triângulo em duas partes para que essas partes possam ser acopladas de modo a formar um paralelogramo (DUVAL, 2005, p. 6). Esses olhares caminham de um lado a outro lado conforme as apreensões em geometria são exigidas. No olhar do botanista, exige-se essencialmente a apreensão perceptiva. Na outra ponta, todas as apreensões participam das atividades do olhar do inventor.

4. DISCUSSÃO DE EXEMPLOS

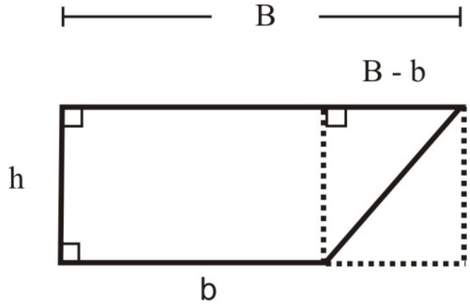
O Exemplo 1, apresentado a seguir, é bastante encontrado em livros didáticos: trata da dedução da fórmula do cálculo da área de um tipo de trapézio.

Exemplo 1:
Estabelecer a fórmula da área do trapézio a seguir.



Modificações nesta figura e que levam a figura a seguir, nos permitem obter a fórmula para o cálculo da área deste trapézio.

Figura E1: Reconfiguração intermediária (transformação mereológica) para um tipo de resolução para o problema do Exemplo 1



Fonte: os autores.

Com o traço feito, o trapézio da figura E1 pode ser agora visualizado como a composição de dois retângulos. Outra questão, nem sempre evidente, é a **identificação** e a **designação** das arestas dessas figuras: a área procurada é a soma das áreas do retângulo de dimensões b e h e da semiárea do retângulo de lados B - b e h. Portanto, $A = bh + \frac{(B - b)\,h}{2} = \frac{(B + b)\,h}{2}$.

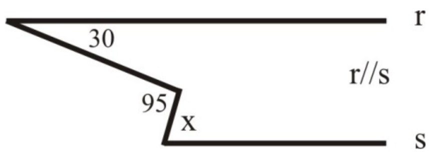
O traço vertical, para formar o triângulo retângulo de altura h e lado B - b e os traços para completar o triângulo como parte de um retângulo, foram fundamentais para a obtenção da fórmula para o cálculo da área do trapézio. Esta operação é denominada **reconfiguração intermediária** e é bastante comum no ensino de geometria em todos os níveis de ensino: é um dos tipos possíveis de **modificação mereológica (**ver Tabela 1**)**.

A apreensão perceptiva não exige nenhum conhecimento matemático, mas pode comandar a apreensão operatória. As apreensões perceptiva e operatória andam lado a lado e o que resulta da conexão entre elas é o que se chama de **visualização**: os traços efetuados na figura do Exemplo 1 são "provocados" pela apreensão perceptiva. Observemos que não basta fazer os traços de segmentos de reta, é preciso que haja também a identificação.

O olhar exigido para a resolução deste problema é o olhar não icônico, o olhar de inventor.

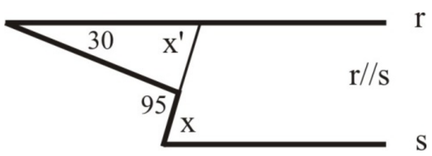
A seguir, no Exemplo 2, apresentamos mais um exemplo primoroso, também encontrado em livros didáticos, de um problema de geometria em que apenas um traço pode modificar completamente, para a maioria dos alunos, o grau de dificuldade da questão.

Exemplo 2:
Determinar o ângulo x na figura, a seguir, sendo as medidas dadas em graus.



Um simples traço acrescido à figura deste problema, por meio do prolongamento de um segmento, conforme apontado a seguir, torna o problema bem mais simples.

Figura E2: Reconfiguração intermediária para um tipo de resolução para o problema do Exemplo 2



Fonte: os autores.

Este traço traz à tona a congruência dos ângulos x e x' (alternos internos). A conta: x = x' = 180º - (30º + 85º) = 65º. Para a resolução do problema é necessário a passagem de D2 para D1, para que o traço possa ser efetuado e para que os ângulos x e x' congruentes (ângulos alternos internos), que possuem forma retilínea aberta de dimensão D2, sejam identificados. Além de tudo isso, o aluno precisa saber que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180º (triângulo formado com o traçado efetuado) e que o ângulo de 95º e o ângulo contíguo a ele são suplementares.

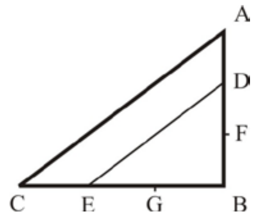
Novamente, o olhar do inventor é exigido na resolução deste problema.

No Exemplo 3, a seguir, apresentamos duas soluções criativas de uso da reconfiguração intermediária para o mesmo problema.

Exemplo 3:

ABC é um triângulo retângulo em B. AD = DF = FB = 1/3 AB

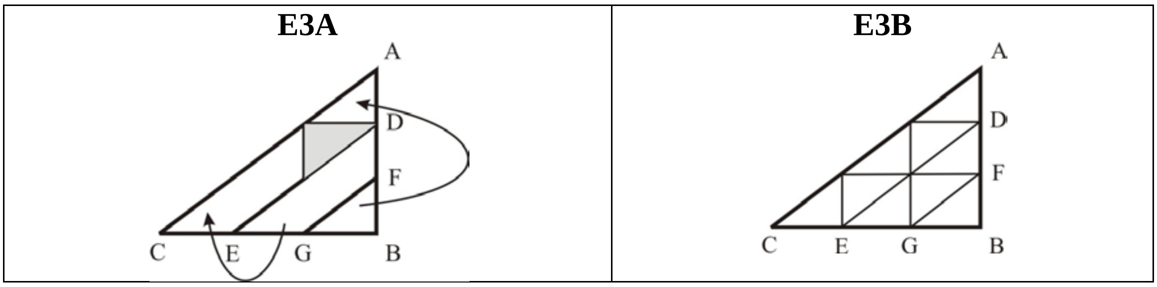
CE = EG = GB = 1/3 CB
Comparar as áreas DEB e ACED.
Justificar a resposta.



Fonte: Adaptado de PADILLA SANCHES (1992, p. 62)

Apresentamos, a seguir, duas soluções fornecidas pelos alunos de uma pesquisa levada a efeito por PADILLA SANCHES (1992).

Figuras E3A e E3B: Dois exemplos de reconfiguração intermediária para a resolução do problema do Exemplo 3.



Fonte: Adaptado de PADILLA SANCHES (1992, p. 66, 67).

A reconfiguração intermediária é utilizada essencialmente em ambas as soluções. No caso em E3A, cada subfigura do triângulo DEB é identificada, pelo aluno, com uma subfigura de ACED de mesma área, para concluir que um triângulo (sombreado na figura E3A) não está relacionado e, deste modo, ACED tem área a mais do que o triângulo DEB.

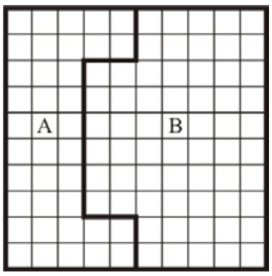
Na figura E3B, o aluno preenche o triângulo com uma malha triangular do modo como foi mostrado e conta o número de pequenos triângulos de mesma área para chegar à conclusão que em ACED tem mais "pequenos triângulos" do que no triângulo DEB: são 5 contra 4. Portanto, ACED tem mais área do que o triângulo DEB. Mesmo no caso de uma resolução que utilize fórmulas para o cálculo das áreas das figuras envolvidas, é necessário que uma reconfiguração seja pensada. Se S_X representa a área da figura X, AD = DF = FB = a e CE = EG = GB = b, temos o seguinte: $S_{ACB} = \frac{3a \times 3b}{2} = \frac{9ab}{2}$ e $S_{DEB} = \frac{2a \times 2b}{2} = \frac{4ab}{2}$. Deste modo, $S_{ACED} = S_{ACB} - S_{DEB} = \frac{9ab}{2} - \frac{4ab}{2} = \frac{5ab}{2}$.

Os cálculos feitos acima mostram que S_{ACED} é maior do que S_{DEB}. Para estabelecer a área de ACED, é necessário pensar em uma reconfiguração: subtrair da área da figura do triângulo ACB a área do triângulo DEB. O primeiro tipo de solução permanece, essencialmente, em D2, em que áreas são comparadas. O segundo tipo de resolução exige a passagem de D2 para D1 e D0 na construção da malha triangular. A forma organizada por meio dos cálculos das áreas, também exige as mudanças de dimensão de D2 para D1 e D0 na figura quando das identificações dos segmentos utilizados na fórmula para os cálculos das áreas. Nesses tipos de resoluções apresentadas, os olhares do inventor são exigidos. É um exercício de geometria bastante completo.

No Exemplo 4, tratado a seguir, há uma "armadilha" criada pela apreensão gestáltica presente na formulação da questão de que "A é menor que B", o que pode explicar a resposta mais frequente e incorreta de que o perímetro de A é menor do que o de B. Essa questão, submetida a um grupo de 392 alunos do primeiro ano do ensino médio, obteve 76% de respostas corretas para a área e 31% de respostas corretas para o perímetro.

Exemplo 4:

Assinale a resposta correta:
a)
O perímetro da parcela **A** é igual ao perímetro da parcela **B**
O perímetro da parcela **A** é maior do que o perímetro da parcela **B**
O perímetro da parcela **A** é menor do que o perímetro da parcela **B**
Explique a escolha.
b)
A área da parcela **A** é igual a área da parcela **B**
A área da parcela **A** é maior do que a área da parcela **B**
A área da parcela **A** é menor do que a área da parcela **B**
Explique a escolha.



Fonte: Adaptado de CAPES/COFECUB (1996).

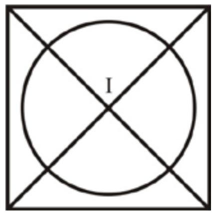
Entre aqueles que responderam corretamente a questão sobre a área, 41% deles se deixam levar pela apreensão perceptiva e erram a questão sobre o perímetro. Para acertar essas questões, é preciso ver um grande quadrado (D2) repartido por um traço comum (D1), a partir dos meios de dois de seus lados opostos, em duas partes diferentes A (D2) e B (D2).

É essa mudança dimensional requerida na percepção que dificulta o exercício. Além disso, o fundo quadriculado reforça a predominância da apreensão das unidades figurais D2 sobre a apreensão das unidades D1. Em relação à resposta sobre a área, a figura é congruente com a questão. Mas, para o caso do perímetro, a congruência semântica que é levada pela apreensão perceptiva encaminha ao erro. A questão exige o olhar do agrimensor - é necessário fazer medidas para não se deixar levar pela apreensão gestáltica.

O problema, a seguir, exige as apreensões perceptiva, operatória e principalmente a apreensão sequencial.

Exemplo 5:

Considere a figura e as frases a seguir:
a - Chame de **I** o ponto onde as diagonais se cortam
b - Desenhe um quadrado com 5cm de lado
c - Trace o círculo de centro em **I** no interior do quadrado
d - Trace as diagonais do quadrado



Para reproduzir a figura, é preciso estabelecer a ordem das frases **a**, **b**, **c**, **d**.
Encontrar a ordem dessas frases: não é preciso reescrevê-las, apenas indicá-las pelas letras.

Fonte: Adaptado de CAPES/COFECUB (1996).

Perceptivamente, a figura superpõe três unidades figurais: um quadrado, as suas diagonais e um círculo interior de centro I. A ordem a ser estabelecida exige a apreensão sequencial. Três instruções são dadas nomeando explicitamente cada uma dessas três unidades figurais, a quarta sendo apenas uma instrução de designação do ponto I. Não existe, portanto, nenhuma dificuldade de reformulação levando em conta as propriedades necessárias que desvie para outra figura auxiliar.

Essa questão, submetida a um grupo de 392 alunos do primeiro ano do ensino médio, obteve apenas 23% de respostas corretas (ordem bdac) e 39% de respostas para as ordens que começam por bd: bdac e bdca. A resolução desse exercício exige o olhar não icônico, o olhar do construtor.

A questão, a seguir, pede a construção da figura dada no Exemplo 5 com o uso de instrumentos.

Exemplo 6:

Construa a figura seguindo, na ordem, as instruções seguintes:

a - Desenhe um quadrado com 5cm de lado;
b - Trace as diagonais do quadrado;
c - Chame de **I** o ponto onde as diagonais se cortam;
d - Trace o círculo de centro em **I** no interior do quadrado.

Fonte: Adaptado de CAPES/COFECUB (1996).

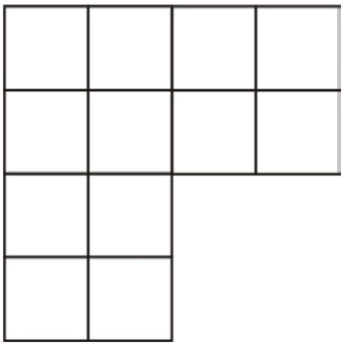
Trata-se de uma questão de construção geométrica com o uso de instrumentos que requer, para a sua execução, todas as apreensões: perceptiva, sequencial, discursiva e operatória. A primeira instrução parece ser a mais complexa de todas; muitos alunos podem fazer o quadrado sem tomar o cuidado com a perpendicularidade dos lados contíguos. A questão pode ser feita sobre folha quadriculada, o que torna mais simples a construção do quadrado e, consequentemente, da figura como um todo. A construção vai exigir diversas passagens das dimensões D0 (pontos), D1 (segmentos de reta), D2 (quadrado e círculo). A resolução desse exercício exige o olhar de construtor; entretanto, parece ser mais complexa do que a resolução do exercício do Exemplo 5, por exigir as passagens de forma mais enfática às dimensões D0 e D1.

Esse exercício também pode ser também formulado para ser executado em um ambiente informático, com o uso de software de construção geométrica, como por exemplo o *GeoGebra*, que é dinâmico e pode, a partir de seus recursos (ferramenta de arrastamento, por exemplo), fazer com que o aluno perceba erros na sua construção.

O exercício a seguir exige, para a sua resolução, a operação de reconfiguração, uma operação possível da apreensão operatória.

Exemplo 7:

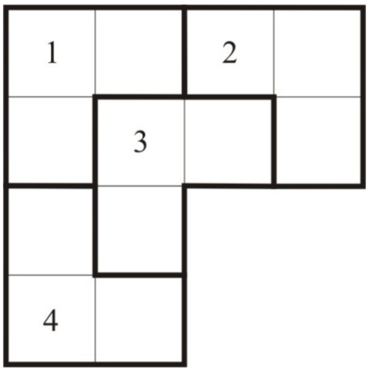
É possível dividir esta figura em quatro partes que possam ser sobrepostas? Marcar os traços sobre a figura.



Fonte: PADILHA SANCHEZ (1992, p. 89).

Neste exemplo, a apreensão perceptiva comanda a apreensão operatória na descoberta das porções da figura que podem sobrepostas.

Figura E7: Reconfiguração intermediária para a resolução do exemplo 7



Fonte: PADILHA SANCHEZ (1992, p. 90).

A figura padrão a ser encontrada é fechada, não convexa, mas possui a mesma forma da figura dada. Além da operação de reconfiguração intermediária, entram em jogo duas operações de **modificação de posição,** a **translação** e a **rotação** (ver Tabela 1)**,** para que seja possível sobrepor as partes encontradas, conforme exige o problema.

A figura do problema do Exemplo 7 possui doze quadrados que devem ser divididos em quatro partes e sobrepostas. A sobreposição das figuras exige as operações de translação e rotação isoladamente ou simultaneamente: tomando por referência a porção 1 (com 3 quadradinhos) da figura E7, a porção 3 a sobrepõe por translação, mas 2 e 4 exigem, além da translação, a rotação para que o aluno possa fazer a sobreposição. A resolução desse problema exige o olhar do inventor e se mantém, essencialmente, na dimensão D2. Segundo Padilha Sanchez (1992, p. 89), com relação a esse exercício:

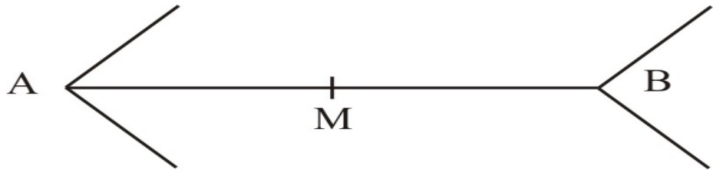
> O regrupamento pertinente das partes elementares forma sub-figuras que são **não convexas** e isto é um fator que joga um papel importante para encontrar a reconfiguração intermediária pertinente entre aquelas possíveis.

5. CONCLUSÕES

Os diversos elementos presentes na aprendizagem da geometria que tomam por base as apreensões e os olhares em geometria formam uma semiosfera que permite organizar o ensino e a aprendizagem da geometria no ensino básico. Na organização das atividades, é preciso compreender desde o olhar icônico até o olhar não icônico.

Existe hierarquia nos diferentes tipos de olhares, mas isso não quer dizer que uma questão que exige determinado tipo de olhar, por exemplo, o olhar do botanista, é mais simples do que aquela que exige o olhar mais evoluído, o olhar do inventor. Para resolver o problema do Exemplo 8, a seguir, será necessário o olhar do agrimensor; a dificuldade maior tem origem na apreensão perceptiva, que sugere fortemente que o segmento AM é menor do que o segmento MB.

Exemplo 8:
O segmento AM é maior, menor ou igual ao segmento MB?



Fonte: adaptado de Guillaume (1979, p. 91).

Se nos deixássemos levar pela apreensão perceptiva, possivelmente daríamos uma resposta errada. Para responder corretamente, será necessário medir e verificar que os segmentos AM e MB possuem o mesmo comprimento: a partir do olhar do agrimensor, exigido para a resolução do problema, é possível responder corretamente ao problema. A apreensão perceptiva pode comandar as demais apreensões; em geral, é na apreensão operatória que a busca da solução encontra eco. A ligação entre ambas denomina-se *visualização*: é preciso visualizar para entrar na resolução do problema.

O Quadro 2, a seguir, resume os principais pontos observados nos exemplos tratados.

A classificação, conforme fizemos nesse quadro de exemplos discutidos, nos dá informações a respeito dos aspectos cognitivos e semióticos mais importantes exigidos nas resoluções desses problemas. Eles são relativos aos tipos de procedimentos de resolução apresentados; para outras formas de resolução, outros elementos cognitivos e semióticos podem ser exigidos. No caso de E3A e E3B, por exemplo, as soluções apresentadas são bastante criativas: ambas exigem o olhar do inventor, mas a diferença mais importante entre elas é que em E3A (reconhecimento de porções de áreas equivalentes) a mudança de dimensão não é tão importante quanto no procedimento em E3B (construção da malha triangular).

Quadro 2: resumo dos aspectos cognitivos e semióticos exigidos nos procedimentos utilizados nas resoluções dos 8 exemplos apresentados.

EXEMPLOS	APREENSÃO	OLHAR	MUDANÇA DE DIMENSÃO	DESIGNAÇÃO	IDENTIFICAÇÃO
1	Perceptiva, discursiva, operatória	Inventor	Sim	Sim	Sim
2	Perceptiva, discursiva, operatória	Inventor	Sim	Sim	Sim
3 (E3A)	Perceptiva, discursiva, operatória	Inventor	Não	Não	Sim
3 (E3B)	Perceptiva, discursiva, operatória	Inventor	Sim	Não	Sim
4 a	Perceptiva, discursiva	Agrimensor	Sim	Não	Não
4 b	Perceptiva, discursiva	Botanista	Não	Não	Não
5	Perceptiva, discursiva, Sequencial	Construtor	Sim	Sim	Sim
6	Perceptiva, operatória	Construtor	Sim	Sim	Sim
7	Perceptiva, discursiva, operatória	Inventor	Não	Não	Sim
8	Perceptiva, discursiva, operatória	Agrimensor	Não	Não	Não

Fonte: os autores.

Examinado, ainda, a Tabela 2, podemos verificar que a questão 4a é mais complexa do que a questão 4b. Este última exige o olhar mais elementar de todos, que é o olhar do botanista, enquanto a outra (4a) exige mudança de dimensão e o olhar do agrimensor.

O que mostramos é que na aprendizagem da geometria, principalmente em problemas que envolvem figuras, é preciso considerar: a organização gestáltica das formas, como as figuras organizam-se e são percebidas pelo sujeito; as apreensões em geometria; os tipos de formas, dimensões das figuras e passagens entre dimensões; a identificação e designação de elementos nas figuras e; os olhares em geometria. Ao conjunto desses elementos damos o nome de **Semiosfera de Aprendizagem em Geometria**.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS

CAPES/COFECUB (1996) *Relatório n. 174/95* – Relatório das atividades referentes ao período de junho de 1995 a agosto de 1996. Brasília.

DUVAL, R. (2012a) Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Méricles T. Moretti. *REVEMAT*, v.7, n.1, UFSC/MTM/PPGECT, Florianópolis. Disponível em: <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>. Acesso em: 26 jun. 2015.

____________. (2012b) Diferenças semânticas e coerência matemática. Trad. Méricles T. Moretti. *REVEMAT*, v.7, n.1, UFSC/MTM/PPGECT, Florianópolis. Disponível em: <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>. Acesso em: 26 jun. 2015.

____________. (1997) La notion de registre de représentation sémiotique et l'analyse du fonctionnement cognitif de la pensée. IN: *CURSO DADO A PUC/SP*.

____________. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, v. 10, p. 5 - 53, IREM, Strasbourg.

____________. (1995) *Sémiosis et pensée humaine*: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang.

FROSTIG, M.; HORNE, D. (1964) *The Frostig Program for the Development of Visual Perception*. Chicago: Follet Publishing Co..

GOMES FILHO, J. (2004) Gestalt do objeto: sistema de leitura visual. São Paulo: Escrituras.

GUILLAUME, P. (1979) *La Psichologie de la forme*. Paris: Flamarion.

HOFFER, A. R. (1977) *Mathematics Resource Project*: Geometry and Visualization. Palo Alto, Calif.: Creative Publications.

LOTMAN, Y. M. (2005) On the semiosphere. Tradução Wilma Clark. *Sign Systems Studies*, 33.1. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/galaxia/index>. Acesso em: 26 jun. 2015.

____________. (1990) *The universe of the mind:* a semiotic theory of culture. Trad. Ann Shukman. Londres: I. B. Tauris & Co. Ltd.

MELO, E. G. S. (1999) *Uma seqüência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da geometria*. Dissertação de de mestrado. PUC-SP.

MERRELL, F. (2003) Iúri Lótman, C. S. Peirce e semiose cultural. *Galáxia*, n. 5, PUCSP.

MORETTI, M. T. (2013) Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. *Acta Scientiæ*, v. 15, n. 2, p. 289-303, Canoas.

PADILLA SANCHEZ, V. (1992) *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*. Tese ULP: Estrasburgo.

VAN HIELE, P. M.; VAN HIELE-GELDOF, D. (1958) A method of initiation into geometry at secondary Scholl. In FREUDENTHAL, H. *Report on methods of initiation into geometry at secondary schools*. Groningen: J. B. Wolters. p. 67 – 80.