

REFLEXÕES E QUESTIONAMENTOS SOBRE PESQUISA EM EDUCAÇÃO ALGÉBRICA

REFLECTIONS AND QUESTIONS ABOUT RESEARCH IN ALGEBRAIC EDUCATION

JOSÉ LUIZ MAGALHÃES DE FREITAS¹

Resumo

Nesse estudo analisamos alguns aspectos sobre a pesquisa em Educação Algébrica, dentre eles a caracterização de álgebra e pensamento algébrico na educação básica, bem como de dificuldades na introdução e desenvolvimento de conteúdos relativos a essa subárea da matemática. Assim, apresentamos alguns questionamentos visando provocar reflexões sobre resultados de pesquisas e alguns desafios em Educação Algébrica na educação básica. Desse modo, apresentamos elementos para reflexão sobre características da álgebra e do pensamento algébrico, sobre possibilidades de abordagem introdutória da álgebra e também sobre perspectivas para pesquisas e para o desenvolvimento práticas pedagógicas de álgebra na educação básica.

Palavras Chave: Educação Algébrica; Pesquisa; Educação Básica

Abstract

In this study we analyze some aspects of research in Algebraic Education, including a characterization of algebra and algebraic thinking in basic education (up to 12th grade), as well as difficulties in the introduction and development of the content relating to this sub-area of mathematics. Questions are proposed in order to ignite reflections on research findings and challenges in Algebraic Education in basic education. We also propose elements for reflections on features of algebra and algebraic thinking; introductory algebra approaches, and perspectives for the research and teaching of algebra in basic education.

Keywords: Algebraic Education; Research; Basic Education

Introdução

É fato que há diferentes concepções sobre educação algébrica, bem como sobre pensamento algébrico e, conseqüentemente, de perspectivas de ensino e aprendizagem da álgebra. Também são muitos os questionamentos envolvendo o tema e, para iniciar nossas reflexões, vamos apresentar algumas questões que avaliamos como importantes.

Podemos iniciar buscando elementos que nos ajudem a caracterizar *em que consistem a Álgebra e a Educação Algébrica*.

¹ Professor do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul/UFMS – email: joseluzufms2@gmail.com

Embora não seja tarefa simples encontrar resposta satisfatória para essa questão, um caminho para identificar o que é *álgebra* consistiria em considerar aspectos históricos e epistemológicos de seu desenvolvimento. Assim, observa-se que durante muitos séculos a humanidade buscou meios de resolver equações e até o final do século XVIII a álgebra era constituída do estudo de *equações e expressões*. A partir daí, sobretudo com os trabalhos de Galois, ocorre uma ampliação, incorporando objetos abstratos como as *estruturas algébricas*. Nos dias de hoje, segundo Ponte *et al.* (2009, p. 7), “no centro da Álgebra estão relações matemáticas abstratas, que tanto podem ser expressas por equações, inequações ou funções, como podem ser representadas por outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos”.

Surge então a seguinte questão: ***Quais são as principais “visões ou concepções”, de Álgebra e de Educação Algébrica que permeiam as pesquisas e práticas pedagógicas na educação básica?***

Uma concepção de Álgebra é a de que ela se limita às *equações e expressões*, e que seu estudo consiste essencialmente em realizar transformismos algébricos, muitas vezes limitados ao cálculo algébrico, equações do 1.º e 2.º graus e sistemas de equações – enfoque este ainda parece bastante presente na educação básica. Segundo Ponte *et al.* (2009, p. 7-8):

Trata-se de uma visão redutora da Álgebra, que desvaloriza muitos aspectos importantes desta área da Matemática, quer relativos à Antiguidade (resolução de problemas), quer actuais (relações, estruturas algébricas), quer mesmo do período “clássico” da Álgebra (estudo de funções).

Ainda sobre essa primeira perspectiva de abordagem da álgebra, Ponte *et al.* (2009, p. 13-14) observam que:

A primeira corrente corresponde à *visão letrista*, na expressão de Rómulo Lins e Joaquin Giménez, que reduz a Álgebra exclusivamente à sua vertente simbólica. Esta visão tem uma versão “pobre”, em que o objectivo é aprender a manipular os símbolos apenas por treino e prática, e tem uma versão “melhorada” segundo a qual o objectivo é aprender a manipular correctamente os símbolos, recorrendo a apoios intuitivos como modelos analógicos, de carácter geométrico (como figuras, objectos) ou físicos (como a balança). Com estes apoios intuitivos procura dar-se significado às manipulações, o que raramente se consegue, dada a preocupação central com os aspectos sintácticos. Esta perspectiva assume que a Álgebra constitui um instrumento técnico para a resolução de problemas mais poderoso que a Aritmética e coloca a ênfase no domínio das respectivas regras sintácticas para a transformação de expressões – actividade que Dario Fiorentini, Ângela Miorim e António Miguel designam de *transformismo algébrico*. O pressuposto é que se o aluno dominar essas regras, posteriormente é capaz de as aplicar a situações concretas.

Outra perspectiva, bem próxima desta, é a de que a álgebra é constituída de um conjunto de *símbolos* e faz uso de uma linguagem algébrica, utilizando sintaxe própria. Segundo Ponte *et al.* (2009, p. 8):

Esta perspectiva não anda longe da concepção formalista da Matemática – bem popular no início do século XX, com o logicismo de Gottlob Frege e Bertrand Russell e o formalismo de David Hilbert – segundo a qual a Matemática é essencialmente um jogo de símbolos sem significado.

A independência e coerência das formas de relacionar seus objetos tornam a álgebra potente, mas também podem contribuir para seu isolamento. Assim, ao distanciar-se dos elementos concretos, ela pode vir a ser vista como jogo de símbolos de difícil compreensão e com pouco significado para os alunos. O jogo de símbolos, envolvendo propriedades algébricas e distante dos problemas reais, foi um dos principais fatores que provocaram o fracasso do Movimento da Matemática Moderna.

Para muitas pessoas, esse tipo de entrada na álgebra significa o momento de ruptura com a matemática, pois deixa de ter significado para elas. A letra pode ter vários níveis de generalidade na álgebra elementar. Várias classificações já foram feitas, dentre elas a de Kuchemann (1978), que identifica seis estatutos do uso de letras em álgebra: avaliada, ignorada, objeto (etiqueta), específico desconhecido, número generalizado (indeterminado) e variável. No que concerne às possibilidades de uso de letras em álgebra, quatro estatutos são mais frequentes: rótulo (etiqueta), incógnita, número indeterminado e variável. Dificuldades encontradas no aprendizado do cálculo literal e dos diferentes estatutos da letra têm sido objeto de várias pesquisas em Educação Matemática.

Nas últimas décadas vêm sendo realizados muitos estudos e pesquisas com o objetivo de delimitar o que poderia integrar a programação das escolas da educação básica, no que concerne à Álgebra. Esses estudos e pesquisas, visando delimitar o que e o quanto de Álgebra podem integrar os currículos da educação básica, fizeram emergir o interesse pela caracterização do *pensamento algébrico*. Assim, uma vez identificadas algumas características importantes da álgebra, tais como relações, propriedades, cálculo simbólico, padrões, funções e estruturas abstratas, cabe analisar questões relativas ao pensamento algébrico. ***Quais os principais elementos que o caracterizam? Em que nível de escolaridade ele pode ser explorado? Como ele se manifesta em outros campos da matemática, como o dos números e o da geometria?***

Estudos e projetos indicam que a abordagem do pensamento algébrico deve permear todos os níveis de escolaridade, inclusive na fase de alfabetização matemática nos anos iniciais do ensino fundamental.

Assim, encontramos nos materiais didáticos do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), de 2014, elementos importantes sobre o que os autores caracterizam como pensamento algébrico:

Este eixo diz respeito a uma série de habilidades que, de alguma forma, já constam nos outros eixos, seja no reconhecimento de padrões numéricos e na realização de determinados tipos de problemas, dentro do eixo números e operações, seja no reconhecimento de padrões geométricos e da classificação, presentes no eixo geometria. (BRASIL, 2014, p. 50)

Nesse material de apoio aos professores dos anos iniciais são explicitados também os objetivos e as habilidades esperadas dos alunos nesse nível de escolaridade:

Destaca-se como objetivo geral “compreender padrões e relações, a partir de diferentes contextos”, ou seja, possibilitar à criança:

- estabelecer critérios para agrupar, classificar e ordenar objetos, considerando diferentes atributos;
- reconhecer padrões de uma sequência para identificação dos próximos elementos, em sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples;
- produzir padrões em faixas decorativas, em sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples. (BRASIL, 2014, p. 50-51)

Borrvalho e Barbosa (s.d.), apresentam outros elementos para a caracterização do conceito de pensamento algébrico:

O *pensamento algébrico* diz respeito à simbolização (representar e analisar situações matemáticas, usando símbolos algébricos), ao estudo de estruturas (compreender relações e funções) e à modelação. Implica conhecer, compreender e usar os instrumentos simbólicos para representar o problema matematicamente, aplicar procedimentos formais para obter um resultado e poder interpretar e avaliar esse resultado. (BORRALHO; BARBOSA, [s.d.], p. 1)

Nesse contexto de estudos e pesquisas que visam compreender as dificuldades envolvidas no ensino e aprendizagem de álgebra na educação básica, tem origem então uma terceira corrente, que segundo Ponte *et al.* (2009), busca superar limitações das duas já mencionadas, sem negar as contribuições destas:

Assim, procura recuperar-se o valor instrumental da Álgebra, mas sem a reduzir à resolução de problemas suscetíveis de serem resolvidos através de uma equação ou um sistema de

equações. Procura dar-se ênfase aos significados que podem ser representados por símbolos levando os alunos a “pensar genericamente”, percebendo regularidades e explicitando essas regularidades através de estruturas ou expressões matemáticas e a “pensar funcionalmente”, estabelecendo relações entre variáveis. Procura agora valorizar-se a linguagem algébrica como meio de representar ideias e não apenas como um conjunto de regras de transformação de expressões simbólicas. Trata-se, no fundo, de promover o *desenvolvimento do pensamento algébrico*, [...]. (PONTE *et al.*, 2009, p. 14)

Segundo esses autores:

Um dos autores que escreveu sobre esta ideia foi o americano James Kaput, para quem o pensamento algébrico é algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático leccionado desde os primeiros anos de escolaridade. Kaput identifica, em 1999, cinco facetas do pensamento algébrico, estreitamente relacionadas entre si: (i) a generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) a manipulação de formalismos guiada sintacticamente; (iii) o estudo de estruturas abstractas; (iv) o estudo de funções, relações e de variação conjunta de duas variáveis; e (v) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos. Num texto mais recente, de 2008, Kaput refere de novo estes cinco aspectos, integrando os dois primeiros (simbolismo e generalização), que designa como “aspectos nucleares” (*core aspects*) da Álgebra, e considerando os três últimos como “ramos” (*strands*) deste domínio com expressão na Matemática escolar. (PONTE *et al.*, 2009, p. 9)

Diante do fato de que existem diferentes concepções de álgebra e de pensamento algébrico, surge então outra questão importante: ***Como realizar a introdução da álgebra para alunos da educação básica?***

Buscando resposta a essa questão, Artigue (2003) realizou um estudo mostrando que, embora a álgebra esteja presente nos programas do ensino fundamental de todo o mundo, sua introdução não ocorre da mesma maneira nos diferentes países. Na França, assim como na Itália, Israel e outros países, a introdução usual consistia em equações, acompanhada de cálculos com expressões algébricas, enquanto outros países, em particular os anglo-saxônicos, davam prioridade à expressão de regularidades (padrões) e à generalização. Artigue identificou ainda uma terceira forma, a dos Países Baixos, em que a ênfase está na modelagem de situações, privilegiando variáveis, funções e diferentes tipos de representação.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para os ciclos finais do ensino fundamental trazem orientações para a abordagem da álgebra nesse nível de escolaridade:

Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar,

resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a sintaxe (regras para resolução) de uma equação. (BRASIL, 1998, p. 50)

Pesquisas em Educação Algébrica

Após essa breve incursão sobre ideias e concepções de álgebra e pensamento algébrico, emerge a questão: *Que tipos de pesquisas em Educação Algébrica vêm sendo desenvolvidas e quais os principais desafios que ainda precisam ser enfrentados?*

Faremos aqui uma exposição geral, buscando analisar alguns resultados de pesquisas. Não temos o objetivo de empreender uma abordagem exaustiva do assunto, mas apenas de tentar pontuar aquelas que consideramos importantes.

Assim, retomamos alguns trabalhos que consideramos decisivos, como os de Chevallard (1985, 1989, 1990), sobre a *passagem da aritmética à álgebra*. Sobre esse tema, Chevallard publicou três artigos sobre transposição didática e modelagem algébrica, publicados na revista *Petit x* sob o título “Passagem da aritmética à álgebra no ensino de matemática no colégio”.

No primeiro artigo, Chevallard (1985) estudou a evolução da transposição didática, analisando o currículo e livros didáticos desde o início do século XX até a reforma da matemática moderna na década de 1970. Nessa abordagem histórica, mostrou a oposição secular entre o campo da aritmética e o algébrico.

No segundo artigo, Chevallard (1989) estudou o conceito de modelagem numa perspectiva curricular. Segundo ele, a reforma da educação básica na França, nos anos 1980, é marcada pelo triunfo empirista, que, no nível de escolaridade do colégio (correspondente ao nosso ensino fundamental II), se traduz em "um vigoroso impulso do numérico; pela dispersão e o esvaziamento da aprendizagem de ferramentas algébricas, por insistência ingênua sobre o concreto”. Por outro lado, considera que "o controle formal do cálculo funcional" deve ser o primeiro objetivo do ensino de álgebra no colégio. Esse domínio é expresso por uma aptidão para a modelagem, tanto extramatemática quanto intramatemática. Segundo ele, o ensino de álgebra no colégio deve assegurar, por um lado, uma habilidade formal de cálculo algébrico e, por outro, o domínio de uma dialética entre o numérico e o algébrico, o tratamento formal e o uso do cálculo algébrico.

Finalmente, na terceira parte, Chevallard (1990) dá pistas para o ensino de álgebra que combinam a modelagem e estudos de “sistemas”. Observa, por exemplo, que se os números naturais se revelam inadequados como ferramenta de estudo, como objeto de estudo fornecem um privilegiado, mas hoje negligenciado, campo de trabalho. "O estudo dos números naturais, portanto, aparece como um campo matemático aberto para o trabalho com o cálculo algébrico." Seu programa de investigação envolve a retomada de tais domínios como de emprego potencial.

De fato, o sistema de números inteiros como objeto de estudo oferece muitos fenômenos que podem ser modelados algebricamente e permite explorar conceitos da teoria dos números, como mostram Freitas, Lima e Silva (2011), que exploram o conjunto dos inteiros como campo experimental para introdução da álgebra na educação básica.

Outro bloco de pesquisas se interessa pelas *pseudocontinuidades entre a aritmética e a álgebra*, das quais apresentamos algumas a seguir, de forma breve.

Há um outro bloco de pesquisas, campo da álgebra elementar, as quais se interessam pelas pseudocontinuidades entre a aritmética e a álgebra, investigando dificuldades dos alunos relacionadas com a transição da aritmética à álgebra. Entre elas figuras as de Vergnaud *et al.* (1987) e de Kieran *et al.* (1991).

Segundo Vergnaud *et al.* (1987), a álgebra apresenta para os alunos uma dupla ruptura epistemológica, de um lado por causa da introdução de um *desvio formal* e, de outro, pela introdução de novos objetos matemáticos. Nesse desvio algébrico, o aluno deve manipular expressões formais que não dependem de "significado", pois se trata de um tipo de tratamento muito diferente daquele da aritmética. Essa ruptura provoca o fracasso de um grande número de alunos, que permanecem ligados às práticas de resolução aritmética. Vergnaud se questiona sobre a maneira "de considerar um determinado ensino de álgebra ou de pré-álgebra, em toda a escolaridade, incluindo a escola primária, para permitir que os alunos a abordem com um pouco mais de chance de sucesso essa ruptura epistemológica". Propõe alguns exemplos de problemas para alunos dos anos finais do ensino fundamental e observa as reações dos iniciantes fracos, indicando várias direções de pesquisa que podem ser tomadas com relação à introdução da álgebra. Observa que os alunos "iniciantes fracos em álgebra" têm dificuldades para produzir soluções de tipo algébrico.

Vergnaud *et al.* (1987) e Kieran *et al.* (1991) realizaram pesquisas em que mostram que o significado do sinal de igual pode ser "de efetivação de operações ou 'anúncio de um resultado'. Assim, para esses alunos o sinal de 'igual' não é simétrico, nem transitivo".

Para a maioria dos alunos no início do ensino secundário, o sinal de igualdade mantém o sentido do anúncio de um resultado de um cálculo aritmético, levando-os, por exemplo, a escrever a solução para um problema com duas operações, como $23 + 31 = 54$ e $54 - 14 = 40$, em uma única linha: $23 + 31 = 54 - 14 = 40$ (VERGNAUD *et al.* 1987, p. 260). "O sinal de igual é lido como 'dá' e é um sinal direcional da esquerda para a direita" (KIERAN *et al.*, 1991).

Considerações finais

Gostaríamos de finalizar com algumas reflexões sobre a questão: ***Quais as principais perspectivas para a pesquisa e o ensino de álgebra na educação básica?***

Para encontrar elementos de resposta para tal questão, nos apoiamos em alguns estudos do tipo "estado da arte", particularmente no livro *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching*, organizado por Bednarz, Kieran e Lee e publicado em 1996. Observamos que logo no primeiro capítulo os autores identificam e abordam cinco perspectivas para a introdução e desenvolvimento da álgebra: (1) histórica, (2) de generalização, (3) de resolução de problemas, (4) de modelagem e (5) funcional.

Embora os autores concordem que a introdução na álgebra escolar pode ocorrer seguindo diferentes perspectivas, propõem uma pergunta um tanto embaraçosa: ***O que nós sabemos sobre cada uma dessas abordagens e suas contribuições, bem como as dificuldades que cada uma delas provoca em parte dos alunos?***

Permeando todos os capítulos desse livro, encontramos temas, problemas e abordagens variadas, com valiosos subsídios aos leitores. O último capítulo traz um balanço dos progressos identificados na abordagem da álgebra. Nele são retomados aspectos da álgebra na história; caracterização do que é álgebra; interlúdio (valorização das razões para estudar álgebra); e as quatro abordagens: generalização, funções, resolução de problemas e modelagem. Os autores finalizam com a apresentação de quatro questões que apontam desafios a serem ainda enfrentados, tanto por professores de matemática quanto por pesquisadores da área de Educação Matemática:

1. ***Quais são as características essenciais do pensamento algébrico?***

- 2. O que pode ser construído no aprendizado de álgebra?**
- 3. Quais são os obstáculos encontrados na aprendizagem de álgebra?**
- 4. Como podemos escolher uma abordagem para levar à "iniciação em álgebra"?**

Nas discussões ocorridas no Grupo de Discussão sobre Educação Algébrica – GD8, durante o III Fórum de Discussão “Parâmetros balizadores da pesquisa em Educação Matemática”, realizado na PUC-SP em maio de 2015, alguns elementos importantes foram focalizados pelos participantes, dentre os quais destacamos alguns a seguir.

Uma das observações no grupo é que na aritmética já existe a presença da álgebra como forma de generalização de padrões por meio de regularidades envolvendo números e operações, sequências, equações diofantinas etc. Pesquisas e experimentações fazem crer que o conjunto dos números inteiros é um campo experimental fértil para introdução da álgebra elementar, desde os anos iniciais da educação básica. Por exemplo, uma criança, ao brincar com sua coleção de pedras, observa que contá-las cada vez em uma nova organização ou direção não altera sua quantidade. Nessa descoberta de que a ordem de contagem não altera o resultado estão embutidas propriedades importantes, como a comutativa da adição e da multiplicação, entre outras.

Outro ponto de convergência nas discussões do grupo é que a álgebra é mais que simbolismo algébrico: não é só linguagem; tem propriedades, relações, estruturas, ... De fato, a história da matemática mostra que as estratégias de resolução de equações, desde a antiguidade, com egípcios, babilônios, gregos e chineses, passando pela Idade Média, com destaque para as produções árabes, não faziam uso de letras e menos ainda do cálculo literal. Estes só vão aparecer a partir da segunda metade do século XVI, com Viète e Harriot. Antes disso, Diofanto, Tartaglia, Cardano e tantos outros, que só usavam a linguagem retórica natural com algumas poucas abreviações, denominada sincopação, realizaram mesmo assim descobertas notáveis, como as fórmulas de resolução de equações de 3.º e 4.º graus por meio de radicais.

Também foram analisadas dificuldades dos professores em utilizar resultados de pesquisas ou relatos de experiências que possibilitem outras abordagens da álgebra em sala de aula. Foram mencionadas lacunas na formação de professores, tanto na inicial quanto na continuada. As dificuldades apontadas incluem a de exploração e articulação entre diferentes contextos e linguagens. Foi ainda ressaltada a importância de que o professor saiba por onde caminhar, como intensificar o uso da linguagem natural e

conscientizar-se de que não basta dispor de um bom material: é preciso que seja um profissional bem formado. Outro aspecto que segundo os participantes ainda necessita de estudo e discussão entre os professores são as características do pensamento algébrico, que envolve tanto a generalização quanto a sintetização – ou seja, como explorar relações envolvendo situações empíricas e particulares aprimorando a linguagem e a abstração, cuja síntese está no registro simbólico.

Concluindo, sabemos que a introdução ao mundo da álgebra na educação básica não é tarefa simples, como vários estudos e pesquisas vêm apontando. Dentre as principais dificuldades, destacam-se o trabalho com os diversos *estatutos da letra* e a exploração de diferentes contextos e de articulações, bem como a mobilização adequada de *propriedades*, a identificação de *regularidades* e o processo de *generalização*.

Esperamos que esta narrativa possa contribuir em estudos e reflexões sobre o ensino e aprendizagem da álgebra, tanto por parte dos pesquisadores em Educação Matemática quanto de professores de matemática que atuam em salas de aula na educação básica.

Referências

- ARTIGUE, Michèle. *Enseigner les mathématiques aujourd'hui. Pourquoi? Pour qui? Comment?* Paris: Bulletin de l'APMEP, n. 449, pp. 742-756, 2003.
- BEDNARZ, Nadine, KIERAN, Carolyn and LEE, Lesley (org). *APPROACHES TO ALGEBRA: Perspectives for Research and Teaching*. Kluwer Academic Publishers Group. Netherlands, 1996.
- BOOTH, Lesley. Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire, *Petit x*, n. 5, pp. 5–17, 1985.
- BORRALHO, António e BARBOSA, Elsa. *Pensamento Algébrico e exploração de Padrões*. Publicação da Associação de Professores de Matemática de Portugal, disponível em http://www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf. Acesso em 12/04/2015.
- BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática - PCN*. Brasília: MEC / SEF, 1998.
- BRASIL, *Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa – PNAIC*. Caderno de Apresentação. Brasília: MEC/SEF, 2014. Disponível em http://pacto.mec.gov.br/images/pdf/cadernosmat/PNAIC_MAT_Apresentacao_pg001-072.pdf, acesso em 12/04/2015.
- CHEVALLARD, Yves. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. (1^{ère} partie): l'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, Grenoble, n. 5, pp. 51-94, Ed. IREM de Grenoble, 1985.

CHEVALLARD, Yves. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège (2^e partie), *Petit x*, Grenoble, n. 19, pp. 43-72, Ed. IREM de Grenoble, 1989.

CHEVALLARD, Yves. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège (3^e partie). *Petit x*, n. 23, pp. 5-38, Ed. IREM de Grenoble, 1990.

FIORENTINI, Dario, MIORIM, Maria Ângela, & MIGUEL, Antônio. Contribuição para um repensar... A educação algébrica elementar. *Pro-Posições*, 4(1), pp. 78-91, 1993.

FREITAS, José Luiz Magalhães de. *L'activité de validation lors du passage de l'arithmétique à l'algèbre: une étude des types de preuves produits par des élèves de collège et lycée*. Thèse. Montpellier: Université Montpellier II, 1993.

FREITAS, José Luiz Magalhães de, LIMA, Anete Valéria Masson Coimbra de, e SILVA, Maysa Ferreira da. O conjunto dos números inteiros como campo experimental para introdução da álgebra na Educação Básica. *Educação Matemática em Revista*, publicação da SBEM, v. 33, p. 4-12, 2011.

KAPUT, J. J. What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge, 2008.

KIERAN, Caroline. Cognitive processus involved in learning school algebra, Learning algebra. In *Mathematics and cognition*, J. Kilpatrick (ed.), Cambridge University press, 1991.

KUCHEMANN, D., Children's understanding of numerical variables, *Mathematics in school*, 7(4), 23-26, 1978.

LINS, Rômulo Campos e GIMENEZ, Joaquim. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. São Paulo: Papirus, 1997.

PONTE, João Pedro da, BRANCO, Neusa & MATOS, Ana. *Álgebra no Ensino Básico*. Publicação do Ministério da Educação de Portugal. Disponível em http://pt.slideshare.net/con_seguir/algebra-10386934. Acesso em 12/04/2015.

VERGNAUD, Gérard, CORTES A., FAVRE, e ARTIGUE, P., Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques, in *Actes du colloque de Sèvres: Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, p. 259 – 288, Editions la Pensée Sauvage, 1987.