

Registro figural no ambiente de geometria dinâmica

Figural Register in Dynamic Geometry Environments

JESUS VICTORIA FLORES SALAZAR¹
SADDO AG ALMOULOU²

Resumo

O presente artigo tem por objetivo definir o registro figural dinâmico. Para isso, com base na teoria de Registros de Representação Semiótica e na pertinência, para o ensino e aprendizagem de geometria, do uso de Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), fazemos uma releitura das três atividades cognitivas inerentes a todo registro de representação semiótica, no sentido de Duval, que chamamos formação dinâmica, tratamento dinâmico e conversão dinâmica, porque percebemos que, quando o sujeito interatua com AGD, as três atividades cognitivas possuem certas particularidades, que são apresentadas e analisadas por meio de exemplos concretos.

Palavras-chave: registro de representação semiótica; figura; ambientes de geometria dinâmica.

Abstract

This article aims to define the dynamic figural register. In order to do this, and based on the Theory of Registers of Semiotic Representation and on the relevance of the use of Dynamic Geometry Environments (DGE) for the teaching and learning of geometry, we reread the three cognitive activities essential in all register of semiotic representation in the Duval sense, which we call: dynamic formation, dynamic treatment, and dynamic conversion, since we perceive that, when the subject interacts with DGE, the three cognitive activities possess certain features that we present and analyze with specific examples.

Keywords: register of semiotic representation; figure, dynamic geometry environments.

Resumen

El presente artículo tiene por objetivo definir el registro figural dinámico. Para lo cual, con base en la teoría de Registros de Representación Semiótica y en la pertinencia, para la enseñanza y de aprendizaje de geometría, del empleo de Ambientes de Geometría Dinámica (AGD) hacemos una relectura de las tres actividades cognitivas inherentes a todo registro de representación semiótica, en el sentido de Duval, que llamamos: formación dinámica, tratamiento dinámico y conversión dinámica, porque

¹ Pontificia Universidad Católica del Perú. Pós-doutoranda do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Bolsista do CNPq-Brasil – e-mail: jvflores@pucp.pe

² Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – e-mail: saddoag@gmail.com

percibimos que, cuando el sujeto interactúa con AGD las tres actividades cognitivas poseen ciertas particularidades que presentamos y analizamos por medio de ejemplos concretos.

Palabras-clave: registro de representación semiótica; figura; ambientes de geometría dinámica.

Introdução

No ensino de geometria, o uso das figuras é fundamental, visto que permite ter acesso aos objetos matemáticos representados, conjecturar propriedades e resolver problemas. Conforme afirma Duval (1995), a atividade cognitiva requerida em geometria é mais exigente que em outras áreas da matemática, uma vez que os tratamentos, nos registros figurais e discursivos, devem ser simultâneos. O autor explica que deve existir uma coordenação entre os tratamentos figurais e os do discurso teórico em língua natural, visto que a utilização da língua natural em matemática tem um uso especializado que deve ser visto de forma distinta do uso comum.

No mesmo sentido, Pavanello (2004) explica a importância do uso das figuras em geometria quando afirma que

A geometria apresenta-se como um campo profícuo para o desenvolvimento da "capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível" [...] Partindo de um nível no qual reconhece as figuras geométricas, embora as percebendo como todos indivisíveis, o aluno passa, no nível posterior, a distinguir as propriedades dessas figuras; estabelecem, num terceiro momento, relações entre as figuras e suas propriedades, para organizar, no nível seguinte, sequências parciais de afirmações, deduzindo cada afirmação de outra, até que, finalmente, atinge um nível de abstração tal que lhe permite desconsiderar a natureza concreta dos objetos e do significado concreto das relações existentes entre eles. Delineia-se, desta forma, um caminho que, partindo de um pensamento sobre objetos, leva a um pensamento sobre relações, as quais se tornam, progressivamente, mais e mais abstratas. (PAVANELLO, 2004, p. 4)

Por outro lado, no ensino de geometria, a tecnologia informática é cada vez mais utilizada, especialmente os ambientes de geometria dinâmica (AGD), os quais permitem, por intermédio do arrastamento e da manipulação direta³, que os estudantes possam conjecturar acerca das propriedades dos objetos matemáticos representados e, por exemplo, desqualificar construções errôneas.

³ Tipo de interação instantânea e reversível com o AGD sem uso de comandos específicos, na qual o usuário utiliza o mouse para "mover" na tela do computador objetos matemáticos representados. É basicamente uma aproximação do mundo computacional ao mundo real.

Assim, considerando a importância da figura no ensino e na aprendizagem de geometria e a pertinência atual de utilizar AGD neste âmbito, surge nosso interesse por estudar a figura geométrica nesses ambientes e definir o registro figural dinâmico.

1. Registro de Representação Semiótica

Duval (1995) afirma que a matemática é o único campo em que o desenvolvimento do conhecimento está relacionado à criação de novos sistemas semióticos cuja evolução gera novos objetos matemáticos. Além disso, afirma que o funcionamento cognitivo e, por consequência, a aprendizagem em matemática está ligada aos processos de *semiósis* (produção de uma representação semiótica) e de *noésis* (ato cognitivo, como, por exemplo, a apreensão conceitual de um objeto), e então ambos são inseparáveis.

Para o autor, a linguagem natural, a algébrica, as representações gráficas e as figuras geométricas são representações semióticas externas e conscientes, isto é, são representações produzidas pelos sujeitos e que podem ser efetuadas ao realizar operações em um sistema semiótico determinado. Define esses sistemas como *registro de representação semiótica*, pois permitem as três atividades cognitivas essenciais em todo registro: formação, tratamento e conversão. A respeito disso, o pesquisador afirma que,

[...] **produzir uma representação** de alguma coisa, em um sistema. Em seguida, **transformar** as representações apenas pelas regras determinado próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação as representações iniciais. Enfim, **converter** as representações produzidas em um sistema em representações de outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado (DUVAL, 2005, p. 36-37, grifo nosso).

Além disso, os registros de representação semiótica, segundo o autor, são sistemas cognitivos que produzem novas representações e que permitem a descoberta de novos objetos e as representações produzidas em um registro têm duas propriedades: uma, guarda relação com o objeto e a outra, com as diferentes unidades que formam o objeto representado. Também, o mesmo autor classifica os registros de representação semiótica em registros discursivos (linguagem natural; algébrico) e registros não discursivos (gráfico; figural).

Neste artigo, centraremos no estudo do registro figural, visto que estamos interessados em definir o registro figural dinâmico.

Em relação ao registro figural, Duval (2011) explica que, do ponto de vista cognitivo, no ensino de matemática, deve-se assumir que as figuras geométricas formam um registro de representação semiótica, pois, para o autor,

a figura é identificada pelas propriedades que não vemos porque nenhum desenho as mostra em sua generalidade. Essas propriedades somente podem ser aprendidas por conceitos, isto é, os termos definidos nos enunciados. Isto reflete, na realidade esse conglomerado de produções instrumentais e semióticas que chamamos figura no ensino. Ela consiste na associação do que é dado a ver com um código ou indicações verbais que fixa esse “dado” como “propriedade” ou como “objeto” a ser reconhecido (DUVAL, 2011, p. 91).

Concordamos com o pesquisador quando afirma que uma figura geométrica é caracterizada por um desenho e uma legenda, sem a qual a figura não existe. Da mesma forma, para o autor, a figura é necessariamente introduzida por uma legenda.

Além disso, a maneira de ver uma figura depende de operações de reorganização visual e acrescenta que ver uma figura implica,

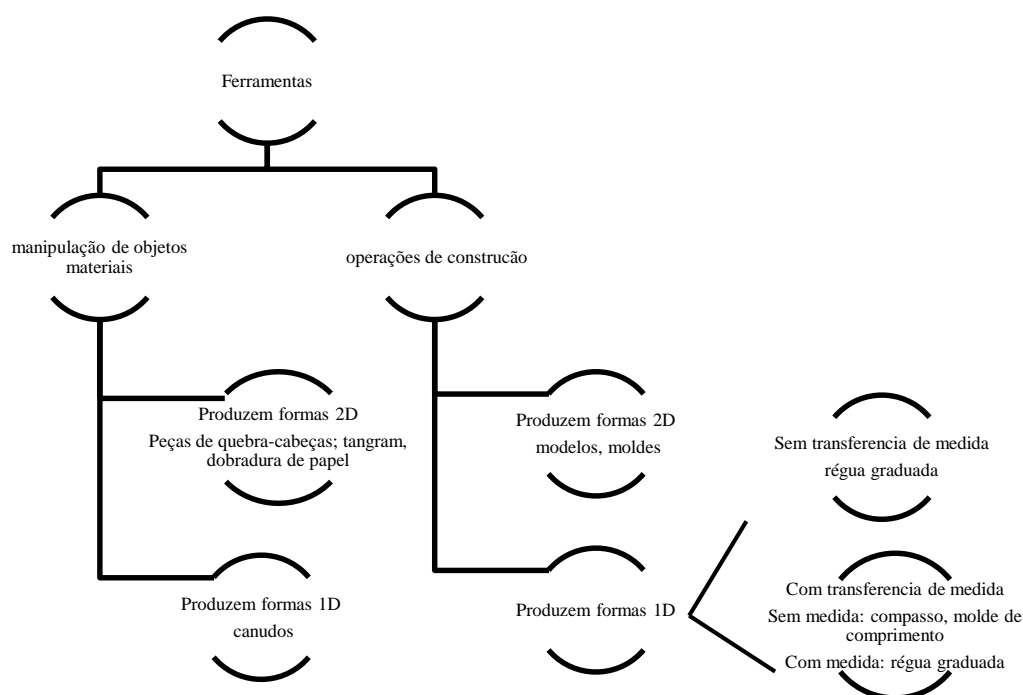
reconhecer imediatamente as formas, isto é, os contornos fechados, justapostos, superpostos, separados; [...] as formas reconhecidas podem também ser simultaneamente distinguidas como as formas ou os contornos de objetos da realidade. [...] as figuras geométricas se distinguem de todas as outras representações visuais pelo fato de que existem sempre várias maneiras de reconhecer as formas ou as unidades figurais mesmo que o fato de reconhecer uma exclui a possibilidade de reconhecer outras. Em outras palavras, para ver matematicamente uma figura é preciso mudar o olhar sem que a representação visual no papel ou no monitor seja modificada. (DUVAL, 2011, p.85-86)

Baseado na maneira de “ver” uma figura, o pesquisador explica que é possível analisá-la cognitivamente em função de sua forma, dos conhecimentos geométricos que mobiliza e das ferramentas utilizadas para sua construção. A seguir, explicitamos esses três aspectos para analisar uma figura:

- Forma da figura: baseada na percepção da figura cujos contornos são fechados. A figura pode ser vista como um agrupamento por justaposição, quando existem tantas formas como contornos fechados ou por superposição, quando existem menos formas que contornos fechados.

- Conhecimento das propriedades geométricas da figura que se devem mobilizar para sua análise e na qual devem ser consideradas suas unidades figurais⁴.
- Ferramentas utilizadas para representá-la ou para construí-la. O autor distingue três tipos de ferramentas, como mostra a figura 1.
 - Material manipulativo (peças de quebra-cabeças, tangram, dobradura de papel, etc.), que permite a manipulação de objetos materiais.
 - Régua (graduada ou não), compasso, molde, etc. que permitem operações de construção.
 - Softwares

Figura 1 – Classificação de ferramentas para construir figuras



Fonte: adaptado de DUVAL (2005, p. 14)

Com as ferramentas que permitem **manipulações de objetos materiais** é possível realizar agrupamentos por justaposição (movimentar as peças do quebra-cabeça, por exemplo); a respeito das ferramentas que permitem **operações de construção** por meio de traçados retos ou curvos, estas favorecem o agrupamento por superposição.

Além disso, o autor afirma que passar de uma ferramenta a outra significa um salto cognitivo importante porque “se passa de um mundo no qual o espaço se organiza em função de gestos do corpo e de sua orientação a um mundo no qual o espaço se

⁴ Unidades figurais são definidas pela variação das variáveis visuais relacionadas ao número de dimensões: 0D (ponto), 1D (uma linha), 2D (uma superfície) e as variações qualitativas de forma, contorno, orientação, etc.

determina em função dos gestos unicamente técnicos” (DUVAL, 2005, p. 113). Também explica que as ferramentas mobilizam diferentes noções e que cada uma possui suas próprias vantagens e limitações.

Em relação ao uso de softwares, percebemos que Duval, embora mencione o uso dos mesmos, não faz um estudo aprofundado sobre este tipo de ferramenta. Consideramos que o uso de softwares e, especificamente, de AGD para o trabalho com figuras geométricas é indispensável já que proporciona outro olhar sobre elas, porque sua utilização permite realizar tanto agrupamentos por justaposição como por superposição, algo que não é possível fazer de maneira simultânea quando se trabalha com outras ferramentas.

2. Ambiente de geometria dinâmica

Os ambientes de geometria dinâmica (AGD) como o Cabri e o Geogebra, por exemplo, permitem a construção de representações de objetos geométricos. As características fundamentais destas aplicações são a função de arrastamento, que permite o movimento, e a manipulação direta, que admite a mudança de posição, de forma e de medidas da figura.

Sobre os ambientes de geometria dinâmica, Chaachoua (1997) explica que podem ajudar a validar situações geométricas de maneira experimental. O pesquisador afirma, também, que a contribuição da geometria dinâmica à aprendizagem da geometria depende das escolhas feitas pelos criadores do ambiente, os modos de representação, as convenções adotadas por eles, os tratamentos permitidos, as ações e as modificações possíveis. Contudo, afirma que é necessário efetuar uma análise didática do ambiente que contemple pelo menos três aspectos, compreendidos entre a manipulação direta, a escolha da representação e os primitivos geométricos, visto que se podem construir e explorar figuras geométricas complexas, além de verificar conjecturas e realizar transformações que facilitam aos estudantes o acesso às representações de objetos geométricos que dificilmente seriam possíveis com lápis e papel, visto que permitem um domínio de funcionamento mais extenso (possibilita realizar ações que com lápis e papel seriam difíceis ou até impossíveis).

A respeito da utilização desses ambientes, Veloso (2000) explica que os ambientes de geometria dinâmica transformam a visão do ensino e da aprendizagem de Matemática, visto que proporcionam modos diferentes dos tradicionais de ensinar e de

aprender matemática, especialmente noções geométricas. Quanto à importância do uso dos ambientes de geometria dinâmica, Gravina (2001) afirma que eles

incentivam o espírito de investigação em Matemática: sua interface interativa, aberta à exploração e à experimentação, disponibiliza os experimentos de pensamento, manipulando diretamente os objetos na tela do computador, e com realimentação imediata, os alunos questionam o resultado de suas ações/operações, conjecturam e testam a validade das conjecturas inicialmente através dos recursos de natureza empírica (GRAVINA, 2001, p. 89-90).

Além disso, outros pesquisadores da área de Educação Matemática, como Laborde (2001; 2006), Olivero e Robutti (2001), Restrepo (2008) e Grinkraut (2009) afirmam que a geometria dinâmica possui muitas possibilidades como a “linguagem visual”, que estimula um novo meio de comunicação e a “interatividade” entre o sujeito e as representações feitas no software, além de estimular os estudantes a ter interesse nos conteúdos matemáticos que podem ser trabalhados nesses ambientes. Além disso, os investigadores mencionados apontam que a função de arrastamento permite explorar e validar construções, bem como promove a elaboração de conjecturas por parte dos estudantes.

Quanto à função de arrastamento, esta tem diferentes modalidades que podem ser utilizadas para formular estratégias de solução de problemas geométricos. Nesse sentido, Olivero (2003) mostra que o arrastamento possui três funções essenciais:

Retroalimentação, como o sujeito tem controle das construções que realiza, o arrastamento oferece um meio poderoso de retroalimentação que auxilia no desenvolvimento de estratégias de resolução de uma situação problema [...] **Mediador entre figura e desenho**, visto que permite invalidar construções errôneas [...] **Modo de análise ou de busca**, o arrastamento permite que o sujeito examine sua construção e procure, por meio da exploração da figura, suas propriedades invariantes (OLIVERO 2003, pp. 56-59, tradução nossa).

Também, o arrastamento obriga ao sujeito a utilizar propriedades geométricas para construir, no sentido de Laborde (2001), uma determinada figura⁵. Em nosso ponto de vista, as funções de arrastamento e manipulação direta fundamentam a principal vantagem que possuem estes AGD.

⁵ Uma figura geométrica aborda as relações geométricas entre os objetos utilizados na construção, isto é a figura é invariável quando qualquer objeto básico utilizado na construção é arrastado (LABORDE, 2001, p. 293).

A partir dessas reflexões, afirmamos que os AGD, quando utilizados estrategicamente, podem ser de grande utilidade para justificar resultados matemáticos. Da mesma forma, podem ser valiosos como ferramentas para auxiliar a elaboração de conjecturas e deduções de propriedades dos objetos matemáticos representados.

Em relação à classificação de ferramentas para construir figuras geométricas apresentadas por Duval (2005), notamos que esse autor não explora a utilização da tecnologia informática, especificamente da geometria dinâmica. Pensamos que os AGD devem ser considerados porque, como indicamos, são ferramentas úteis para o ensino e aprendizagem de geometria, já que permitem representar objetos geométricos e, nas últimas décadas, têm proporcionado a renovação do interesse pelo estudo da geometria.

Outra razão para que sejam consideradas são as diferenças marcantes entre estas ferramentas em relação a outras, como tangram, quebra-cabeças, régua graduada ou não, compasso, etc. Neste sentido, como já afirmamos, os AGD permitem realizar operações de construção de figuras seja por justaposição ou por sobreposição, ações que, com as ferramentas anteriormente apontadas, somente seria possível realizar separadamente.

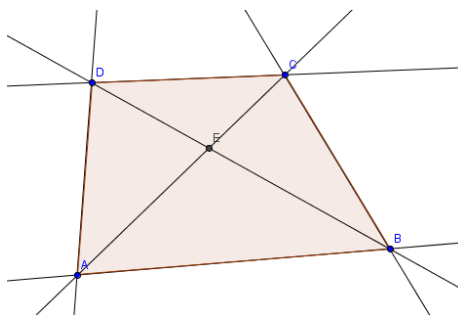
Além disso, os AGD facilitam ver a figura geometricamente como uma engrenagem de unidades figurais 0D, 1D ou 2D, isto é, se pode realizar uma análise da desconstrução dimensional da figura. Nesse sentido, Mithalal (2011) explica que,

A desconstrução dimensional consiste em ver a representação de um objeto como um agrupamento de unidades figurais por suas propriedades geométricas. Este último ponto é fundamental porque designa o papel dessas propriedades nesse processo: não é suficiente isolar as unidades figurais, é necessário também organizá-las geometricamente (p.115).

Portanto, a desconstrução dimensional (ver figura 2) permite estudar a transformação de uma figura em outra diferente da mesma dimensão ou de dimensão inferior e identificar suas unidades figurais.

Por esse motivo, conjecturamos que quando se utiliza AGD, a desconstrução dimensional da figura que o sujeito pode realizar se acelera porque, quando são utilizadas ferramentas do software e, notadamente, a função arrastamento, o sujeito pode identificar de maneira instantânea as unidades figurais que conformam a figura. Além disso, a modificação da posição do observador também permite identificar as unidades figurais e a nova configuração da figura.

Figura 2 – Desconstrução dimensional



Fonte: produção dos autores

Por exemplo, mostramos na figura 2 a desconstrução dimensional do quadrilátero ABCD, de dimensão 2, pois vemos que com traços auxiliares se podem identificar unidades figurais de dimensão menor (1D e 0D) como são retas e pontos.

Também, pensamos que é provável que as tarefas de construir uma figura sejam cognitivamente diferentes, porque quando construímos figuras no AGD, a forma de realizar a coordenação entre os tratamentos e o discurso é diferente.

3. Registro Figural Dinâmico

Em relação ao uso de software no ensino e aprendizagem de geometria, Duval (2011) afirma que:

as representações que eles exibem são as mesmas que aquelas produzidas graficamente no papel para uma apreensão visual. Ver uma **figura** geométrica no monitor ou vê-la no papel exige que nosso olhar faça a mesma desconstrução dimensional [...], no entanto eles constituem um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração de tratamentos. (DUVAL, 2011, p. 137, grifo nosso).

Pensamos que, quando o sujeito interage com AGD, as três atividades cognitivas fundamentais para a constituição de um registro, formação, tratamento e conversão, especificamente no registro figural, se realizam de maneira diferente, visto que as funções de arrastamento e manipulação direta permitem que se construam relações entre os tratamentos figurais e discursivos da figura de maneira diferente em relação a quando se trabalha em um ambiente não dinâmico.

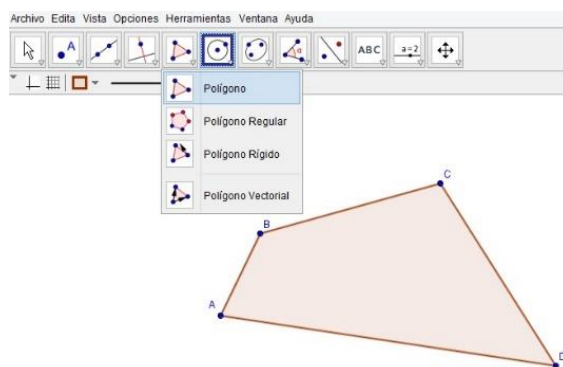
Portanto, surge um primeiro questionamento: *como se realiza a formação, tratamento e conversão de uma figura em um ambiente de geometria dinâmica?* Para responder essa questão, apresentamos as três atividades cognitivas essenciais na constituição do registro figural no AGD.

4. Formação dinâmica

Para Duval (1995), a formação de uma representação semiótica consiste em originar uma representação de um determinado objeto em certo sistema semiótico, sendo essencial que esta formação respeite as regras de conformidade⁶ do sistema semiótico empregado. Assim, à formação no registro figural está dada pela identificação das unidades figurais e sua combinação baseada nas propriedades geométricas da figura.

A formação de uma representação semiótica em AGD, que chamamos formação dinâmica, se dá quando o sujeito, para representar um objeto geométrico, escolhe uma ferramenta (da barra de ferramentas) que lhe permita criar a figura desejada. Nessa ação, o sujeito deve mobilizar conhecimentos de geometria. Por exemplo, no Geogebra, para representar um quadrilátero qualquer (ver figura 3), o sujeito pode escolher a ferramenta polígono que está na barra de ferramentas, depois, na área de trabalho, deve clicar quatro vezes e validar sua construção.

Figura 3 – Formação da representação de um quadrilátero



Fonte: produção dos autores

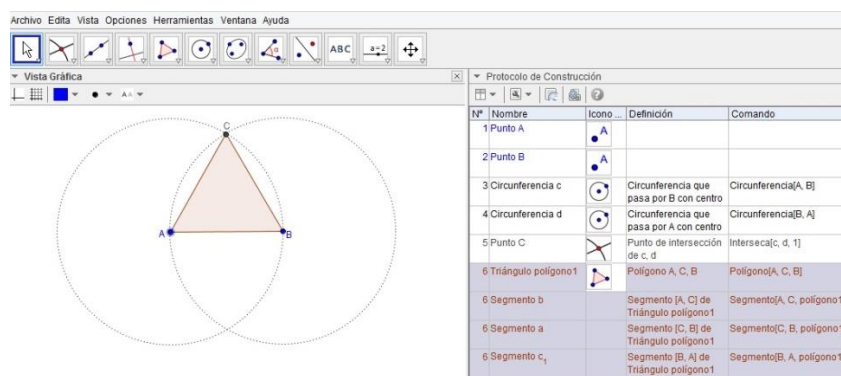
Observamos que, na figura 3, a ferramenta polígono possibilita criar a figura, pois mostra a representação do objeto associado a uma “legenda” que permite que o sujeito identifique a ferramenta e construa a figura, no caso o quadrilátero.

⁶ Estas regras “definem um sistema de representação e os tipos de unidades constitutivas de todas as representações possíveis. Permitem o reconhecimento das representações como representações num registro determinado” (DUVAL, 2009, p.55-56).

Além disso, as regras de formação da representação em AGD também dependem da escolha de unidades figurais elementares e de sua combinação, porque o sujeito deve seguir uma sequência de construção da figura. Essa sequência está dada pelas condições dos AGD (vantagens e/ou limitações do próprio software) para construir uma representação de ordem superior, isto é, por exemplo, no caso de construir um triângulo equilátero, não é possível utilizar diretamente somente uma ferramenta: nesse caso, o sujeito deve realizar uma combinação de unidades figurais que estão na barra de ferramentas e as propriedades do objeto cuja representação está sendo construída no AGD.

A figura 4, realizada no AGD Geogebra, apresenta, à esquerda, a formação do triângulo equilátero e, à direita, o protocolo de construção que permite mostrar quais unidades figurais se combinam para essa formação: unidades 0D e 1D (pontos e segmentos, respectivamente) e unidades 2D (circunferências, polígono).

Figura 4 – Regra de formação de um triângulo equilátero



Fonte: produção dos autores

Ainda na figura 4 é possível perceber as regras de conformidade que permitem o reconhecimento das representações associadas à figura do triângulo equilátero para essa formação (unidades 0D, 1D e 2D) e a relação das mesmas com as propriedades matemáticas envolvidas na construção.

5. Tratamentos dinâmicos

Quanto aos tratamentos, Duval (2009, p. 56) expressa que na figura se efetuam tratamentos quando se realizam modificações, como mudar de posição conservando a mesma configuração (mudança de orientação, translação, rotação da figura,

comprimento dos lados, etc.) e/ou decompor a figura em suas unidades figurais⁷, de modo a combiná-las para formar outra figura ou dividi-la em outras subfiguras que podem ou não ser reagrupadas para formar outras figuras.

Concordamos com Duval (2005) quando afirma que um software permite acelerar tratamentos da figura, mostrando de maneira mais rápida e precisa a solução de um problema. Ainda explica que

As figuras se exibem no monitor tão rapidamente quanto à produção mental, mas com uma potência de **tratamentos ilimitados** em comparação com as possibilidades da modalidade gráfico-visual. Obtemos, imediatamente, muito mais que tudo o que poderíamos obter à mão livre após, talvez, vários dias de escritas e cálculos ou construção de figuras (DUVAL, 2011, p. 137, grifo nosso).

Essa afirmação reforça a pertinência de configurar o que chamamos de tratamento dinâmico.

Assim, ressaltamos que essa aceleração dos tratamentos se realiza quando se utilizam duas funções fundamentais dos AGD, quais sejam a manipulação direta, que permite mudar a posição da figura ou mudar a posição da área de trabalho, e o arrastamento, que permite realizar operações de reconfiguração de uma figura de maneira acelerada.

Assim, os tipos de tratamentos de uma figura que identificamos neste estudo quando se utiliza AGD são *mudar a posição da figura sem modificá-la* (para isso, se utiliza a função de manipulação direta), *mudar o comprimento dos lados da figura* (aqui, se utiliza a função de arrastamento e também se pode utilizar a ferramenta de homotetia) e *reconfigurar a figura* (neste caso, se utiliza a função de arrastamento e outras ferramentas específicas que dependem da figura construída).

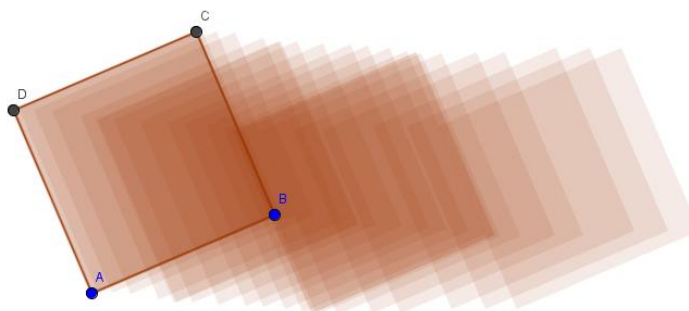
No entanto, devemos apontar que esses tratamentos não se realizam necessariamente por separado ou de maneira sequencial, já que, no âmbito de um AGD, podem se realizar de maneira simultânea. Esses tratamentos possuem características específicas que apresentamos a seguir, com exemplos concretos:

- *Mudar a posição da figura*: por meio da manipulação direta que o AGD permite, o sujeito pode modificar de maneira instantânea a posição da figura representada na área de trabalho conservando sua forma quando usa o botão

⁷ São unidades figurais elementos que formam a figura como pontos, retas e polígonos de dimensão 0, 1 e 2, respectivamente.

esquerdo do *mouse*. Na figura 5, por exemplo, para ver essa mudança de posição do quadrado ABCD, se ativa a opção rastro do Geogebra.

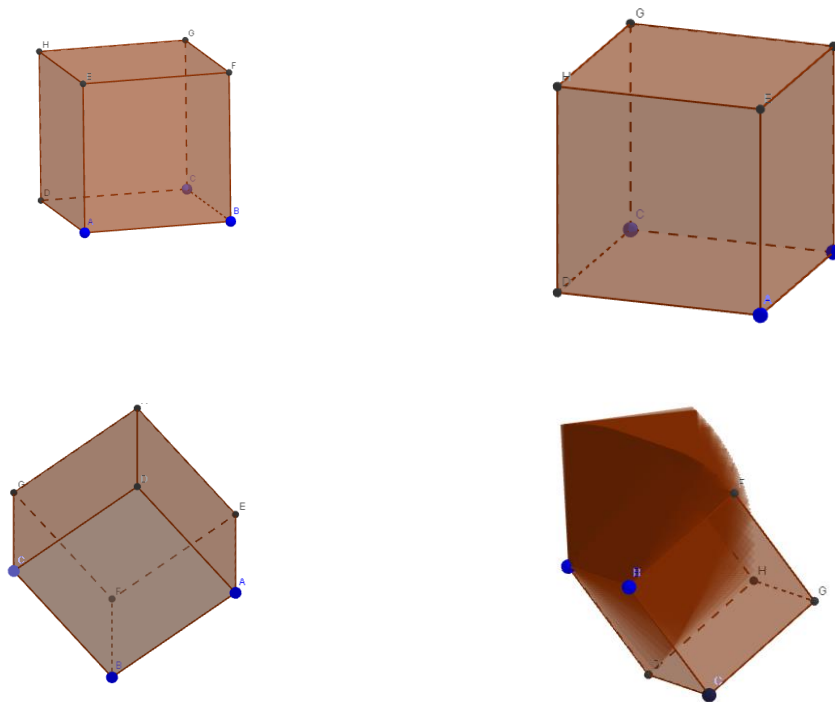
Figura 5 – Mudança de posição de uma figura



Fonte: produção dos autores

Também, notamos que nos AGD tridimensionais, como o Geogebra 3D (a partir da versão 5), na janela de visualização 3D, ao pressionar e arrastar botão direito do mouse, é possível mudar a posição da figura representada manualmente e por rotação contínua. Quanto ao botão esquerdo, permite variar a posição dos planos de referencia isto é modificar a posição e o comprimento da figura. A figura 6 apresenta a mudança de posição e de dimensões do cubo ABCDEFGH quando são ativados os botões direito e esquerdo respectivamente.

Figura 6 – Modificação de uma figura no AGD Geogebra 3D

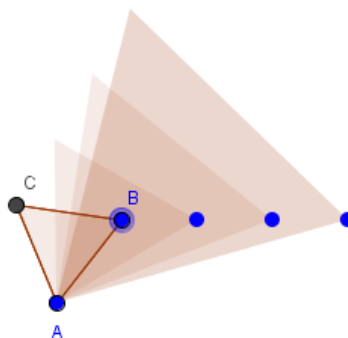


Fonte: produção dos autores

Por exemplo, a figura 6 mostra duas posições diferentes do paralelepípedo ABCDEFGH representado no Cabri 3D. Essas duas posições obtêm-se por meio da função de manipulação que permite, ao ativar o botão direito do mouse, mudar a posição da área de trabalho do AGD.

- *Mudar o comprimento dos lados da figura:* este tipo de tratamento está relacionado com a função de modo de análise ou de busca do arrastamento, no sentido de Olivero (2003), pois, por meio desta função, o sujeito pode explorar a figura.

Figura 7 – Mudar o comprimento dos lados de um triângulo e sua posição



Fonte: produção dos autores

Por exemplo, a figura 7 mostra que ao arrastar o vértice B do triângulo equilátero ABC construído no AGD Geogebra, os comprimentos dos lados do triângulo mudam proporcionalmente sem mudar o tipo de triângulo. Além disso, como observamos na figura, os tratamentos mudar de posição e de longitude dos lados do triângulo ABC podem ser realizados de maneira simultânea.

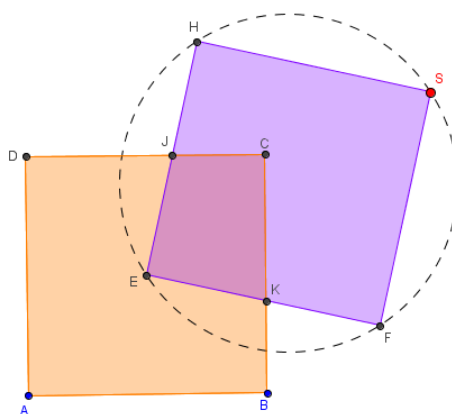
- *Reconfigurar uma figura:* para realizar este tipo de tratamento (divisão de uma figura em outras subfiguras, que podem ou não ser reagrupadas para formar outras figuras), o sujeito utiliza as ferramentas do AGD necessárias, dependendo da figura e do problema a resolver para separar, reagrupar ou formar outra figura a partir de uma configuração inicial.

Para explicar os tratamentos na figura quando se utiliza AGD, apresentamos um exemplo adaptado da pesquisa de GÓMEZ (2015, p. 58), na qual utilizou o AGD Geogebra.

*Abra o arquivo Atividade_2. Movimente o ponto S de tal maneira que a interseção dos quadrados ABCD e EFSH forme a configuração de um quadrado, um triângulo e um quadrilátero qualquer e responda:
Qual a relação entre a superfície formada pela interseção dos quadrados e a superfície do quadrado ABCD? Justifique no Geogebra sua resposta.*

A figura 8 mostra o arquivo que se deve abrir para realizar a atividade solicitada.

Figura 8 – Arquivo da atividade



Fonte: adaptado de GÓMEZ (2015, p. 59)

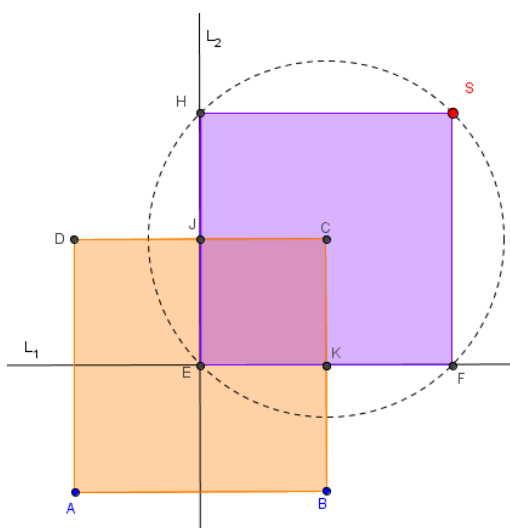
Observamos que, quando se utiliza AGD, o próprio discurso da atividade é diferente daquele utilizado quando se apresenta a mesma atividade sem o uso destes ambientes. Também, na atividade, se apresenta um arquivo pronto para que o sujeito, por meio da manipulação direta e o arrastamento, movimente o ponto S e mude a posição do quadrado EFSH, para configurar as figuras solicitadas.

Mostramos, em seguida, três possíveis configurações e/ou reconfigurações que se podem apresentar na solução da atividade ao realizar tratamentos dinâmicos:

- *A intersecção das figuras representa um quadrado:*

Para obter esta configuração e poder estabelecer a configuração e a relação solicitada, o sujeito poderia utilizar as ferramentas correspondentes para traçar as retas perpendiculares L_1 e L_2 , que se cruzam no ponto E (ver figura 9), e, depois, mover (arrastar) o vértice S até conseguir a configuração solicitada.

Figura 9 – Configuração do quadrado EKCJ



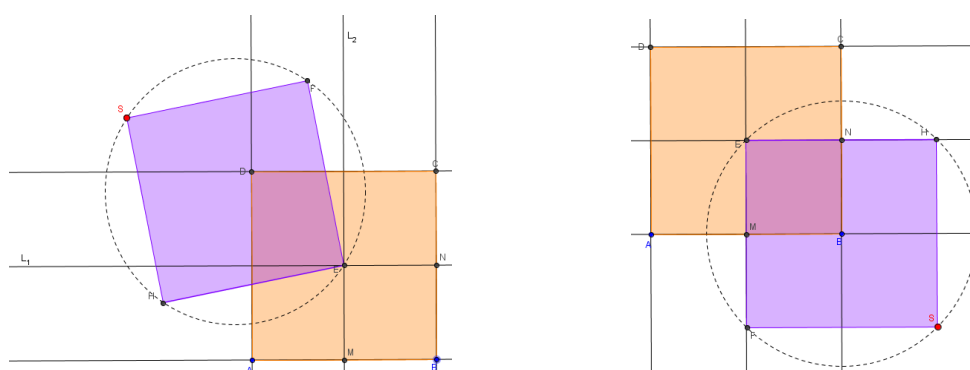
Fonte: adaptado de GÓMEZ (2015, p. 60)

Na figura 9, os lados \overline{EH} e \overline{EF} do quadrado $EFSH$ se superpõem em L_1 e L_2 , e outra figura quadrado é criada por superposição de duas figuras 2D (dois quadrados), o que gera outra figura de igual dimensão (quadrado EKCJ). Perceptivamente⁸, o sujeito pode afirmar que a intersecção das figuras representa um quadrado que coincide com a quarta parte do quadrado ABCD.

⁸ No sentido de Duval, entendemos que a percepção representa uma forma de os sujeitos receberem, por meio dos sentidos, imagens, sons, impressões ou sensações externas.

Mostramos, na figura 10, uma solução da configuração do quadrado da pesquisa de Gomez (2015). Neste caso, a estudante criou as retas perpendiculares que se cortam no centro E, depois projetou retas nos lados do quadrado ABCD, marcou os pontos M e N dos lados \overline{AB} e \overline{BC} , respectivamente (pontos médios desses lados). Posteriormente, arrastou o ponto S até a posição e verificou com a ferramenta *ponto médio* que a intersecção dos lados \overline{EF} e \overline{AB} é o ponto M e a intersecção do lado \overline{EH} com \overline{BC} é o ponto N.

Figura 10 – Desconstrução dimensional do quadrado ABCD



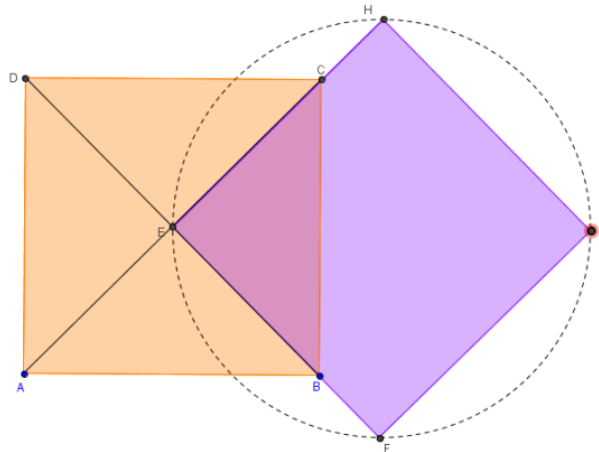
Fonte: adaptado de Gómez (2015, p. 65)

Consideramos que a estudante realizou a desconstrução dimensional da figura, porque explorou as relações entre as unidades 0D (pontos, pontos de intersecção), 1D (retas) e 2D (quadrados), sendo o agrupamento por superposição.

- *A intersecção das figuras representa um triângulo:*

Neste caso, o sujeito pode traçar as diagonais \overline{AC} e \overline{BD} do quadrado ABCD e, utilizando a manipulação direta, arrastar o ponto S até configurar a figura solicitada.

Figura 11 – Configuração do triângulo



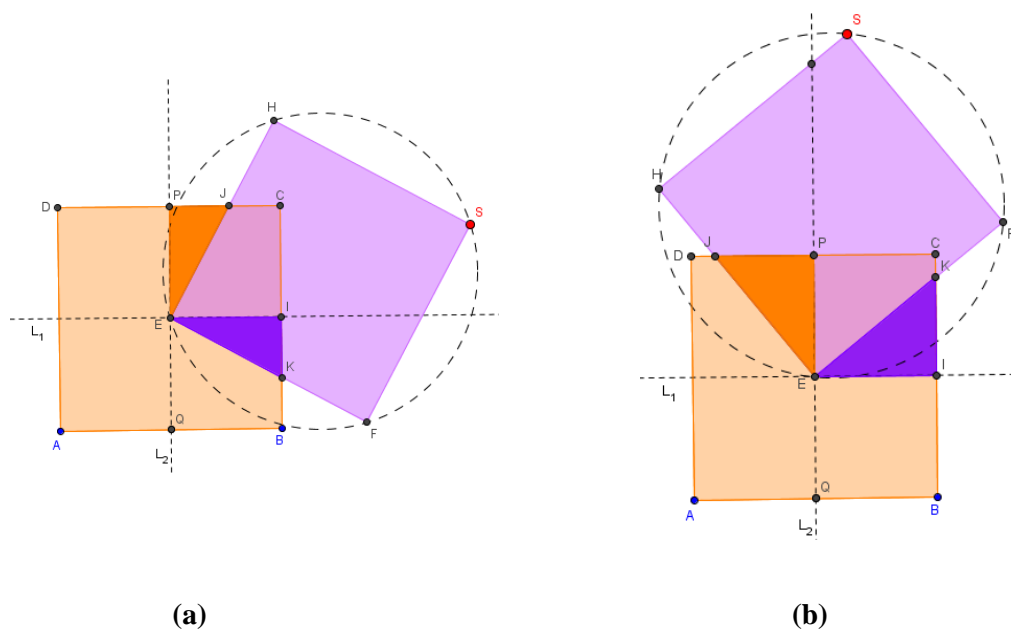
Fonte: adaptado de GÓMEZ (2015, p. 66)

Então, se pode mudar a posição até formar, por exemplo, o triângulo BEC sobre o quadrado $ABCD$ (ver figura 11). Neste caso, também por agrupamento e superposição, percebe-se que a intersecção das figuras coincide com a quarta parte do quadrado $ABCD$.

- *A intersecção das figuras representa um quadrilátero qualquer:*

Ao dividir o quadrado $ABCD$ em quatro regiões congruentes pelas retas perpendiculares L_1 e L_2 (Figura 12(a) e 12(b)) do quadrado $ABCD$, é possível estabelecer, com o uso das ferramentas do software, uma relação entre as subfiguras que se formam pela sequência de subfiguras (triângulos e quadrados), isto é, desconstrói-se dimensionalmente a figura, pois se identificam, por exemplo, unidades figurais $0D$, como o ponto E que é o ponto de intersecção das retas perpendiculares L_1 e L_2 com os lados do quadrado $ABCD$, ou unidades $1D$ como os segmentos EK e EJ ou as retas L_1 e L_2 .

Figura 12 – Configurando um quadrilátero qualquer



Fonte: adaptado de GOMEZ (2015, p. 74)

Na Figura 12(a), observamos também unidades figurais 2D triângulos EKI e EJP nos quadriláteros EK CJ e EKCP, respectivamente. Ao arrastar o ponto S, na figura 12(b), também se gera outras unidades figurais 2D, como os triângulos EIK e EPJ.

Além disso, podemos observar que quando se arrasta o vértice S, discriminam-se perceptivamente as regiões formadas e se pode identificar a relação entre a superfície do quadrado ABCD e o quadrilátero formado com a intersecção do quadrado EFSH (mobilização de conhecimentos de geometria como, por exemplo, a congruência de triângulos).

Também, com a função arrastamento, a função heurística da figura geométrica quando se utiliza AGD se enriquece, uma vez que o sujeito pode realizar reconfigurações de forma rápida e dinâmica.

6. Conversão no ambiente de geometria dinâmica

No caso da conversão, Duval (1995) menciona que constitui uma transformação externa de uma representação em outra, conservando a totalidade ou uma parte do conteúdo da representação inicial. Necessita da coordenação de representações no

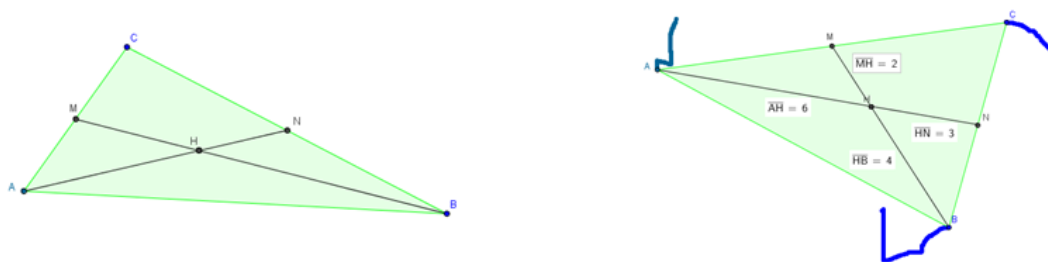
sujeito que a realiza. Nesse sentido, a conversão requer que percebamos a diferença entre o conteúdo da representação (*noésis*) e aquilo que a representa (*semiósis*). Duval (2011) explica que quando a conexão entre *noésis* e *semiósis* não é estabelecida, a conversão torna-se incompreensível ou impossível de se realizar.

Além disso, o autor explica que a conversão de uma representação em língua natural para uma representação figural é uma ilustração, enquanto que a conversão inversa é uma descrição, e afirma que, embora a ilustração não seja uma conversão que permita solucionar uma tarefa complexa, ela apoia o sujeito no processo de resolução de um problema. Entretanto, a descrição permite ao sujeito realizar conjecturas sobre a figura representada. Um exemplo do que afirmamos no parágrafo anterior o podemos mostrar no seguinte problema:

No triângulo ABC , os segmentos \overline{AM} e \overline{BN} são suas duas medianas, que se cortam no ponto H . Com base nessa informação, encontre a razão de proporcionalidade entre os segmentos que determinam o ponto nas medianas \overline{AM} e \overline{BN} iniciais.

Para solucionar o problema descrito, o sujeito que interatua com AGD pode primeiro construir um triângulo ABC (ferramenta “polígono”), encontrar o ponto médio dos lados do triângulo (ferramenta “ponto médio”). Para conjecturar a razão de proporcionalidade, pode usar a ferramenta “medida”. A função de arrastamento pode ser empregada para validar sua conjectura.

Figura 13 – Uso de ferramentas e função arrastamento



Fonte: produção dos autores

A conversão dinâmica se realiza de língua natural (enunciado do problema) à representação figural no AGD Geogebra, na qual se podem realizar tratamentos dinâmicos (traços auxiliares, função arrastamento, etc.) como mostra a figura 13, para dar solução ao problema.

Afirmamos, por fim, que se configura o registro das figuras no AGD no que denominamos *registro figural dinâmico*, visto que as três atividades cognitivas que

permitem configurar um registro são desenvolvidas quando se interage com as representações no âmbito de um AGD.

Ressaltamos que as funções arrastamento e manipulação direta dos AGD facilitam o desenvolvimento destas atividades cognitivas. Além disso, favorecem os processos de visualização de objetos matemáticos, porque permitem realizar tratamentos na figura de maneira diferente que outros ambientes não dinâmicos. Por isso, pensamos que os AGD são ferramentas poderosas que devem ser bem utilizadas nas aulas de matemáticas e em particular quando se ensinam noções de geometria.

Reflexões finais

As três atividades cognitivas fundamentais para a constituição do registro figural dinâmico no AGD se realizam de maneira diferente quando se trabalha em um ambiente não dinâmico, porque as funções de arrastamento e manipulação direta permitem que se construam relações entre os tratamentos figurais e discursivos. Além disso, no registro figural dinâmico os tratamentos são acelerados e as variações de uma figura, como mudar de posição e de longitude de lado de uma figura ou reconfigurá-la podem ser realizados utilizando as ferramentas do AGD, o que favorece esses tratamentos.

As operações que são possíveis realizar na figura como, por exemplo, modificação da posição e reconfiguração, quando se utiliza AGD, são inúmeras, visto que as funções de arrastamento e manipulação direta permitem acelerar os tratamentos da figura. Essa aceleração induz o sujeito a utilizar propriedades geométricas para construir uma determinada figura, além de permitir identificar construções errôneas, bem como favorecer a assimilação dos invariantes relacionados com os objetos geométricos representados.

O arrastamento que permite realizar tratamentos quando se utiliza AGD cumpre também a função de retroalimentação, porque o sujeito, ao ter “controle” das construções que realiza, pode desenvolver estratégias de resolução de um problema.

É importante ressaltar que quando se utiliza AGD, a função de arrastamento permite realizar de maneira simultânea a mudança de posição e de comprimento dos lados da figura. Essa característica destes ambientes permite que o sujeito possa explorar a figura de maneira interativa e dinâmica.

Quanto à maneira de ver uma figura, no sentido de Duval (2011), pensamos que os AGD permitem ver a figura por justaposição ou sobreposição, o que permite que as operações figurais (reconfiguração e desconstrução dimensional) possam ser realizadas pelos sujeitos de maneira diferente daquela empregada quando se trabalha com outras ferramentas.

Referências

CHAACHOUA, H. **Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace étude d'un cas: la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes.** 1997. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Universidade Joseph Fourier, Grenoble, 1997.

DUVAL, R. **Semiósis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels.** Berne: Peter Lang, 1995.

_____. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** São Paulo: Livraria da Física, 2009.

_____. **Ver e Ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo de pensar: os registros de representação semiótica.** 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. ; GODIN, M. Les changements de regard nécessaires sur les figures. **IREM de Grenoble (Grand N)**, v. 76, pp. 7 – 27, 2005.

GOMEZ, C. **Proceso de visualización de cuadriláteros: un Estudio con profesores de nivel secundario.** 2015. 110 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontificia Universidad Católica del Peru, Lima, 2015.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de Geometria Dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo.** 2001. 277 f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GRINKRAUT, M. L. **Formação de professores envolvendo a prova matemática: um olhar sobre o desenvolvimento profissional.** 2009. 349 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontificia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

LABORDE, C. Soft and hard constructions with Cabri: contribution to the learning of mathematics. Bogota: **XVII Encuentro de Geometría, Universidad Pedagógica Nacional**, 2006.

_____. Integration of Technology in the Design of Geometry Tasks with Cabri-Geometry. In: **International Journal of Computers for Mathematical Learning**. v. 6. n.3, pp.283-317, 2001.

MITHALAL, J. Vers la mobilisation d'une géométrie axiomatique et de la déconstruction dimensionnelle : intérêt de la géométrie dynamique tridimensionnelle. In: **Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. IREM, Paris 7**, pp. 113-128, 2011.

- OLIVERO, F. **The proving process within a dynamic geometry environment**. 2003. 368 f. Tese (Doutorado em Educação) – University of Bristol, Bristol, 2003.
- OLIVERO, F.; ROBUTTI, O. Measures in Cabri as a bridge between perception and theory. In: **Proceedings of the 25th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education**. Netherlands: PME 25. pp. 9-16, 2001.
- PAVANELLO, R. M. Por que Ensinar/aprender Geometria? In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática. 2004. **Anais...** Disponível em <http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais_VII_EPEM/mesas_redondas/> Acesso em: 13 jul. 2015.
- RESTREPO, M. A. **Genèse Instrumentale du déplacement en Géométrie Dynamique chez des élèves de 6^e**. 2008. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Université Joseph Fourier, Paris, 2008.
- VELOSO, E. **Geometria: temas atuais: materiais para professores**. (Desenvolvimento curricular no ensino secundário). 11.ed. Instituto de Inovação Educacional: Lisboa, 2000.