Continuent les petits enfants à ne pas savoir faire des additions?

Eduardo Lacasta[1]
Miguel R. Wilhelmi[2]
Olga Belletich[3]

Why Johnny can't add?

Morris Kline

Resumen

El origen cultural de las reformas educativas de los años 60–70 (fecha variable según los países) se sitúa en el enfoque estructuralista común a las matemáticas, la lingüística y la epistemología genética. Con respecto a la enseñanza de las matemáticas, el desarrollo de este enfoque está basado en las estructuras algebraicas, subyacentes a las matemáticas y, en particular, a las matemáticas escolares. Esta es la razón principal por la que, a nuestro parecer, fueron introducidas las nociones conjuntistas desde la escuela infantil, tales como: pertenencia, inclusión, correspondencia, relación, clasificación, etc. La enseñanza de la lógica y del número estuvo también influenciada por este enfoque. La didáctica de las matemáticas ha puesto en evidencia fenómenos de enseñanza y ha explicitado sus efectos: deslizamiento metacognitivo y efecto Dienes, en particular. Este trabajo describe la realidad en la Educación Infantil, partiendo de las fichas actuales de trabajo para los niños. ¿Cuál ha sido la influencia de los descubrimientos en Didáctica de las matemáticas sobre las fichas de trabajo actuales? ¿Las nociones matemáticas presentes actualmente en las fichas responden a una construcción epistemológica diferente a la de la reforma estructuralista? O, por el contrario, ¿existen trazas incontroladas de conjuntismo trasnochado? El cambio del libro de texto y de los cuadernos por las colecciones de fichas, ¿supone un cambio substancial de medio material y didáctico?

Palabras clave: Infantil, fichas de trabajo, lógica, aritmética, conjuntos.

Abstract

The cultural background of educational reforms in the 60s-70s (date varies by country) is the structural approach common to mathematics, linguistics and genetic epistemology. In instructional process of mathematics, the development of this approach is based on algebraic structures, underlying mathematics and, in particular, school mathematics. This is the main reason, in our opinion, because of the concepts of Set Theory ware introduced in kindergarten, such as: membership, inclusion, correspondence, relationship, classification, etc. The teaching of logic and the name was also influenced by this approach. The teaching of the Logic and numbers has revealed for this approach to. Mathematics Education has shown teaching phenomena and specified their effects: metacognitive shift and Diénès effect in particular. This paper describes the kindergarten reality based on children's sheets. What has been the influence of the discoveries in Mathematics Education in the actual children's sheets? At present, do the math concepts of the children's sheets correspond to a different epistemological construction? Or, conversely, are there traces overall uncontrolled outdated? The change of the textbook and notebooks by children's sheets, involves it a substantial change of material and didactical milieus?

Keywords: kindergarten, children's sheets, logic, arithmetic, sets.

[1] *Universidad Pública de Navarra*, España. elacasta@unavarra.es
[2] *Universidad Pública de Navarra*, España. miguelr.wilhelmi@unavarra.es
[3] *Universidad Pública de Navarra*, España. olga.belletich@unavarra.es

Résumé

L'origine culturelle des réformes éducatives des années 60–70 (date variable selon les pays) se place dans l'approche structuraliste commune aux mathématiques, à la linguistique et à l'épistémologie génétique. En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, le développement de cette approche est basé sur les structures algébriques, sous-jacentes aux mathématiques et, en particulier aux mathématiques scolaires. C'est la raison principale, nous semble-t-il, pour laquelle furent introduites des notions ensemblistes depuis l'école maternelle, telles que : appartenance, inclusion, correspondance, relation, classification, etc. L'enseignement de la logique et du nombre se voyait ainsi influé à l'époque par cette approche. La didactique des mathématiques a mis en évidence des phénomènes d'enseignement et elle en a explicité leurs effets : glissement métacognitif et effet Diénès en particulier.Ce travail envisage la réalité scolaire de l'Éducation Maternelle par le biais des fiches de travail pour l'élève. Quelle a été l'influence de ces découvertes sur les fiches de travail actuelles ? Est-ce que les notions mathématiques actuellement en jeu dans ces fiches répondent à une construction épistémologique différente à celles de la réforme structuraliste ? Ou par contre, existe-t-il de traces incontrôlées de « l'ensemblisme » d'autrefois ? Le remplacement du manuel scolaire et des cahiers par les collections de fiches, suppose-t-il un changement substantiel du milieu matériel et du milieu didactique ?

Mots-clés: maternelle, fiches de travail, logique, arithmétique, ensembles.

1. Réformes éducatives: rupture et continuité

L'école traditionnelle, antérieure à la réforme ensembliste, identifie les mathématiques de la maternelle à l'arithmétique et à la géométrie. L'identification des savoirs pré-numériques et logiques dans les années 60 se situe dans l'approche structuraliste commune aux mathématiques, à la linguistique et à l'épistémologie génétique. Néanmoins, même si la référence aux structures algébriques a disparue, certains de ces savoirs pré-numériques et logiques subsistent dans l'enseignement.

Des notions ensemblistes, telles qu'appartenance, inclusion, correspondance, relation d'ordre et classification sont pertinentes. Briand (1999, 44) prouve que en France "les modifications ultérieures des programmes n'ont pas réellement bouleversé le paysage pré-numérique et son approche dans l'enseignement". En Espagne, les programmes actuels (MEC, 2007) pour l'école maternelle proposent les notions d'élément, ensemble, relation d'appartenance et d'ordre, sous-ensemble, classification et cardinal d'un ensemble.

Cette recherche ne porte pas sur le comparatisme des systèmes scolaires français et espagnol. Notre but est:

- de déterminer si ces notions gardent une cohérence suffisante avec les autres connaissances mathématiques,
- d'apporter un outil d'analyse de pratiques à l'École Maternelle de n'importe quel système éducatif.

Pour ce qui était appelé « *Mathématique Moderne* », la construction du nombre entier naturel comme cardinal d'un ensemble fini était la voie « naturelle » (associée aux étapes du développement génétique de l'enfant, selon Piaget) d'accès à son usage contextuel et concret. À l'époque, les tâches proposées aux enfants étaient très souvent d'établir l'équipotence d'ensembles par le dessin de flèches entre leurs éléments, la détermination du cardinal d'un ensemble, l'identification de sous-ensembles, etc. C'était une manifestation du *glissement métacognitif* (Brousseau, 1997, 1998), c'est-à-dire, l'identification d'un moyen d'enseignement à un objet d'enseignement, un savoir (figure 1).

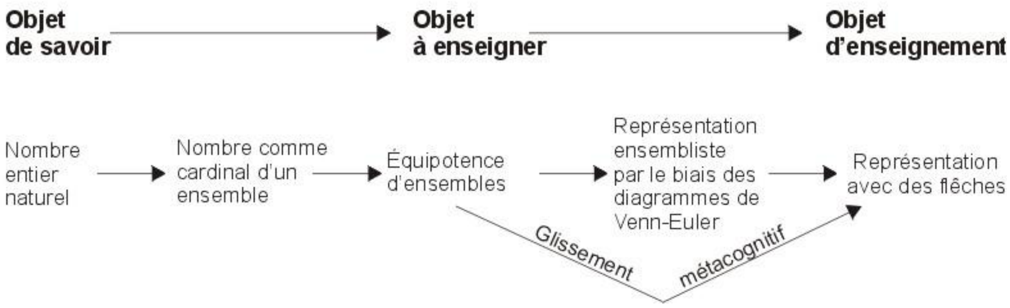


Figure 1. Transposition didactique de la notion de nombre entier naturel

En ce qui concerne la Maternelle, la reforme éducative des années 60 a provoqué :

- un grand recul des activités mathématiques pour lesquelles le nombre est *l'objet et l'outil* (Douady, 1986, 1991),
- un développement des activités dites pré-numériques.

À l'époque, on donnait beaucoup d'importance à des activités de désignation, classification, sériation et schématisation. On recommandait une approximation de la notion de nombre naturel par le biais de correspondances entre éléments de deux collections des objets ; l'utilisation du nombre était restreinte pratiquement à la détermination du cardinal d'un ensemble d'éléments peu nombreux.

Peres (1988) apporte des preuves empiriques qui permettent d'affirmer que cette approche était erronée. L'apprentissage logique n'est pas un pré-requis pour l'apprentissage numérique et donc il ne faut pas atteindre à l'École Élémentaire pour commencer son enseignement. Cette thèse n'implique pas l'exclusion des activités de type logique et relationnel, par exemple, les classifications et les sériations ; il faut les apprécier par leur propres buts (développement de la pensée logique). Peres (1988) preuve que l'enfant de 6 ans ne peut pas saisir tous les aspects du nombre naturel (ordinal, cardinal, caractère connexe et itératif, etc.)

Quelle est la manière actuelle de construire le nombre chez l'enfant ? Est-ce que le nombre est présenté par des différents moyens, contextes, registres et sens ? La représentation des ensembles par le biais de diagrammes de Venn-Euler, continue-t-elle à être un objet d'enseignement ?

2. Caractéristiques spécifiques de la maternelle

Lacasta et Wilhelmi (2007) identifient trois principes qui conditionnent l'enseignement de mathématiques et la formation des maîtres en Maternelle.

1. *Principe du caractère élémentaire des connaissances logiques mathématiques*, attaché à des processus génétiques tels que la symbolisation et la validation. Il empêche éditeurs des matériels et formateurs de maîtres de se réfugier dans la discipline mathématique comme seule source de savoir.

2. *Principe du méthode globale de l'enseignement*. La présentation scolaire de connaissances et des savoirs se fait globalement et elle doit partir des centres d'intérêt des enfants. Néanmoins la formation initiale des maîtres part des disciplines classiques (psychologie, pédagogie, langue, mathématiques, etc.). La transposition didactique devient particulièrement difficile, puisque la transformation des savoirs doit tenir compte de la méthode globale.

3. *Principe d'attention à la diversité des élèves et du respect au processus cognitif individuel*. Chaque enfant a son rythme et son style de maturité, de développement et d'apprentissage, qui conditionnent son affectivité, ses caractéristiques personnelles, ses besoins et ses intérêts. L'action des maîtres a donc une contrainte inéluctable. (MEC, 2007, 474–475).

La mise en œuvre de ces trois principes est problématique. Souvent, une mauvaise application pratique du temps et des outils disponibles provoque un enseignement mathématique qui n'est qu'une caricature du processus d'étude prévu.

Les curriculums officiels rarement aident à préciser les mathématiques qu'il faut développer à la Maternelle: « *Objectif 4: S'initier aux habilités mathématiques, utiliser fonctionnellement éléments et collections, identifier leurs attributs et leurs caractéristiques, et* *établir des relations d'agroupements, classification, ordre et quantification* ». (MEC, 2007, p.479).

Cet objectif ne permet pas d'imaginer quelles habilités mathématiques faut-il développer. Qu'est-ce qu'on dirait d'un curriculum pour le collège ou le lycée avec un tel niveau de « précision » ? Par exemple : « s'initier aux habilités mathématiques, utiliser fonctionnellement les nombres rationnels, identifier leurs attributs et leurs caractéristiques »… Quels attributs et quelles caractéristiques des nombres rationnels ? Dans quels contextes faut-il les utiliser ? Il faut donc remettre en question l'utilité et l'intérêt de ce type de curriculum de mathématiques à la Maternelle et réviser l'activité mathématique proposée à l'étape.

3. Milieu et milieu matériel: illusions, contraintes et degrés de liberté

La Théorie des Situations Didactiques (TSD) (Brousseau, 1997, 1998) postule la nécessité de la participation des élèves dans la construction et la communication des connaissances. La notion de milieu est alors essentielle dans la TSD. Pour l'enseignement d'un savoir, le professeur élabore *a priori* une situation didactique, qui prévoit l'interaction des sujets avec un milieu. L'action des élèves sur le milieu produit des rétroactions intelligibles, qui permettent l'évolution de leurs connaissances. Dans la phase adidactique, l'interaction des élèves avec le milieu antagoniste n'a pas besoin de l'intervention didactique[4] du professeur. L'interaction est assujettie aux contraintes et aux degrés de liberté du milieu. La figure 2 résume ce processus.

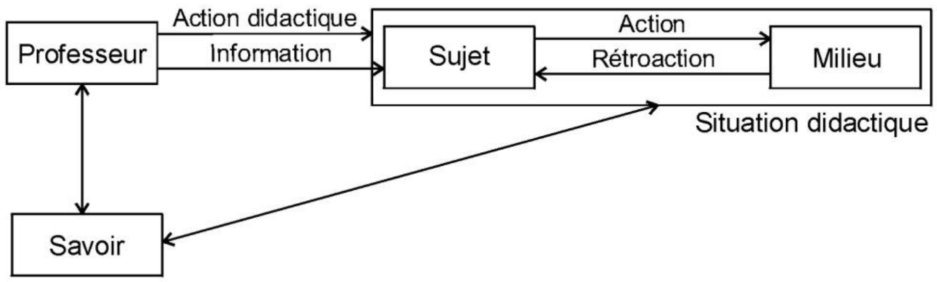


Figure 2. Situation didactique à composante adidactique

Le milieu contient un support matériel, mais il ne peut pas être identifié avec lui. Un même support matériel peut fournir différents milieux matériels, selon un jeu formel associé (ensemble de règles, contraintes, degrés de liberté, etc.). De même, des milieux

4 Le professeur peut intervenir pédagogiquement ; c'est-à-dire qu'il peut demander attention de la part des élèves, ordonner les débats, etc.; mais, en tout cas, il renonce à l'introduction d'informations explicites sur les connaissances qui pourraient produire des effets du type Topaze.

matériels peuvent devenir « visibles » selon divers milieux effectifs (figure 3)[5]. Par conséquent, le milieu effectif dépend du milieu matériel, se développe sur des supports matériels différents et devrait assurer le fonctionnement de la situation par rapport au savoir visé.

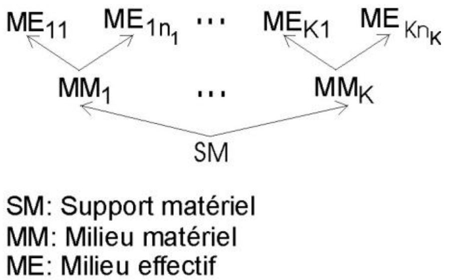


Figure 3. Support matériel, milieu matériel et milieu effectif

Cette complexité nous permet d’affirmer que toute représentation du système didactique —telle que la figure 2—, n’est qu’une « photographie » statique, d’une réalité toujours dynamique et changeante. Il faudra donc surveiller les conclusions basées sur des modélisations de ce type.

Quels sont les milieux matériels privilégiés à l’éducation maternelle ? Quels sont les types d’interaction des enfants avec ces milieux ? Quelles sont les caractéristiques qui leur sont attribuées par l’institution scolaire ? Cette attribution, est-elle fondée ? Quel en est l’origine scolaire de leur usage et la justification de leur pertinence ? Essayons de répondre à ces questions.

3.1. Les milieux matériels à l’éducation maternelle

L’interaction des enfants avec le savoir est soumise à des conditions diverses, selon le milieu matériel. Nous avons identifié cinq types de milieu matériel différents :

1. *Manuel-cahier*. Le manuel contient le savoir scolaire ; il est interdit d’y écrire. C’est le milieu privilégié jusqu’à la réforme des années 60. Les réalisations de l’élève s’expriment verbalement, dans les cahiers ou éventuellement au tableau.

---

[5] Lacasta (2005) montre que le graphique cartésien des fonctions donne cinq types de milieu, selon les rapports au graphique permis —effectifs ou fictifs, opaques ou transparents—, selon le support graphique précisé, son utilité et ses limitations. Les cinq types de milieu sont surnommés : *nomogramme, illustrateur topologique, idéogramme, opérateur* et *graphique structuré*.

2. *Fiches*. Elles contiennent le texte du savoir structuré, selon l'activité prévue de l'enfant : remplir des creux, compléter des phrases, tracer des flèches, colorier des figures, etc. Sa structure suit souvent les principes du behaviorisme ou de l'enseignement programmé par objectifs.

3. *Tableau de jeu*. Il contient un ensemble de symboles et de graphiques ; éventuellement il peut comporter un texte. Le tableau est structuré sur un support plat et il dispose d'un ensemble d'éléments mobiles, dont la position sur le tableau fournit des informations. Son utilisation scolaire commence à se produire après les réformes des années 60–70.

4. *Ordinateurs*. Les logiciels correspondants sont conçus pour l'utilisation scolaire. Cette utilisation est influencée par la présence fréquente de vidéo-jeux commerciaux utilisés par les enfants chez eux.

5. *Des matériaux manipulables* : abaques, gommettes, éléments du jeu symbolique, blocs de Diénès, réglettes Cuisenaire, etc.

3.2. Description

Ces milieux matériels peuvent être décrits par le biais de quatre critères : complexité, degrés de liberté, registres et rétroaction.

- *Complexité de l'information graphique, symbolique ou dynamique du matériel*. Dans les fiches, une fois accomplie, l'action est irréversible ; le sujet doit interpréter la fiche selon des codes « muets et statiques », avant d'y agir. Par contre, les tableaux et les logiciels donnent des informations intelligibles qui permettent la rétroaction. La présentation du milieu manuel-cahier est stable par rapport au temps et par rapport aux savoirs.

- Les *degrés de liberté* précisent les types d'intervention possibles de l'enfant. Les contraintes des fiches sont extrêmes par rapport aux degrés de liberté du manuel-cahier. Le cahier —surtout celui du brouillon— offre à l'élève une surface d'expression libre, limitée seulement par les indications occasionnelles du maître.

- *Les registres* utilisés dans le milieu manuel-cahier sont très variés et ils ne sont pas structurés *a priori*. Les tableaux de jeu et les logiciels présentent des registres pré-structurés, souvent variés. Par contre les systèmes de représentation sur les fiches ont une tendance au mono-registre qui découle d'un effet d'ostension, c'est-à-dire, de la confusion entre la notion mathématique et une de ses représentations.

Les milieux matériels différents comportent des symboles, des codes, des conventions, etc., différents. « Une connaissance mise en mot et en symboles n'est plus la même connaissance » (Vergnaud, cité par Trouche 2005, 108). Par conséquent, un savoir présenté par le biais de différents milieux, mobilise des connaissances différentes.

- *Rétroaction,* « action de contrôle en retour *(feed-back)* » (Chevalier, 1993, 26). Toutes les collections de fiches demandent aux enfants la réalisation d'une même tâche plusieurs fois, à quelques nuances près, parce que les auteurs supposent un taux considérable d'échec initial. Une fiche isolée ne permet donc pas vraiment de rétroaction. Par contre, les tableaux et les logiciels donnent parfois des informations intelligibles sur les conséquences de l'action du sujet.

  Si la situation comporte une dialectique de communication, le sujet reçoit aussi des informations de son partenaire. Dans le milieu manuel-cahier, le recours au manuel est le plus souvent contrôlé par le professeur et les possibilités de rétroaction avec le texte du savoir sont réduites.

4. Analyse *a priori*

Dans l'institution « école maternelle », les milieux matériels sont assez souvent censés avoir des caractéristiques qui ne s'accordent pas à leur nature, leur fonction ou leur sens. Il y a deux raisons fondamentales : 1) l'inobservation des contraintes et des degrés de liberté donnés par le milieu matériel lui-même ; 2) le développement non contrôlé par le professeur des situations où le milieu matériel est mis en jeu.

Voici les sources de quelques illusions concernant le milieu matériel :

1. *Utilisation et signification des matériaux*. Les matériaux scolaires liés à l'enseignement des mathématiques ont été conçus pour viser des connaissances et savoirs déterminés préalablement. Les abaques et les réglettes Cuisenaire visent le nombre et le système de numération. Les jeux de pistes comportant des cases numérotées, mobilisent le nombre ordinal. Les blocs logiques de Diénès comportent

quatre caractéristiques (forme, couleur, taille et épaisseur[6]), matérialisées par une collection d'objets en plastique. L'œuvre de Diénès et collaborateurs prétend faire acquérir des connaissances mathématiques des écoles maternelle et primaire (ensembles, logique, arithmétique, géométrie et topologie) à partir d'un même support matériel : les blocs logiques. Néanmoins, dans certaines situations les blocs de Diénès ont des utilisations bâtardes et incontrôlées.

À l'école maternelle, des objets comme les blocs, les réglettes, l'abaque et d'autres, sont très souvent des instruments auxquels le professeur leur confère une instrumentation et une signification basées sur des règles établies par lui-même, tandis que l'enfant ne perçoit l'objet que comme un simple outil dépourvu de cette instrumentation et de cette signification. Cette double perception est à l'origine d'effets du type Diénès ou Jourdain.

Rabardel, selon Trouche (2005), signale la différence entre *artefact* (objet indépendant de toute relation avec un usager), *outil* (objet technique intégré par un usager dans ses gestes) et *instrument* (objet technique ainsi que des modes d'utilisation construits par un usager).

2. *Les représentations graphiques des matériaux et leurs significations*

Les fiches, par nature, offrent toujours une représentation plane de la réalité tridimensionnelle. Elles offrent en plus un ensemble de codes et de symboles prétendument « naturels » créés par les auteurs, et parfois très difficiles à interpréter, même pour un adulte : des flèches qui suggèrent tantôt des déplacements, tantôt des additions ou des soustractions ; des barres représentent parfois des négations, parfois des soustractions, etc.

En général, par rapport à la sobriété des manuels scolaires traditionnels, les collections de fiches de travail actuelles présentent une profusion d'éléments typographiques (couleurs, traits, décors, dessins, etc.) qui très souvent ne sont que des recours d'agrément par des raisons de marketing.

L'ensemble des représentations, des symboles et des codes des fiches a un caractère arbitraire ; il ne répond pas à une syntaxe unifiée. Malgré tout, les auteurs des fiches,

[6] Certaines versions de collections de blocs remplacent l'épaisseur par le type de surface (lisse ou rugueuse).

les éditeurs, les professeurs et les parents ont l'illusion que cet ensemble constitue un langage adapté aux enfants.

3. *L'image, les nouvelles technologies et les projets d'enseignement*. Depuis longtemps, d'abord les images puis les écrans ont tendu à remplacer à l'école maternelle l'écrit et les livres. Les nouvelles « technologies de l'information, de la communication et de la connaissance » (TICC) peuvent créer l'illusion suivante :

   Enseignement traditionnel + TICC = Nouveau projet d'enseignement

   Cette illusion est basée sur la croyance que toute innovation basée sur les TICC donne un projet d'enseignement meilleur *per se*.

4. *Gestes, codes, procédés et connaissances*

   Le contrôle épistémologique des mathématiques à l'école maternelle est très complexe. Le caractère élémentaire des connaissances empêche le recours au corpus mathématique formel et stable. Les intuitions mathématiques restent alors camouflées entre les difficultés linguistiques et la socialisation. Il est donc facile d'affirmer que la valorisation de l'activité mathématique est coûteuse et toutefois diffuse.

   D'ailleurs le curriculum de la maternelle est extrêmement distendu et il laisse sous la responsabilité du professeur la plupart des décisions à prendre.

   Ces contraintes propres à la maternelle ont favorisé l'apparition d'une pléiade de matériaux très hétérogènes pour l'enseignement. Certains d'entre eux ne sont pas assujettis au curriculum de la maternelle et d'autres sont offerts par des éditeurs spécialisés dans les manuels scolaires.

   Les collections de fiches utilisées en milieu scolaire sont parfois accompagnées d'un livre du maître, (Brégeon et Méténier, 2001). Par contre, assez souvent le livre du maître n'est pas disponible et chaque fiche contient une explication sur la tâche à accomplir par l'élève dirigée vers le maître.

   Lorsque les enfants réalisent les tâches stéréotypées des fiches, ils n'acquièrent pas forcément les connaissances rapportées à leur contenu, visées par l'institution. Souvent le succès à la réalisation de la tâche ne montre que la naturalisation de gestes rituels, de codes mimétiques et arbitraires (donnés par le professeur ou la fiche) ou de procédés dépourvus de sens.

La situation « La boîte vidée » (Briand, Loubet et Salin, 2004) est un exemple de la construction d'un code à l'école maternelle. La mobilisation de connaissances variées, la complexité du dispositif matériel et d'enseignement, montrent que le processus de symbolisation (qui est à la base des mathématiques) peut être traité en situation pleine de sens. Au lieu de cela, on assiste fréquemment à une présentation ostensive de symboles non justifiés, incontrôlés et arbitraires.

Le professeur de maternelle distribue les fiches dans la classe. Tout de suite il donne la consigne à suivre, et les élèves se plongent à l'activité. Le résultat de leurs actions, manifesté par des traits sur la feuille, est validé par le professeur. Les élèves agissent sous le contrat didactique et ils doivent imaginer quels sont les traits qui pourraient s'adapter aux attentes du professeur. Cette situation didactique (qui repose sur le milieu matériel « fiche »), n'a pas de *composante adidactique* (Bloch 1999).

Dans une situation purement didactique:

- le sujet (l'élève) n'a pas un rapport direct au savoir. Celui-ci reste toujours du côté du professeur lors de l'apprentissage ;
- le milieu ne remplit pas le rôle de milieu antagoniste : ses réponses ne sont pas intelligibles pour le sujet ;
- la rétroaction est toujours à la charge du professeur, qui doit rendre visible à l'élève son but d'enseignement à chaque étape de la situation (pour préserver le sens de ses actions et celles d'élèves).

. Preuves experimentales

Les preuves expérimentales que nous allons apporter ne sont pas exhaustives par rapport à la réalité, mais elles vont nous permettre d'exemplifier des aspects prévus auparavant puis d'autres sur la numération en maternelle.

5.1. Confusion entre la notion mathématique et une de ses représentations

La relation d'ordre est fréquemment introduite comme la répétition d'une série ordonnée de 3 ou 4 éléments : couleurs, formes géométriques, configurations, etc. (figure 5). La tâche pour l'enfant est la détermination du patron à reproduire, basé sur l'information « donnée » à la figure.

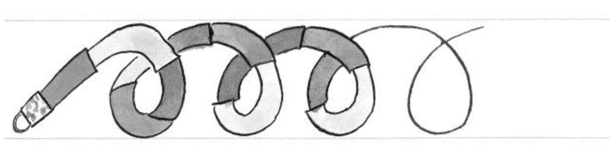
(Roig, 1984)	(Camarero et al., 2006)
	

Figure 5. Sériations

Même si l’élève accomplit correctement la tâche proposée, est-il possible assurer qu’il a acquis la notion d’ordre ? La situation « L’ordre linéaire » (Briand, Loubet et Salin, 2004) nous permet d’affirmer que l’acquisition de l’ordre est un but d’enseignement assez difficile à accomplir et qu’il faut des interventions continues et spécifiques pour donner du sens au savoir visé.

Une preuve de la nécessité de telles interventions est la difficulté de gestion des jeux de pistes comportant des cases numérotées ou selon une disposition ordinale : jeux du type des « petits chevaux ». Dans ce type de jeux, la difficulté est de déterminer la relation d’ordre par rapport aux contraintes des tableaux et non pas par rapport à la position des joueurs relative aux tableaux (figure 6).

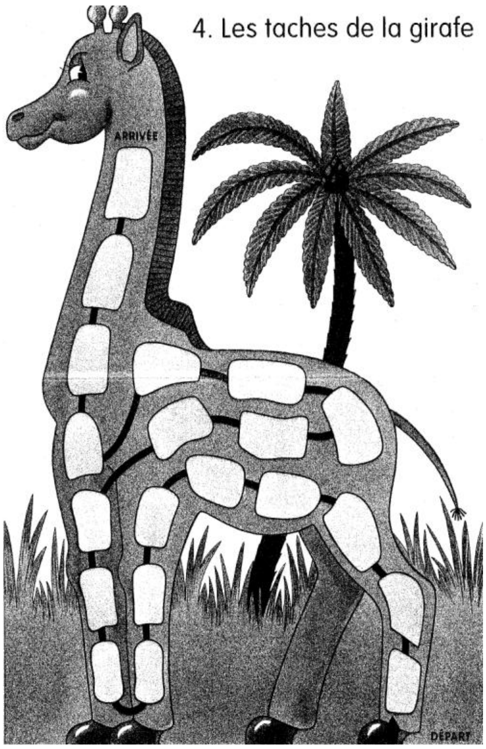


Figure 6. Jeux de pistes (Brégeon et Méténier, 2004)

Pour déplacer la fiche sur le tableau de la figure 6, l’enfant doit comprendre ce que signifie « avancer »: dans les trois premières cases, « monter plus haut » ; dans les deux cases suivantes, « aller à gauche » ; dans les trois cases suivantes, « descendre » ; etc. C'est-à-dire, l'ordre ne suit pas une seule « tendance » : s'éloigner, s'approcher, aller à gauche ou à droite, etc. Ceci ne s'accorde pas avec le principe général, selon lequel le rapport de l'enfant au milieu est basé sur une conception égocentrique de la réalité.

5.2. Rétroaction

Dans l'exercice de la figure 7 extrait du site « Fantasmín » (MEC, 2008[7]), l'élève doit compter le nombre de passagers et appuyer sur le numéro. Si la réponse est correcte, le train siffle et marche ; si la réponse est incorrecte, il n'y a pas de son ni de mouvement. Cette information sonore et visuelle que l'élève reçoit, lui permet d'évaluer son action. Mais ces rétroactions sont externes, elles ne font pas partie de l'activité mathématique elle-même.

La résolution de l'exercice extraite d'une collection des fiches (Roig, 1984), ne donne pas d'informations aux élèves sur la validité de leurs réponses.

MEC (2008) Roig (1984)

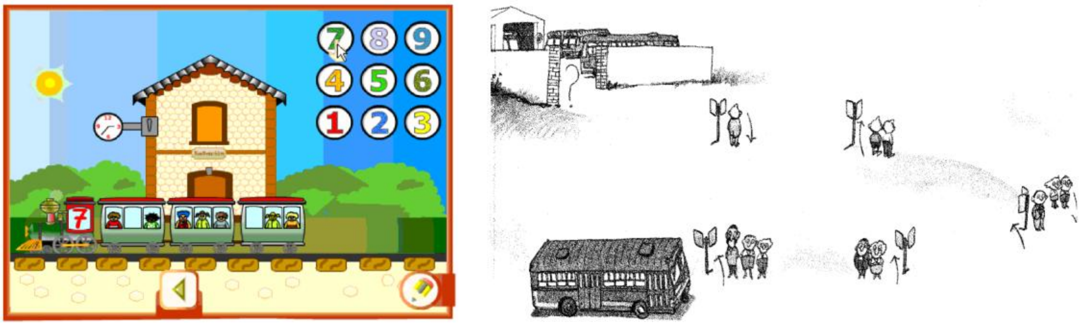


Figure 7. Exercices d'addition et de soustraction

Dans ces fiches, la participation du maître est indispensable : il doit envisager une situation de communication entre les élèves et surveiller son déroulement ; ou, même, il doit prendre toute la rétroaction à sa charge[8]. Cependant, l'appliquette[9] permet au maître de laisser aux enfants une plus grande responsabilité (du point de vue de la connaissance, non pas de la culpabilité), même si l'enfant n'utilise pas spontanément l'information qu'il reçoit pour améliorer son efficacité, tout en donnant des réponses

[7] http://ares.cnice.mec.es/infantil (dernière révision le 28 juillet 2008).

[8] Une question cruciale : est-ce que le bus est vide au départ ? Si « x » représente le nombre de passagers au début, la bonne réponse est « $x + 5$ ».

[9] Appliquette : de l'anglais *applet*, parfois traduit en français une « applette », peut être définie comme un logiciel qui s'exécute dans la fenêtre d'un navigateur web.

quasi-aléatoires jusqu'à obtenir que le train siffle et marche. Le maître peut alors organiser une autre situation de communication pour forcer les enfants à interpréter les informations du logiciel avant d'agir, pour prévoir les conséquences. Dans ce cas, il ne faut pas que le maître intervienne pour déterminer si les élèves ont réussi ou non la tâche : le logiciel est l'arbitre.

5.3. Utilisation et signification des matériaux

Comme nous l'avons déjà dit, les matériaux scolaires liés à l'enseignement des mathématiques ont été conçus visant des connaissances et des savoirs déterminés préalablement. Néanmoins, dans certaines situations ces matériaux ont des utilisations bâtardes et incontrôlées.

La situation *« La llegada de Juan Tambor »* (MEC, 1989) propose un tableau (figure 8) dans lequel les enfants doivent marquer les instruments de musique de leur préférence, représentés sur la première colonne par le dessin des blocs logiques de Diénès ; ceux-ci ont été choisis par les auteurs arbitrairement comme les symboles des instruments.

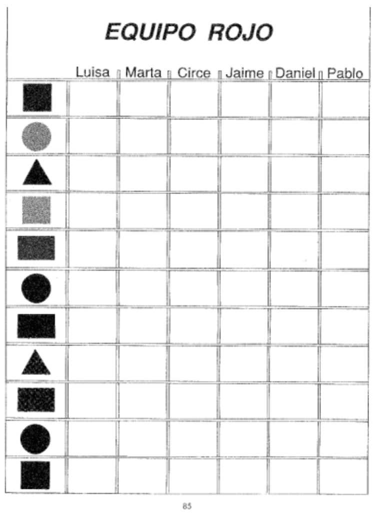


Figure 8. Situation « La llegada de Juan Tambor » (MEC, 1989, 85)

Cette utilisation arbitraire des blocs n'est pas anecdotique. Par exemple, le site « Fantasmín » utilise la représentation des blocs pour proposer des tâches de correspondances entre ensembles, de difficulté variable, selon le nombre et disposition des objets et du type de correspondance (figure 10). Il n'est pas possible d'attribuer à la coïncidence l'utilisation des mêmes formes, couleurs et tailles dans les tâches proposées que dans les blocs de Diénès… Il y a une large tradition scolaire à utiliser ce type de représentation, en l'attribuant une valeur logique « en plus ». Cette croyance infondée, et même mythique doit être dépassée.

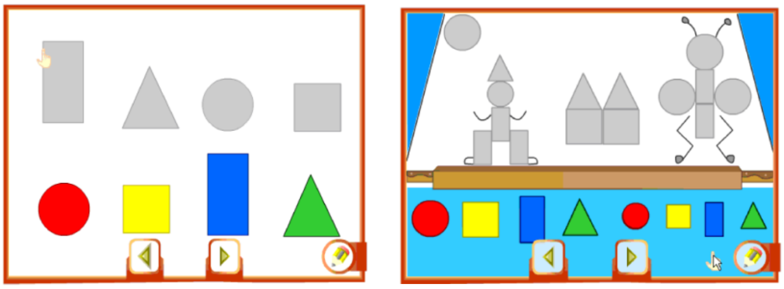


Figure 9. Correspondances entre ensembles (MEC, 2008)

Quelques remarques additionnelles :

1. *Les correspondances entre ensembles coordonnables ou non coordonnables* sont habituellement introduites comme une manière de mettre en rapport des collections différentes par le biais de leurs caractéristiques communes ou de quelque relation entre elles, par exemple la forme (figure 10).

2. *Les nouvelles technologies et les projets d'enseignement.* La seule présence de logiciels dans les projets d'enseignement entraîne un certain risque d'illusion, selon laquelle le projet d'enseignement devient meilleur *per se*. Les images « jolies » et la possibilité de rétroaction ne permettent pas de faire abstraction, par exemple, de l'utilisation arbitraire des blocs et d'en faire la critique.

3. *L'introduction des tableaux*. À l'école maternelle, donner du sens à l'organisation de l'information en tableau est tout à fait difficile et peut-être impossible sans intervention explicite du maître. Chabroulet (1999) donne des preuves expérimentales d'un processus de construction des tableaux par des petits enfants. Dans ce processus-là, la maîtresse intervient fortement pour que le groupe puisse réussir la tâche. Malgré tout, les tableaux sont introduits jusqu'à présent sur différents supports matériels (figure 10), sans aucun contrôle.

Brégeon et Méténier, 2004 MEC (2008)

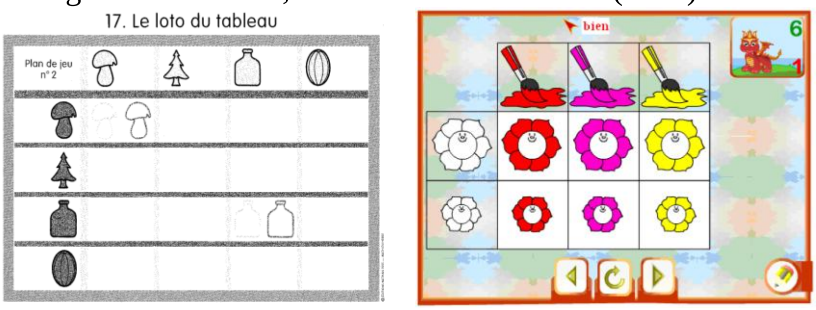


Figure 10. Tableaux

5.4. Des codes « intuitifs » pour les enfants

La présentation ostensive de symboles non justifiés, incontrôlés et arbitraires est très fréquemment présente sur les supports matériels. Par exemple, dans la figure 8, l'addition est dénotée par une flèche qui signale vers le haut ; la soustraction, par une flèche que signale vers le bas. Dans la figure 11, l'addition est dénotée par un crayon ; la soustraction, par une gomme à effacer. Pourquoi les auteurs introduisent-ils ces notations bizarres ? Pourquoi ils n'utilisent pas les notations conventionnelles pour l'addition (+) et pour la soustraction (–) ?

Il paraît que certains auteurs des fiches ont une interprétation bizarre du principe selon lequel le rapport au savoir des enfants est basé sur l'univers de leurs intérêts. Mais rien ne permet aux auteurs de penser que l'utilisation d'une flèche, d'un crayon et d'une gomme à effacer sont des objets « intuitifs », liés naturellement à l'univers des intérêts des enfants. Rien n'assure que ces notations permettent *per se* des apprentissages plus efficaces et durables que l'utilisation de la notation mathématique.

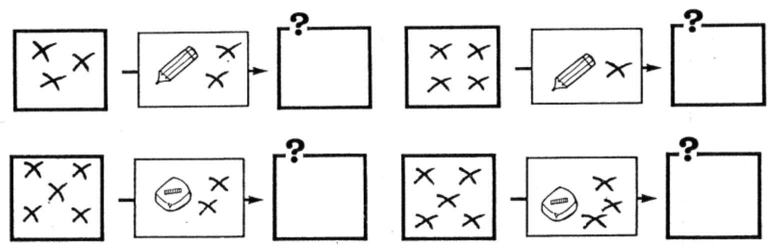


Figure 11. Adition (crayon) et soustraction (gomme à effacer) (Goñi, 1987)

5.5. Les représentations graphiques des matériaux et leurs significations

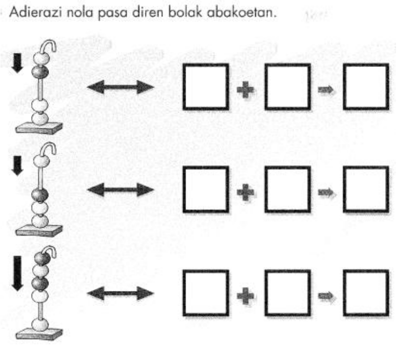
Sur les dessins de matériaux manipulables tels que réglettes Cuisenaire, blocs logiques, abaques, etc., certains auteurs de fiches ajoutent des flèches et d'autres symboles qui représentent des actions relativement complexes sur ces matériaux.

La symbolisation n'est pas à la charge de l'enfant. Elle est fournie par l'auteur des fiches et transmise par le professeur sous forme de consigne.

Dans le premier abaque de la figure 12 (Goñi, 1998), des flèches de longueurs différentes représentent l'adition des boules, interprétée par la suite comme l'opération de l'addition. Pareillement à la figure 11, les auteurs n'utilisent pas le signe « égal (=) » ; à sa place, ils mettent une flèche horizontal (→). Pourquoi les auteurs pensent-ils que une flèche et plus proche à l'univers d'intérêts des enfants ?

Le second abaque de la figure 12 (site « Fantasmín ») est placé ici pour souligner l’hypothèse fausse, selon laquelle les élèves ont une capacité « naturelle » de transformer leurs connaissances de la réalité physique dans un contexte bidimensionnel et représentationnel, et vice versa. Cette prémisse ne prend pas en charge la très longue problématique de la représentation dans l’enseignement des mathématiques. Il n’est pas possible d’assurer *a priori* qu’un élève qui réussit aux tâches proposées soit plus compétent avec l’abaque. En somme, la représentation des objets scolaires dans les fiches ne suppose pas nécessairement « une valeur ajouté ». Il faut des analyses critiques sur le but visé dans les fiches qui présentent des représentations des objets scolaires, tels que des abaques, des réglettes Cuisenaire, des blocs logiques de Diénès, etc.

Goñi (1998)



MEC (2008)

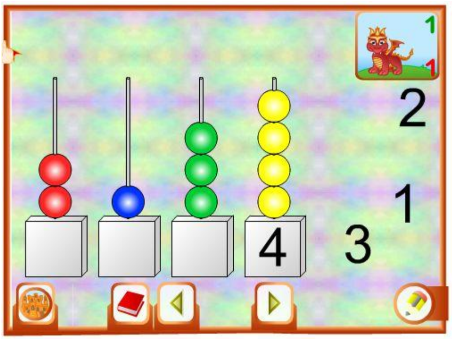


Figure 12. Abaques dessinés et représentation des actions sur eux

5.6. Le champ numérique à l’école maternelle

L’équipe ERMEL (1990, 32–33) détermine le champ numérique à l’école maternelle :

- *les nombres visualisables* : jusqu’à 4 ou 5. Ce sont les nombres pour lesquels une reconnaissance rapide ou globale est possible, sans recours au comptage ou avec un comptage très rapide.
- *les nombres familiers* : jusqu’à 12, 16, 19… selon les enfants. La comptine (récitation des noms des nombres) peut être maîtrisée assez rapidement et le dénombrement par comptage un à un est possible et efficace.
- *les nombres fréquentes* : en gros, les nombres du calendrier (jusqu’à 30 environ). La comptine peut assez aisément être prolongée jusque-là. C’est surtout dans ce domaine que les élèves vont trouver l’occasion de faire leurs premières constatations sur les « régularités » de la suite écrite de nombres.

- *les grands nombres*: ils ont souvent un rôle un peu mythique pour l'enfant (« je suis grand, je sais compter jusqu'à 100 » ; « je voudrais 1000 euros » ; etc.) C'est là que les procédés de dénombrement ou d'écritures liés à la numération écrite (groupements, échanges, compteurs) prendront tout leur intérêt et donc leur sens.

  Contrairement aux domaines précédents (notamment le premier et le second) où les désignations orales sont souvent premières, ici ce sont les désignations écrites qui sont d'abord produites et utilisées (au-delà des 100 éventuellement). C'est aussi là que les algorithmes de calcul deviendront nécessaires.

Néanmoins, il se produit assez souvent une triple réduction :

1. *Du champ numérique*. Le champ numérique proposé aux élèves dans plusieurs collections de fiches est beaucoup plus restrictif : jusqu'à vingt (Brégeon et Méténier, 2004) ou, même, jusqu'à neuf (inclut le zéro), c'est-à-dire, nombres d'un seul chiffre (Castillejo, 1991 ; Goñi 1987, 1998 ; Camarero et al., 2006 ; etc.).

2. *De la représentation de nombres*. La tâche la plus souvent proposée dans les collections de fiches est la représentation du signe des nombres d'un seul chiffre. C'est une tâche de psychomotricité fine, qui est équivalente à faire de traits du contour d'une figure ou redessiner une ligne discontinue ou pointillée. Cette tâche ne suppose pas un vrai enjeu mathématique.

   L'explication graphologique est : « il est suffisant que les élèves apprennent à écrire bien les graphies 0–9, car ils pourront après écrire n'importe quel nombre ». On imagine l'application d'un raisonnement de ce type au processus d'apprentissage et d'enseignement de l'écriture: « il est suffisant que les élèves apprennent à écrire les lettres, car ils pourront après écrire n'importe pas quel mot ou quelle proposition »…

3. *De l'usage de nombres*. Le nombre ordinal est très peu présent. La tâche la plus répandue est la détermination du cardinal d'une configuration d'objets ordonnés et pas très nombreux, dont la seule observation visuelle donne une information tellement précise, qu'il n'est pas presque nécessaire de mettre en place des stratégies pour compter.

5.7. Le zéro (0)

Dans l'enseignement classique le zéro est un de dix chiffres qui permettent d'écrire tous les nombres. Il est introduit depuis le neuf, car il est nécessaire pour écrire des nombres plus grands que neuf (figure 13).

Figure 13. El zéro à l'Encyclopédie Álvarez (1964, 21)

La reforme ensembliste et ses applications ont donné un nouveau statut au nombre zéro comme :

1. *L'élément neutre* pour l'addition et la soustraction (figure 14). Quelles situations à l'école maternelle pourraient-elles permettre d'introduire des affirmations du type « trois plus (moins) zéro est trois » ? Est-il licite de dire, du point de vue du sens, « j'ai trois bombons et j'en ajoute zéro de plus ; alors j'en ai trois toujours » ?

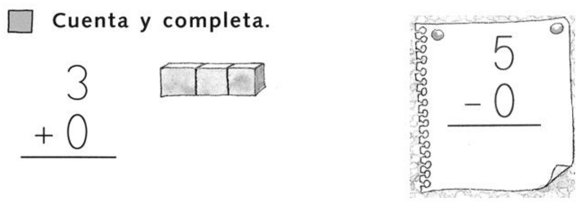
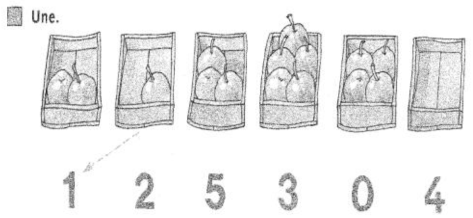


Figura 14. Le zéro pour l'addition et la soustraction (Gil, 1992)

2. *Cardinal de l'ensemble vide* (figura 15). Est-il nécessaire d'introduire des expressions du type « j'ai zéro chapeaux » ou « l'ensemble des porcs qui volent est l'ensemble vide dont le cardinal est zéro » ? N'est pas-t-il plus adéquat de dire « je n'ai pas de chapeau » ou bien « il n'y a pas de porcs qui volent » ? Presque toujours, l'utilisation du zéro comme cardinal de l'ensemble vide dans une proposition admit une autre expression qui n'a pas besoin du zéro. L'introduction est plutôt un jeu sémiotique qu'un enjeu mathématique.

(Gil, 1992) (Camarero et al., 2006)



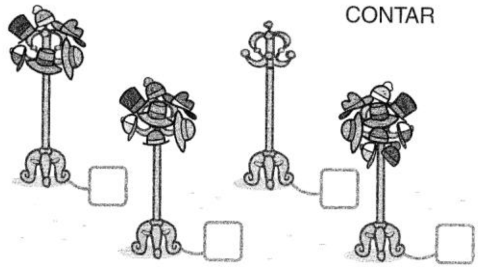


Figure 15. Le zéro comme Cardinal de l'ensemble vide

3. *Premier nombre entier naturel* (figure 16). S'il est certain que le zéro est l'unique nombre que n'a pas d'antécédent dans l'axiomatique de Peano, il est aussi certain qu'une telle présentation induit des méconnaissances chez les élèves. Personne ne fait un dénombrement selon la séquence « zéro (premier objet), un (deuxième), deux (troisième), … ». Même si l'an 2000 a été souvent pour les médias le premier an du XXIème siècle.

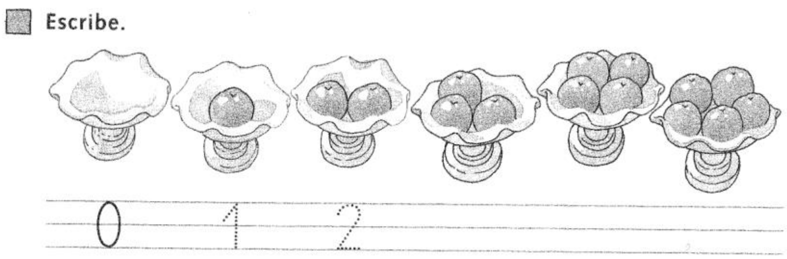


Figure 16. Le zéro comme premier nombre entier naturel (Gil, 1992)

5.8. Les diagrammes de Venn-Euler: un fossile de bouche en bouche ?

Dans la figure 17, il y a des plusieurs représentations de diagrammes de Venn-Euler extraites des manuels. Les formes de diagrammes changent au long du temps : de la forme classique ovale (« papygramme ») à l'utilisation d'une écharpe qui contourne des petites écharpes. L'étiquette avec le cardinal de l'ensemble change aussi : elle peut devenir un nombre qui pend de l'ensemble, un écureuil qui embrasse un carré ou une fiche de domino à côté de l'écriture du nombre en langage naturel… Ces changements permettent-ils des modifications du rapport au savoir visé ?

(Roig, 1984) (Gil, 1992) (Camarero et al., 2006)

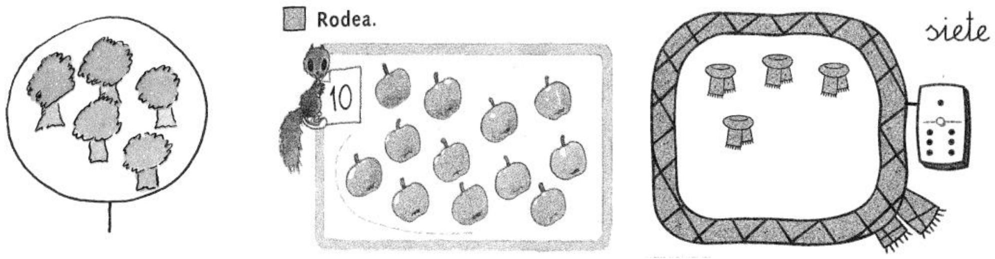


Figura 17. Diagrammes de Venn-Euler

Dans ces situations, la construction des collections qui comporte un vrai enjeu cognitif et épistémologique est absente chez les élèves.

6. Observations finales

La réforme ensembliste cherchait à améliorer la compréhension des savoirs, en refusant un enseignement dogmatique basé sur des algorithmes (figure 18) et des apprentissages mémorisés. À l'époque, la compréhension d'une notion mathématique et du fonctionnement de la structure associée étaient supposés suffisants pour les utiliser en situations et contextes divers.

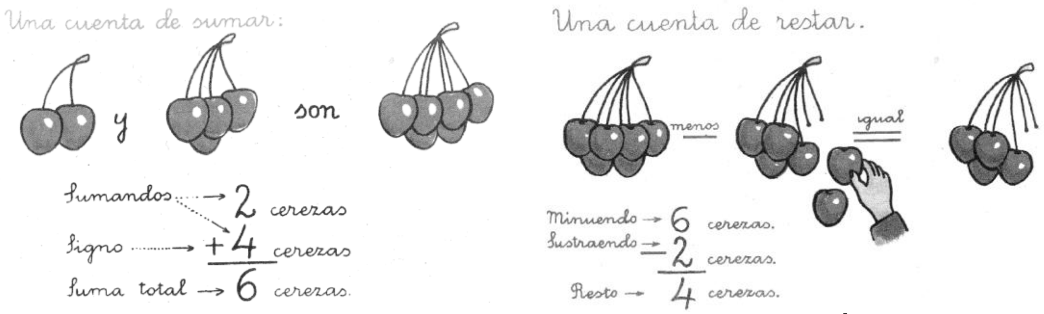


Figure 18. Addition et soustraction en l'éducation maternelle traditionnelle (Álvarez, 1964, 79, 99)

Du point de vue mathématique, la construction de la notion de nombre comme cardinal d'une classe d'ensembles équipotentes est pertinente et inattaquable. Toutefois, Brousseau (1997, 1998) a identifié des phénomènes didactiques qui montrent que la transposition de cette construction pour l'enseignement entraîne un haut risque d'échec scolaire.

Malgré tout, l'enseignement actuel du nombre privilégie toujours son caractère cardinal, très souvent sans tenir compte du caractère ordinal. Déjà Freudenthal (1973) a posé une précoce et lucide plainte à cet égard.

> Dans la genèse du concept de nombre, le nombre 'pour compter' joue le premier rôle et le plus important […] En aucune façon l'enfant ne constitue le nombre comme classe d'ensembles équivalents, même inconsciemment. Le fait d'insister sur cette invariance par bijections est une attitude de mathématicien adulte qui ne peut pas oublier sa propre théorie des nombres naturels. Les enfants apprennent cette invariance dans un contexte beaucoup plus vaste ; ils réalisent que s'ils comptent encore demain ils trouveront à nouveau 5 doigts à leur main, que tous les hommes sont le même nombre de certaines choses et que les nombre de billes dans le mouchoir ne change pas si l'on dit 'abracadabra'. L'invariance par bijections est un point chaud dans ce contexte, un hobby d'adultes qui le vendent comme aspect cardinal. (Freudenthal, 1973, cité par ERMEL, 1990, 23).

Pour être en disposition de réfléchir sur «le nombre», l'enfant doit se familiariser avec les chiffres, les utiliser, percevoir quelques caractéristiques de leur organisation… L'histoire des mathématiques montre que, avant de proposer la définition mathématique de nombre comme cardinal d'un ensemble (XIXème siècle), les mathématiciens et la société ont parcouru une très longue pratique numérique.

Malgré tout, le nombre naturel continue à être présenté comme classe d'équivalence des ensembles coordonnables par le biais des applications bijectives. Une explication raisonnable est l'inertie des systèmes didactiques ; c'est-à-dire la résistance aux changements. La prise en compte des résultats de recherche didactique, le cas échéant, influe rarement la praxis quotidienne du maîtres.

On peut trouver dans les fiches du travail pour l'élève des traces évidentes de l'approche ensembliste du nombre, sous forme des correspondances entre ensembles par le biais de flèches. Il est supposé que la répétition de cette tâche (rarement justifiée dans les institutions) est indispensable pour la compréhension du nombre naturel. Néanmoins, la *raison d'être* de ces activités, c'est-à-dire, l'origine mathématique qui emporte leurs sens et leurs justifications, a disparu absolument. L'activité mathématique devient souvent une simple manipulation des outils scolaires, un pur travail de motricité fine.

La permanence des activités peut répondre à une raison sociale : la production de matériels qui peuvent être montrés aux parents pour qu'ils y reconnaissent l'intention culte de l'activité (*validation externe de l'école*). Paradoxalement, les parents sans aucune formation didactique interpréteront les productions de leur enfant comme une connaissance utile portant une valeur culturelle. Par contre, les parents sagaces pourront mettre à preuve les soi-disant connaissances en lui demandant la réalisation d'une action qui nécessite l'utilisation du nombre ; par exemple : « les grands-parents viennent aujourd'hui à dîner. Tu vas m'aider à tout ranger. Emporte les assiettes nécessaires au salon ! » La manière la plus efficace de réussir à cette tâche est d'établir le nombre de personnes, compter le nombre d’assiettes et les emporter en une seule fois, c’est-à-dire, de faire une correspondance entre les personnes et les assiettes… Cette fois-ci, les parents ont proposé une situation (*adidactique*) qui testerait les connaissances de leur enfant.

Why Johnny can’t add? (Kline, 1973) donnait déjà les raisons de l’échec de la reforme ensembliste. L’écho que *L’âge du capitaine* (Baruk, 1985) a représenté vis à vis de la préoccupation de la société pour l’enseignement des mathématiques, est surtout du à la littérature sensationnaliste à l’intention divulgatrice.

Nous avons intitulé ce travail : « Johnny ne sait pas encore faire des additions ? ». Avec cette question rhétorique, nous faisons référence à :

1. Le risque de ne pas surmonter le phénomène dénoncé par Morris Kline: il n’y a pas de problèmes arithmétiques à l’école et, donc, pour Johnny les opérations d’addition et soustraction n’ont pas d’utilité et de sens. Un enseignement basé sur des fiches de travail ou des matériels semblables (du point de vue du rapport au savoir) comporte ce risque.

2. La trace ensembliste est toujours présente : le zéro comme cardinal de l’ensemble vide, le diagramme de Venn-Euler, etc.

3. La réduction du champ numérique est un fait : en Espagne, 0–9 (dans toutes les collections de fiches plus répandues) ; en France, 0–20 (dans la collection de grand diffusion « Diagonale », Éditorial Nathan). Néanmoins, les nécessités des enfants sont plus grandes : le jour de son anniversaire, le nombre de la rue de sa maison, les sémaphores comportant les secondes d’attente (figure 19), dont les nombres sont chantés par les enfants avec enthousiasme (« comptine inverse »), etc.

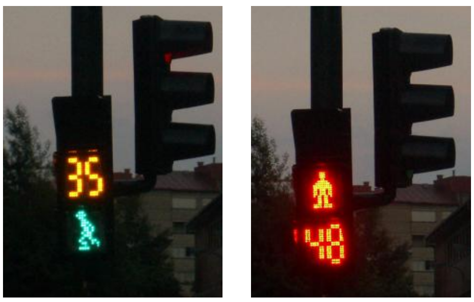


Figure 19. Les sémaphores avec compter

L’arithmétique doit être réifie pour l’enfant, comme outil pour communiquer, pour se mettre en rapport avec « les autres » et aussi pour quantifier des situations proches et celles qui sont de son intérêt. Chaque époque a apporté un regard des capacités de l'enfant et de l'utilité des mathématiques pour les renforcer : quels développements des réformes éducatives présentes pourraient-ils contribuer à ce but-là ? Comment la recherche pourra-t-elle influer ? Il ne s'agit pas de refuser toutes les propositions précédentes, mais d'extraire des conclusions de l'expérience des dernières années et de tenir compte des contributions de travaux de recherche récents.

References

ÁLVAREZ, A. (1964). *El parvulito*. Madrid: EDAF, 1998.

BARUK S. (1985). *L'âge du capitaine. De l'erreur en mathématiques*. Paris: Seuil.

BLOCH, I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu. Connaissances et savoirs. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 19(2), 135–194.

BREGEON, J.-L., METENIER, G. (2004). *Math en herbe*, Collection Diagonale, cycle des apprentissages fondamentaux GS Maternelle. Paris : Nathan.

BRIAND J. (1999). Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Étude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine prénumérique. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 19 (1), 41–76.

BRIAND J., LOUBET M., SALIN M.-H. (2004). *Apprentissages mathématiques*, Cédérom. Paris : Hatier.

BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

_____ (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publishers.

CAMARERO M.; FIGUEROA M.; MARTINEZ M. S.; MONTERO, A. M.; PARDO, M. C.; SALGADO, C.; VICEDO, T. (2006). *Educación Infantil, 5 años, Colección: Monigotes*. Madrid: Anaya.

CASTILLEJO, J.L. (Dir.); HIGES, P. de; ÁLVAREZ, C.; HERRERA, M. (1991). *Educación Infantil, 5 años, Colección: Comenta*. Madrid: Santillana.

CHABROULET M-T. (1974). Apprenons à organiser l'information en tableau. Grand N (nº spécial) 1, 35–51.

CHEVALIER M.-C. (1993). Situations d'apprentissage, actions et rétroactions : une expérience en CP. *Grand N* 51, 25–49.

DOUADY, R. (1991). Tool, object, setting, window: elements for analysing and constructing didactical situations in mathematics. En A. J. Bishop, S. Mellin-Olsen, J.

Van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: its growth trough teaching*. Dordrech, HOL: Kluwer.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-obje. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5–31.

ERMEL (1990). *Apprentissages numériques. Cycle des apprentissages grande section de maternelle.* Paris: Hatier.

FREUDENTHAL (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, HOL: Kluwer.

GIL, J. (ed.) (1992). *Matemáticas 1. El otoño, primer trimestre*. Madrid: Santillana.

GOÑI, J. M. (1987). *Haurtxoa, Baga-Biga (eskolaurrea). Aritmetika lan-koadernoa*. Zamudio: Ibaizabal.

_____. (1998). *Aritmetika 1an-koadernoa, Matematikaren hastapena, haur hezjuntza.* Zamudio: Ibaizabal.

KLINE M. (1973). *Fracaso de la matemática moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* Madrid: Siglo XXI,1986.

LACASTA E. (2005). Les modes de fonctionnement du graphique cartésien de fonctions comme milieu. En M-H- Salin, P. Clanché et B. Sarrazy (Eds.), *Sur la théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

LACASTA E., Wilhelmi M. R. (2007). Deconstrucción de praxeologías de saberes numéricos en la formación de maestros de educación infantil. *II Congreso de la TAD*. Uzès, FRA: IUFM de Montpellier.

Ministerio de Educación y Cultura (MEC) (2008). *El mundo de Fantasmín*. Disponible en línea (1 août 2008): http://ares.cnice.mec.es/infantil/

_____ (2007). Real Decreto 1630/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas del segundo ciclo de Educación Infantil, *BOE* 4, 4 enero 2007, 474–492.

_____ (1989). *Ejemplificaciones del Diseño curricular base. Infantil y Primaria.* Madrid: Autor.

PERES J. (1988). Recherches piagetiennes sur la construction des structures numériques. IREM, Universidad de Burdeos I.

ROIG T. (Coord.); Boixaderas, R.; Fernández, A.; Reverter, R.; Ros, R. (1984). *El 5, cuadernos de trabajo I y II, Preescolar, Colección: La llave de "Rosa Sensat"*. Barcelona: Editorial Onda.

TROUCHE, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherche en Didactiques des Mathématiques*, 25(1), 91–138.