

# Abstração Reflexionante na Construção do Sistema de Numeração Decimal<sup>1</sup>

## Reflective abstraction in the Construction of Decimal Numbering System

CELIA FINCK BRANDT<sup>2</sup>  
ADEMIR JOSÉ ROSSO<sup>3</sup>

### Resumo

*À luz dos enunciados da aprendizagem operatória e abstração reflexionante, a investigação abrange a compreensão de crianças de 3ª e 4ª séries do Ensino Fundamental sobre a estrutura do SND. Como experiência lógico-matemática, a construção do SND apoia-se na ação do sujeito para equilibrar os fatores da experiência com o meio físico e social e da abstração reflexionante. Para avaliar a compreensão, foram aplicadas 14 provas a 109 crianças. As informações analisadas mostram a complementaridade entre as provas e as limitações das tentativas de resolução baseadas em padrões linguísticos. Constatou-se que a aproximação entre o SND e a organização será efetiva se o processo de ensino trabalhar com as possibilidades cognitivas dos alunos ligadas ao processo de abstração reflexionante que coordena as ações dos sujeitos.*

**Palavras-chave:** Sistema de Numeração Decimal. Abstração reflexionante. Operação.

### Abstract

*In light of statements of learning operative and reflective abstraction, the investigation covers the understanding of children in 3rd and 4th grade elementary school on the structure of the SND. Experience as logical-mathematical, the construction of SND relies on the action of the subject to balance the factors of experience with the physical environment and social and reflective abstraction. To assess comprehension tests were applied to 109 children, whose results were recorded on special cards and transferred to a selection of pieces of material Multibase. Information analyzed show the complementarity between the evidence and the limitations of attempts to resolve standards-based language. It was found that the closeness between the SND and the organization will be effective if the teaching work with the cognitive possibilities of the students linked to the process of reflective abstraction that coordinates the actions of individuals.*

**Keywords:** Numeration System. Reflective abstraction. Operation

---

<sup>1</sup> Pesquisa vinculada ao “Pró-Matemática na Formação no Professor (PRÓ-MAT)”, Programa de Cooperação Educacional Brasil-França voltado à melhoria da formação inicial e continuada de professores para as séries iniciais do Ensino Fundamental. Elaborado em 1999 pelos membros do Comitê Assessor e da Secretaria do Ensino Fundamental do MEC (Portaria nº 1397, de 10/11/95), o objetivo era desenvolver estudos e pesquisas na área do Ensino de Matemática, de modo a promover “um efetivo salto qualitativo em nosso sistema educacional” e responder “às atuais demandas sócio-educacionais e às orientações da comunidade da Educação Matemática” (BRASIL, 1999, p. 2).

<sup>2</sup> Universidade Estadual de Ponta Grossa - brandt@bighost.com.br

<sup>3</sup> Universidade Estadual de Ponta Grossa - ajrosso@uepg.br

A construção matemática procede por abstrações reflexivas (no duplo sentido de uma projeção sobre novos planos e de uma reconstrução contínua precedendo as novas construções) e é desse processo fundamental que um número grande demais de ensaios educacionais apressados pretende se abster. (PIAGET, 1998, p. 221).

## **Introdução**

O contato com escolas e professores da Educação Básica permite que identifiquemos problemas na apropriação do Sistema de Numeração Decimal (SND). As pesquisas revelam que esse sistema, construído ao longo da evolução do pensamento humano (EVES, 1997; IFRAH, 1989), possui grande complexidade epistemológica (PIAGET, 1981) e cognitiva (FAYOL, 1996; SERON et al., 1991; SINCLAIR et al., 1994; SINCLAIR et al., 1990; TEIXEIRA, 1996), e que as crianças, junto com a aquisição do SND, devem construir também o aparato cognitivo que possibilita a sua compreensão (VERGNAUD, 1990).

Antes mesmo de frequentarem a escola, as crianças já estabeleceram contato com o SND (BRIZUELA, 1998; LERNER & SADOVSKY, 1996), porém é na escola que elas aprendem a manipulá-lo e a utilizá-lo no registro de quantidades, em operações com algoritmos de adição, subtração, multiplicação e divisão. Em todas essas situações, seu uso pode estar mais voltado ao fazer do que ao compreender. À medida que as operações se tornam mais complexas, quando o campo numérico incorpora os números racionais, fracionários e decimais, aumentam as dificuldades operativas.

As dificuldades experimentadas pelas crianças na construção do SND expõem as fragilidades do processo de ensino/aprendizagem, oriundas da formação docente e da inadequação dos currículos em termos de conteúdo.

Os professores expressam insegurança em trabalhar o SND Posicional e as operações com números naturais, em especial a operação de divisão, e essa insegurança se reflete no contexto didático-pedagógico e se replica nas dificuldades de aprendizagem enfrentadas pelos alunos. Ao darem demasiada atenção ao domínio de algoritmos, não contornam as lacunas compreensivas que exigem encaminhamentos metodológicos adequados. Ao procederem dessa forma, os professores acentuam a incompreensão do sistema, promovendo um ciclo reprodutivo das dificuldades, e não ampliam as oportunidades de aprendizado dos alunos, mas, ao contrário, mantêm os obstáculos (KAMII, 1990, 1992, 1995, 1996, 2002; TEIXEIRA, 1996; BRANDT, CAMARGO &

ROSSO, 2004). É o enfoque epistemológico que possibilitará a reflexão sobre os fatores que entram em jogo nas ultrapassagens necessárias do pensamento para a compreensão do SND.

Na intersecção entre as pesquisas sobre o SND e a ação pedagógica dos professores da Educação Básica, é possível construir caminhos para a superação dessas dificuldades. Todavia, para que isso aconteça é preciso responder à questão: “Qual a real compreensão das crianças de 3ª e 4ª séries do Ensino Fundamental sobre a estrutura do SND<sup>4</sup>?” Torna-se necessário buscar e discutir um conjunto de informações, com os seguintes objetivos: identificar a compreensão dos sujeitos sobre a estrutura presente no SND posicional; correlacionar os desempenhos das crianças em diferentes provas relativas ao SND; apontar implicações didático-pedagógicas a serem contempladas no ensino-aprendizagem do SND a partir dos invariantes da estrutura do Sistema de Numeração Decimal Posicional, das interações sujeito-objeto e abstrações necessárias.

O processo de formação dos professores para ensinar matemática e a busca das formas mais adequadas, tanto da organização dos currículos de Matemática como dos encaminhamentos metodológicos para a construção de conhecimentos lógico-matemáticos necessários para a aprendizagem do SND, poderão ser beneficiados com os resultados da pesquisa.

Nossa hipótese de trabalho é a de que o desenvolvimento da compreensão do SND dá-se com o apoio das estruturas cognitivas, com dinamismo da abstração reflexionante e das interações sujeito-objeto.

O texto se apresenta da seguinte forma: primeiramente, são destacados elementos funcionais da teoria piagetiana para a construção dos conhecimentos de natureza lógico-matemática, os tipos de interações entre sujeito e objeto e as abstrações por elas possibilitadas, que resultam numa abstração do tipo reflexionante; em seguida, são explicitados os procedimentos metodológicos de coleta, tratamento (com utilização do STABOX para análise fatorial) e análise das informações empíricas; e, num terceiro momento, são analisados os resultados encontrados, à luz dos enunciados teóricos do texto.

---

<sup>4</sup> Atualmente essas turmas são denominadas 4º e 5º anos do Ensino Fundamental.

## **1. Aprendizagem Operatória e Abstração Reflexionante**

Um dos aspectos fundamentais da inteligência é seu aspecto operatório. Por ele, pode-se adentrar ao que os alunos sabem e avaliar se o sabido se fundamenta na compreensão e abstração, ou no “aprendido” por declarações, artifícios linguísticos, regras ou repetições. A operação é uma ação interiorizada, no plano do pensamento, que envolve a atividade do sujeito e tanto transforma os dados dos objetos, como a si próprio, para compreendê-los. Cognitivamente, a operação permite transformar, incorporar, modificar e organizar em pensamento os dados disponíveis. É a inteligência atuando e desenvolvendo-se como uma totalidade associada à assimilação e à acomodação (ROSSO; BECKER e TAGLIEBER, 1998, p. 67).

As operações constituem a base da atividade cognitiva na construção de conhecimento. Coordenadas formam sistemas e, à medida que se diferenciam, promovem o desenvolvimento das estruturas cognitivas. Elas não são inatas, mas se desenvolvem pela interação da maturação, da experiência (física e lógico-matemática), da transmissão social e da equilibração. A construção do SND se circunscreve no terreno da experiência lógico-matemática e necessita da ação do sujeito para regular, equilibrar os fatores da experiência com o meio físico e social (PIAGET, 1964).

A maturação, em si, está na dependência das alterações que vão se processando no sistema nervoso, segundo os princípios do desenvolvimento biológico. A experiência física consiste em agir sobre os objetos e retirar algum conhecimento deles por abstração; já na experiência de natureza lógico-matemática, a retirada de conhecimento dos objetos se dá por meio de ações coordenadas do sujeito (PIAGET, 1964).

A experiência lógico-matemática se distingue da experiência física por ser direcionada à própria atividade intelectual do sujeito. São as formas de abstração empírica e reflexionante. O conhecimento funcional, operante do SND, é, por natureza, lógico-matemático e se apoia no processo da abstração reflexionante.

Assim, o aprendizado do SND – que depende, em boa parte, das estruturas que o sujeito construiu para assimilar a sua lógica estruturante – será verdadeiro se permitir operar, levar a uma generalização e, principalmente, perdurar. A operatividade, de um lado, vem sempre acompanhada pela assimilação, e isso implica que está diretamente ligada ao conhecimento incorporado pelo sujeito; por outro lado, está associada também

à acomodação, referindo-se à direção externa da cognição, à ampliação de um esquema ativo ante uma nova situação (PIAGET, 1964).

No início da escolarização, ao interagirem com o SND e trabalharem com os números, as crianças estão se estruturando cognitivamente. Dessa forma, ensinar o SND não é somente apresentar-lhes o sistema, mas favorecer a construção das estruturas que possibilitarão o seu entendimento. É nessa situação que intervêm a equilíbrio e a abstração reflexionante. As pressões exercidas pelo meio que não correspondem ou ultrapassam as necessidades do sujeito não darão lugar à assimilação, e, quando correspondem a essas necessidades, só darão lugar à assimilação na medida em que o organismo puder integrá-las. Assim, “a atividade assimiladora manifesta-se, ao mesmo tempo, como o resultado e a origem da organização, o que significa que, do ponto de vista psicológico, é necessariamente funcional e dinâmica.” (PIAGET, 1987, p. 383).

Fazer variar as condições, ajustar melhor as estruturas para assimilar as pressões ou desafios constitui a acomodação, e promove-se, desta forma, o ajustamento global, dirigido a condutas experimentais cada vez mais precisas, acarretando mudanças na organização do pensamento do sujeito (PIAGET, 1987). A acomodação se expressa em sua progressiva exercitação dos procedimentos ante os novos desafios e das resistências dos objetos que constroem o sujeito a modificar-se (ROSSO; BECKER e TAGLIEBER, 1998, p.68). O êxito da acomodação permitirá a assimilação do dado novo juntamente com a diferenciação das estruturas cognitivas. Essa diferenciação ou novo equilíbrio constitui a chamada equilíbrio majorante (PIAGET, 1976, p. 43), manifestando “uma assimilação renovada” e a construção associada a um esquema.

Dessa forma, estão em jogo aprendizagem e desenvolvimento cognitivo. Para Piaget (1964), o desenvolvimento é um processo espontâneo, ligado ao total processo de embriogênese e diz respeito à totalidade das estruturas do conhecimento, e a aprendizagem é um processo limitado a um problema específico ou a uma única estrutura. É importante ressaltar que o desenvolvimento explica a aprendizagem e, para entendê-lo, deve-se começar com a ideia de operação, pois conhecer um objeto é agir sobre ele, modificá-lo, transformá-lo. A aprendizagem como compreensão – não apenas a simples e pura reprodução – está integrada às estruturas mentais, podendo ser refeita a partir delas. Assim entendida, a aprendizagem verdadeira permite que o sujeito aplique em outros problemas as regras e os conceitos que está aprendendo.

Como anunciado anteriormente, o conhecimento lógico-matemático é derivado da coordenação das ações executadas pelo sujeito, e não diretamente das propriedades dos objetos. A construção desta forma de conhecimento possui mecanismo próprio, que é a abstração reflexionante. Diferente da empírica, que retira atributos dos observáveis, a abstração reflexionante procede das ações ou operações do sujeito e possibilita transferir a um plano superior o que foi tirado de um nível inferior da atividade (empírica), levando o sujeito a composições novas e generalizadoras (PIAGET, 1995). As coordenações “devem ser caracterizadas pelas inferências implícitas ou explícitas, que o sujeito considera ou utiliza como se a ele se impusessem, com todos os intermediários entre esta evidência subjetiva e a necessidade lógica” (PIAGET, 1976, p. 47).

Em diferentes formas interativas entre sujeito e objeto intervêm tipos de abstrações diferentes que caracterizarão as ações do tipo causais e do tipo lógico-matemáticas. Uma ação do sujeito pode ser considerada em seus “aspectos materiais ou físicos enquanto modifica casualmente os objetos sobre os quais recai, porém ela pode, também, somente transformá-los, enriquecendo-os de formas intemporais (ordem, reuniões, etc.), abstração feita dos componentes cinemáticos ou dinâmicos” (PIAGET, 1976, p. 49).

Ao resultarem do desenvolvimento, caracterizado por um ajustamento laborioso das abstrações e das generalizações, as operações aritméticas elementares correspondem a um equilíbrio gradual entre as diferenciações, o qual equivale ao aspecto do reflexionamento da abstração reflexionante, e às integrações, que se correlacionam com o aspecto da reflexão enquanto reorganização do novo todo.

Para os sujeitos de primeiro nível (nível IA), as condutas subsistem à falta de diferenciação. Para os de segundo nível (nível IB), tem início uma diferenciação correspondente ao reflexionamento das ações no plano das conceituações, que é uma abstração diferenciadora completa que se caracteriza pelo início de uma diferenciação por meio do reflexionamento das diferenças qualitativas (forma/tamanho, no plano das extensões).

Mas ainda falta uma abstração da atividade que só é utilizada implicitamente, não sendo tematizada de maneira refletida. Para os sujeitos do nível IIA, a atividade é diferenciada pelo reflexionamento num plano da tematização, isto é, torna-se objeto de pensamento depois de ter servido como instrumento de ação. Os sujeitos do nível IIB começam a apresentar uma relação abstraída das operações aditivas segundo um

processo de abstração da multiplicação. Do ponto de vista da abstração, o processo é complexo, pois exige uma abstração com reflexionamento no plano das conceituações e uma comparação que constitui uma reflexão sobre as reflexões anteriores, uma abstração de segunda grandeza ou de enésima grandeza. Isso leva a uma integração (reorganização reflexionante do todo), equilibrando as diferenciações (abstrações parciais). No estágio III, que é o das sobre-reflexões (portanto, do pensamento reflexivo ou formal), existem sujeitos que se encontram no nível IIIA que colocam em relação subsistemas e o sistema total, todavia ainda não apresentam uma diferenciação a mais entre a relação (ou diferença relativa) ou a ultrapassagem (ou diferença absoluta) (PIAGET, 1976).

Por isso, para Piaget (1995, p. 28),

Toda esta evolução é dirigida por uma lei de equilíbrio entre as diferenciações e as integrações, resultando as primeiras do processo de “reflexionamento”, próprio das abstrações reflexionantes, que retira de um nível inferior certas ligações, empregadas implicitamente ou simplesmente implicadas, mas não notadas para as transformar em pensamento no nível ulterior. As segundas resultam, então, da reflexão ou reorganização necessárias, sobre o novo plano, do sistema assim enriquecido pela introdução destes objetos de pensamento não considerados até então. Esta “reflexão”, segundo aspecto da abstração reflexionante, é, então, necessariamente generalizadora.[...] Não se trata, portanto, somente de relações indissociáveis da abstração e da generalização que determinam os dois pólos do processo de equilibração mas, de modo mais geral, dos pólos da diferenciação e da integração”.

## **2. Procedimentos Metodológicos de Coleta e Análise das Informações Empíricas**

### **2.1 Instrumento**

A base de informações analisada trabalha com 14 provas, já propostas por Nunes (1997) e Kamii (1990, 1992, 1995, 1996, 2002), porém adaptadas, aplicadas às seis turmas participantes de duas escolas estaduais, dentre as quais uma turma de 3ª série<sup>5</sup> e uma turma de 4ª série; duas turmas de 3ª série e duas turmas de 4ª série.

Após contatos com as escolas, no ano letivo de 1998, e reunião com os diretores, com a equipe pedagógica e com os professores que aderiram à proposta, teve início a preparação da pesquisa. Foram realizados os estudos preparatórios e encaminhamentos de textos complementares às reuniões, explicando-se a forma de aplicação das provas.

---

<sup>5</sup> As 3ª e 4ª séries são atualmente denominadas 4º e 5º anos do Ensino Fundamental, respectivamente.

Com a preparação dos professores participantes definiu-se também o cronograma de encontros com as crianças. A aplicação das provas ocorreu no segundo semestre.

O quadro 1, a seguir, apresenta uma sinopse das provas trabalhadas durante a pesquisa, contendo a sua referência, função e objetivo principal.

PROVA	AUTOR	DESCRIÇÃO	OBJETIVOS																						
1	KAMII, 1996, p.87 adaptada	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Apresentar dezesseis fichas para a criança. Pedir para ela contar as fichas, anotar as estratégias utilizadas, escrever o numeral representativo da quantidade, circular a quantidade de objetos que correspondem ao 1 e ao 6 da representação. Escrever num cartão o numeral 25 e pedir para ela separar fichas correspondentes, circular a quantidade correspondente ao 2 e ao 5 da representação. Escrever os numerais 24 e 57 em dois cartões e perguntar à criança quanto valem o 2 e o 5 das representações.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Avaliar a compreensão dos sujeitos do aspecto cardinal e do valor posicional dos dígitos da escrita arábica utilizada para a representação de números.</li> <li>• Investigar se sujeitos que dão respostas corretas por dominarem a manipulação de algoritmos compreendem o valor posicional presente no sistema de numeração.</li> </ul>																						
2	K AMII, 1992, p. 39	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pedir para a criança resolver a operação <math>37 + 48</math> mentalmente.</li> </ul>																							
3	KAMII, 1992, p. 42 adaptada	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Espalhar sobre a mesa cartões do tipo</li> </ul> <div style="text-align: center;"> <table border="1" style="margin: auto;"> <tr> <td style="padding: 2px;">402</td> <td style="padding: 2px;">?</td> <td style="padding: 2px;">513</td> </tr> <tr> <td colspan="3" style="text-align: center; padding: 2px;">seu número</td> </tr> </table>   <table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">0 unidades</td> <td style="padding: 2px;">1 unidade</td> <td style="padding: 2px;">2 unidades</td> <td style="padding: 2px;">3 unidades</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">4 Unidades</td> <td style="padding: 2px;">5 unidades</td> <td style="padding: 2px;">11 unidades</td> <td style="padding: 2px;">12 unidades</td> </tr> </table>   <table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px;">1 dezena</td> <td style="padding: 2px;">3 dezenas</td> <td style="padding: 2px;">21 dezenas</td> <td style="padding: 2px;">40 dezenas</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px;">45 dezenas</td> <td style="padding: 2px;">51 dezenas</td> <td style="padding: 2px;">1 centena</td> <td style="padding: 2px;">2 centenas</td> </tr> </table> </div> <p>e pedir para ela escrever no papel um número entre 402 e 513 e usar os cartões sobre a mesa para mostrar o número escolhido.</p>	402	?	513	seu número			0 unidades	1 unidade	2 unidades	3 unidades	4 Unidades	5 unidades	11 unidades	12 unidades	1 dezena	3 dezenas	21 dezenas	40 dezenas	45 dezenas	51 dezenas	1 centena	2 centenas	
402	?	513																							
seu número																									
0 unidades	1 unidade	2 unidades	3 unidades																						
4 Unidades	5 unidades	11 unidades	12 unidades																						
1 dezena	3 dezenas	21 dezenas	40 dezenas																						
45 dezenas	51 dezenas	1 centena	2 centenas																						
4	KAMII,1992, p. 46	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Apresentar à criança uma situação de subtração para ser resolvida com lápis e papel.</li> </ul>																							
5	KAMII, 1992, p. 49, adaptada	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Distribuir 48 fichas à criança e 9 copos. Pedir para que sejam formados grupos de 10 fichas para serem colocadas nos copos. Pedir para a criança contar o número de fichas existentes no total e escrever num papel.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Avaliar a capacidade do sujeito de contar unidades de tamanhos diferentes.</li> <li>• Identificar a relação existente entre contagem, verbalização e escrita de numerais.</li> </ul>																						
6	NUNES, 1997, p. 73	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Colocar cerca de 200 fichas sobre uma mesa, escondidas sob uma pasta, pedir que a criança estime o valor total de fichas escondidas após dar uma rápida olhada; pedir que as fichas sejam contadas para confrontação com o valor estimado, esconder algumas fichas na mão e pedir para a criança contar as restantes da mesa, formando grupos de 10 e calcular o número de fichas escondidas.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Investigar as estratégias naturais de contagem, as opções por agrupamentos e as percepções das quantidades dos agrupamentos.</li> </ul>																						
7	NUNES, 1997, p. 60	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Entregar à criança unidades (formadas por cubinhos), barras (formadas por 10 cubinhos agrupados) e placas (formadas por 10 barrinhas agrupadas). Tomar o cuidado de entregar somente 40 cubinhos para o sujeito. Solicitar para a criança separar o material</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Verificar se o sujeito construiu o sistema de unidades e dezenas e trabalhou com eles, simultaneamente.</li> <li>• Investigar as interferências lingüísticas e a compreensão da composição aditiva.</li> </ul>																						



8	NUNES , 1997, p. 61	<p>correspondente à quantidade 52. Aos que desempenharem com sucesso a tarefa anterior o experimentador pede que a mesma quantidade seja obtida de outra forma.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Apresentar à criança notas de valores diferentes (notas de 1 real e 10 reais). Mostrar à criança um arranjo de notas do experimentador. Simular uma situação de compra.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Verificar se o sujeito percebe que n notas de 10 compram mais que n notas de 1</li> <li>• Investigar a compreensão do valor relativo.</li> </ul>
9	NUNES, 1997, p. 63	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Convidar a criança para efetuar compras de objetos em situação simulada com notas de valores 1 e 5 ou 1 e 10.</li> </ul>	
10	NUNES, 1997, p. 64	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Entregar notas de um mesmo valor para a criança e pedir para ela comparar com a quantidade do entrevistador. Entregar notas de valores diferentes para a criança e pedir para ela comparar com a quantidade do entrevistador.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Comparar o sucesso dentro de itens de composição aditiva: combinações de 1 e 10 versus combinações de 1 e 20.</li> </ul>
11	NUNES, 1997, p. 64	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Entregar para a criança notas de mesmo valor ou de valores diferentes (por exemplo, 1 e 1 ou de 10 e 1 ou de 20 e 1) e propor situações de compra.</li> </ul>	
12	NUNES, 1997, p. 66, adaptada	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Apresentar para a criança um conjunto de fichas e solicitar uma adição. As fichas obtidas pelo sujeito devem ser sempre suficientes para permitir o resultado da adição.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar as estratégias utilizadas para a obtenção do resultado: contar todos, contar na sequência ou por memória.</li> </ul>
13	NUNES, 1997, p. 66, adaptada	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Apresentar à criança uma carteira dizendo que tem 7 reais. Dizer que o dono da carteira recebeu mais 8 reais, colocando-os na mesa e perguntar quanto tem ao todo. Os sete reais ficarão ocultos na carteira.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Identificar se existe relação entre o sucesso em tarefas com montante invisível e compreensão da composição aditiva.</li> <li>• Identificar a relação entre a compreensão da composição aditiva e a estratégia utilizada para a adição.</li> </ul>
14	NUNES, 1997, p. 75	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Pedir para a criança escrever os seguintes números num papel: 8, 14, 25, 47, 108, 129, 2569, 10, 60, 100, 200, 1000.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Verificar se as crianças acertam mais a escrita de números inteiros como 10, 60, 100, 200 e 1000 (potências de dez) que os demais números.</li> <li>• Identificar se o sujeito apresenta uma lógica consistente quando utiliza um sistema próprio de representação, mesmo que com erros.</li> <li>• Identificar se a compreensão da composição aditiva interfere na escrita de numerais.</li> <li>• Identificar se o tamanho do número apresenta mais dificuldade.</li> </ul>

Quadro 1 - Provas trabalhadas durante a pesquisa

As provas propostas às crianças envolvidas na pesquisa compreendem a identificação da compreensão dos aspectos fundamentais presentes no Sistema de Numeração Decimal Posicional: a composição aditiva, a leitura, a escrita e a verbalização de números em contagem, a conservação do todo, as relações parte-todo e as estratégias em situações de adição.

Há muito a investigar em relação a essas questões: identificar as relações entre elas e as causas do fracasso escolar dos alunos, em operações com números e resolução de problemas. É necessário também investigar as interferências de procedimentos mecanizados e automatizados nas compreensões essenciais. Buscou-se identificar tanto os desempenhos apresentados pelas crianças nas diversas provas, associados às

estratégias, argumentos e justificativas, como a correlação entre eles. Essa correlação pode ser obtida por meio da análise fatorial e, por essa razão, os dados empíricos foram organizados segundo categorias, para serem submetidos a tratamento estatístico pelo STATBOX.

## **2.2 Aplicação do instrumento**

As provas acima especificadas foram realizadas com crianças de 3ª e 4ª séries do Ensino Básico. Aplicaram as provas o pesquisador principal e o pesquisador auxiliar. Acompanharam a aplicação das provas os professores e acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática da UEPG, bolsistas de iniciação científica.

Os pesquisadores ficaram responsáveis pela transcrição dos dados, análise e interpretação, para a identificação das categorias que compreenderam os diversos níveis em que se encontram os sujeitos em relação às compreensões. Os encontros aconteceram nas terças e quintas-feiras. Quase todas as semanas os pesquisadores compareciam às escolas e propunham as provas às crianças. Dependendo do tipo de prova, uma única era aplicada; por vezes, aplicavam-se duas ou mais.

Essa aplicação era realizada para a turma toda e com o professor presente em sala de aula. As crianças recebiam explicações e orientações necessárias para, em seguida, apresentar respostas às questões propostas nas provas e justificá-las por escrito. Após a aplicação, quatro crianças de cada turma eram retiradas do ambiente da sala de aula e, por meio de entrevista gravada, apresentavam seus argumentos às questões propostas nas provas. Essas crianças foram escolhidas pelos pesquisadores no primeiro dia de prova, aleatoriamente, por sorteio, e constituíram a amostra submetida ao método clínico piagetiano. A entrevista, a transcrição das fitas e a tabulação dos desempenhos de todas as crianças foram realizadas pelos pesquisadores.

A intenção de proceder com a tabulação era, num primeiro momento, verificar a possibilidade de agrupar os desempenhos das crianças segundo categorias específicas para análise de suas compreensões. A transcrição das fitas teve por objetivo averiguar se as entrevistas realizadas possibilitariam a identificação dos argumentos de algumas das crianças frente aos desempenhos apresentados nas diversas questões. Após a aplicação das 14 provas, essa amostra foi mais uma vez reduzida para o início das análises. Contava-se com uma amostra de 24 crianças, sendo 12 de 3ª série e 12 de 4ª série, quatro de cada série. A segunda amostra foi composta somente com as crianças de 3ª série. Foram sorteadas seis crianças, das 12 que compunham a primeira amostra. A

intenção de delimitar a amostra envolvendo somente crianças de 3a série foi a de poder acompanhar o mesmo grupo nas duas escolas, visto que as crianças de 4a série mudam de escola e já não seria possível reuni-las com tanta facilidade. Assim, a amostra selecionada pode ser consultada frente aos argumentos apresentados em caso de inconsistências por parte do direcionamento das atividades.

Os demais dados empíricos oriundos da aplicação das provas às crianças das seis turmas das duas escolas, registrados por escrito, foram analisados e tabulados de acordo com as categorias levantadas. Esses dados foram submetidos a um tratamento específico para poderem ser tratados pelo Software StatBox<sup>6</sup>, que fornece uma análise fatorial e aponta correlações.

A aplicação do StatBox aos dados gerou o Gráfico da Figura 1, a seguir, e as correlações apontadas serão analisadas em relação às categorias encontradas.

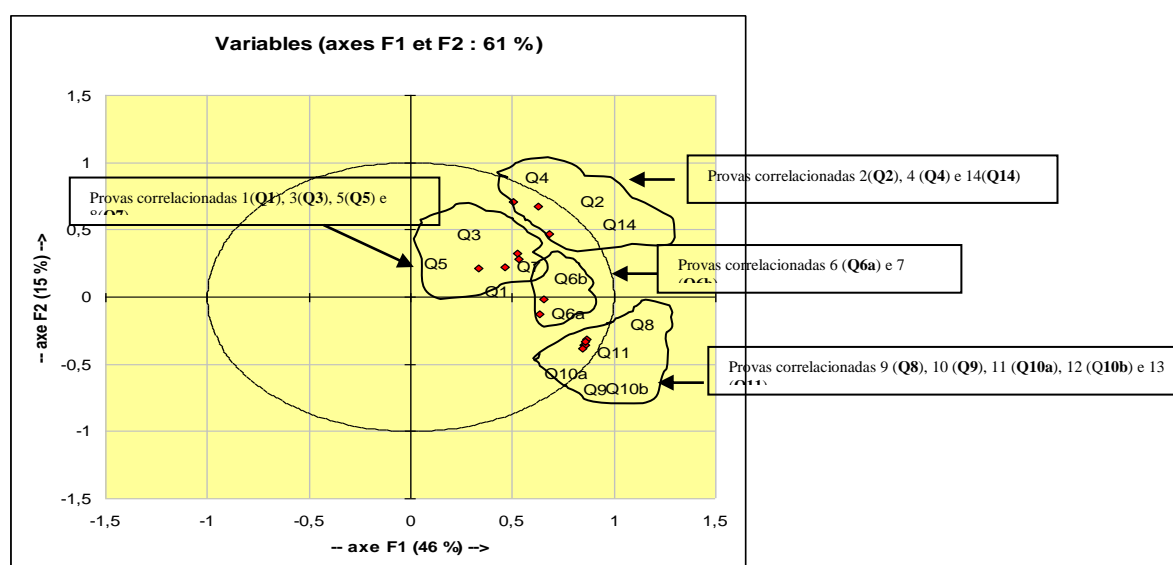


Figura 1 – Gráfico gerado pelo StatBox que indica as correlações entre os desempenhos das crianças nas diferentes provas.

### 2.3 Análises das informações empíricas

As análises pretenderam, num primeiro momento, investigar as reais compreensões das crianças quanto às invariáveis presentes no sistema de numeração e, em especial, a

<sup>6</sup> StatBox é um pacote estatístico de uso geral que utiliza o Microsoft Excel como ferramenta de relatório. Os dados podem ser lidos diretamente em suas folhas de Excel, mas também para grandes conjuntos de dados em bancos de dados Microsoft Access, ou importados (ODBC, SPSS, arquivos ASCII). StatBox produz estatísticas robustas e inclui uma ampla gama de funções: codificação, amostragem, estatística descritiva, ponderação, ensaios, gráficos (histograma, árvores Boxplot, Diagrama de dispersão, decisão, dendrogramas, mapas fatoriais) e análise multivariada (PCA, MDS, Correspondência, ANOVA GLM, Classificação, Cluster, múltipla-PLS-regressão logística-neural, forecasting, árvores de decisão).

compreensão do Valor Posicional. Pretendia-se confrontar esses desempenhos com os procedimentos utilizados para a solução de problemas que exigem a manipulação de um sistema de representação de quantidades e de algoritmos convencionais, utilizados para resolver operações de adição e subtração de números naturais.

Os desempenhos foram refletidos frente aos procedimentos adotados para a escrita de numerais que representam quantidades e à manipulação de algoritmos, e caracterizaram as categorias que permitiram identificar os sujeitos frente à compreensão da estrutura do SND. Essas categorias são apresentadas no quadro 2, a seguir.

### 2.3.1 Categorias encontradas

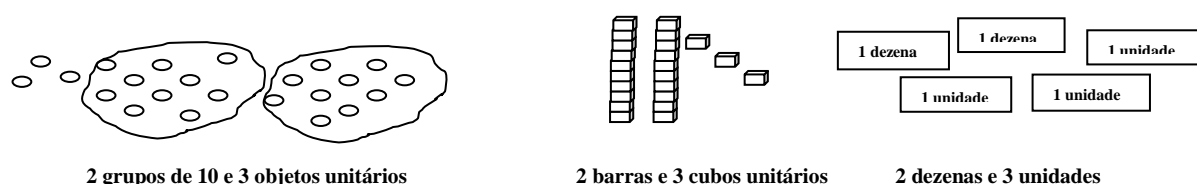
PROVA	CATEGORIAS
<b>PROVA 1</b> [Q1] Contar 15 feijões e dizer quantos feijões correspondem ao 1 do 15 e ao 5 do 15.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Circulou 10 e 6 elementos.</li> <li>2. Circulou 1 e 6 elementos.</li> <li>3. Circulou o primeiro e o sexto elementos.</li> </ol>
<b>PROVA 2</b> [Q2] Resolução mental da adição $37 + 48$ .	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Obteve a resposta correta.</li> <li>2. Não obteve a resposta correta.</li> </ol>
<b>PROVA 3</b> [Q3] Formação de um numeral, pertencente a um intervalo, utilizando cartões.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Apresentou a composição <i>foi correta</i> utilizando os cartões.</li> <li>2. Apresentou composição <i>foi equivocada</i> utilizando os cartões.</li> <li>3. Considerou o algarismo apenas pelo valor absoluto.</li> <li>4. Não compôs o numeral escolhido.</li> </ol>
<b>PROVA 4</b> [Q4] Resolução de uma subtração com utilização do algoritmo, $56 - 38$ .	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Manipulou o algoritmo, obtendo a resposta correta.</li> <li>2. Manipulou o algoritmo obtendo a resposta errada.</li> </ol>
<b>PROVA 5</b> [Q5] Distribuição de 48 fichas em copos e explicitação do número de copos e fichas avulsas, conservação da quantidade.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Contou utilizando agrupamentos de 10 em 10 e a composição aditiva e <i>conservam a quantidade</i>.</li> <li>2. Contou utilizando agrupamentos de 10 em 10 e a composição aditiva e <i>não conservam a quantidade</i>.</li> <li>3. Contou, mas não soube explicar o procedimento.</li> </ol>
<b>PROVA 6</b> [Q6a] Procedimentos utilizados para a contagem de 200 fichas.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Contou de 1 em 1.</li> <li>2. Contou de 2 em 2.</li> <li>3. Contou de 10 em 10.</li> <li>4. Contou de 5 em 5.</li> <li>5. Outros.</li> </ol>
<b>PROVA 7</b> [Q6b] Procedimentos utilizados para identificação do número de fichas retiradas.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Utilizou o algoritmo e chegou ao resultado correto.</li> <li>2. Utilizou o algoritmo, mas não obteve o resultado correto.</li> <li>3. Não utilizou o algoritmo e não chegou ao resultado.</li> <li>4. Interpretou erroneamente, porém acertou.</li> <li>5. Interpretou erroneamente e não acertou.</li> <li>6. Não resolveu a questão.</li> </ol>
<b>PROVA 8</b> [Q7] Formar números solicitados utilizando barras e cubos de material multibase.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Compôs usando barras e cubos.</li> <li>2. Compôs usando apenas cubos que se referiam ao valor absoluto ou relativo do número.</li> <li>3. Usou barras e cubos aleatoriamente.</li> </ol>
<b>PROVA 9</b> [Q8] Compor um valor monetário utilizando notas de 10 reais e 1 real.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Percebe que n notas de 10 compram mais que n notas de 1.</li> <li>2. Não percebe a diferença entre as notas.</li> </ol>
<b>PROVA 10</b> [Q9] Separa notas para comprar objetos, tendo que decompor uma nota de 10 em 10 notas de 1.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Combina diferentes tipos de nota a fim de atingir um valor específico.</li> <li>2. Não consegue uma combinação para o valor pedido.</li> </ol>
<b>PROVA 11</b> [Q10a] Comparação de totais com notas de mesmo valor.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Identifica o valor relativo das notas.</li> <li>2. Não identifica o valor relativo das notas.</li> </ol>
<b>PROVA 12</b> [Q10b] Comparação de totais com notas de valores diferentes.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Calcula a diferença entre os valores corretamente.</li> <li>2. Não calcula a diferença entre os valores corretamente.</li> </ol>
<b>PROVA 13</b> [Q11] Composição de totais com notas de valores diferentes e identificação de interferências de rótulos verbais.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Compôs utilizando combinações de notas 1, 5 e 10.</li> <li>2. Compôs utilizando combinações de notas 1, 5, 10 e 20.</li> <li>3. Compôs utilizando combinações de notas 1 e 10.</li> <li>4. Compôs utilizando combinações de notas 10.</li> <li>5. Não compôs o valor exato pedido.</li> <li>6. Compôs utilizando outras notas.</li> </ol>
<b>PROVA 14</b> [Q14] Ditado de números.	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Escreve corretamente todos os numerais ditados.</li> <li>2. Erra o numeral 2569.</li> <li>3. Erra o numeral 60.</li> <li>4. Erra o numeral 129.</li> <li>5. Erra o numeral 200.</li> </ol>

As diferentes provas foram denominadas Q1, Q2, Q3, Q4, Q5, Q6a, Q6b, Q7, Q8a, Q9, Q10a, Q10b, Q11 e Q14, para identificação pelo software. O desempenho em cada prova foi numerado conforme o quadro 2. Cada sujeito da pesquisa foi apontado numa planilha gerada no Excel, que indicava o desempenho em cada prova. O arquivo, assim preparado, foi submetido a tratamento pelo StatBox, que gerou a nuvem de pontos segundo o primeiro eixo. A interpretação dessa nuvem de pontos fica a cargo do pesquisador. Em virtude disso, foi possível identificar correlações entre as provas: 1(Q1), 3(Q3), 5(Q5) e 8(Q7); 2(Q2), 4(Q4) e 14(Q14); 6 (Q6a) e 7 (Q6b); 9 (Q8), 10 (Q9), 11 (Q10a), 12 (Q10b) e 13 (Q11). Esses resultados foram interpretados à luz das interações entre sujeito e objeto de conhecimento e da abstração reflexionante.

### 2.3.2 Análises das correlações encontradas à luz das interações entre sujeito e objeto de conhecimento e da abstração reflexionante

Em relação às correlações apontadas, pode-se inferir que a atribuição de significação aos algarismos da notação arábica (prova 1, Q1) correlaciona-se com procedimentos de contagem de objetos (prova 5, Q5), com a formação de numerais com cartões que designam centenas, dezenas e unidades (prova 3, Q3), e com material multibase (prova 8, Q7). Assim, a criança que circula 10 e 5 fichas para designar a quantidade de objetos, que conta em grupos de dez e reconta os grupos de dez formados, constitui um procedimento que está na base da formação de registros de representação de quantidades. Esse procedimento é transferido para a seleção das peças do material multibase e dos cartões para representação dos números.

A contagem dos grupos de dez formados é feita com a utilização dos algarismos de 0 a 9, e seu registro deve caracterizar sua natureza, para diferenciá-lo do registro dos objetos unitários.



O registro do número pode ser feito com a notação arábica ou com palavras. Nos dois casos é possível identificar outro aspecto da estrutura do SND: a posição. Os grupos de

dez formados são registrados, na notação arábica, por algarismos de 0 a 9 à esquerda do algarismo que registrará os objetos unitários: 23; e na palavra, nos sufixos e prefixos que são deformações das palavras criadas para representar os números de 0 a 9, o registro é vinte e três. Nesse registro a palavra vinte possui o prefixo vin, que é uma deformação da palavra “dois”, e o sufixo te, que é uma deformação da palavra “dez”.

É por meio da operatividade que se pode afirmar que esse procedimento revela aprendizagem da estrutura do SND. É a operação realizada, enquanto ação interiorizada e reversível, que revela o conhecimento do objeto e uma ação sobre ele, sua modificação e transformação. Portanto, essa aprendizagem pode ser identificada nos desempenhos do sujeito, os quais revelam as estruturas operatórias integradas às estruturas mentais, permitindo que a criança aplique as regras e conceitos que está aprendendo para raciocinar sobre uma grande variedade de problemas. Não se trata de pura e simples reprodução.

O mesmo se pode dizer da correlação apontada quando as crianças não efetuam a contagem por grupos de dez e não selecionam barras e cartões de dezenas para compor as quantidades solicitadas. Contam unitariamente, selecionam cubos unitários, cartões “unidades” e transportam essa compreensão para os registros de representação de quantidades: para o “1” do 16 associam um objeto. São capazes de contar e registrar uma quantidade, mas a notação arábica ou a palavra representam uma lexicalização direta que significa a atribuição de um nome para cada número e não um registro organizado a partir de um padrão sustentado pela estrutura do SND.

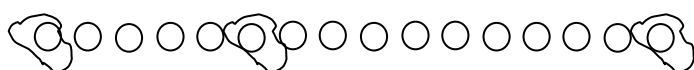
O avanço para patamares superiores de compreensão é possível, visto que a inteligência é concebida como o desenvolvimento de uma atividade assimiladora cujas leis funcionais são dadas a partir da vida orgânica (organização e adaptação) e cujas sucessivas estruturas que lhe servem de órgãos são elaboradas por interação dela própria com o meio exterior (PIAGET, 1987, p.336).

No entanto, duas condições são necessárias: haver necessidade de resposta às pressões do meio e haver possibilidade de adaptação do organismo a essas pressões. Do ponto de vista da aprendizagem da estrutura do SND deverão existir desafios cognoscitivos que levem os sujeitos a sentirem necessidade da sua compreensão, sem a qual os problemas não serão resolvidos. Será a acomodação que promoverá as tentativas dirigidas e as condutas precisas. Mas para que ela se manifeste, deve existir o desafio ou algo que se

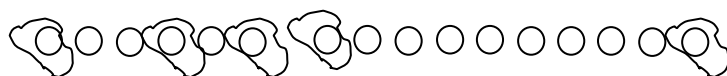
torne resistente a modificações oriundas de situações novas. O êxito caracteriza a assimilação do objeto e um esquema para ser incorporado às estruturas disponíveis.

O que pode acontecer é uma falsa manifestação de êxito provocada por imitação. Esse fato é muito comum no processo de ensino da matemática pautado em procedimentos mecanizados. Os resultados apontados pelo StatBox são indicadores de que isso pode ocorrer ao apontar não existir correlação entre realizar corretamente operações com utilização de algoritmos (a adição proposta na prova 2 (Q2), a subtração mental proposta na prova 4(Q4) e o ditado de números proposto na prova 14(Q14)). A correlação apontada pode ser reveladora de que as tarefas propostas nessas provas podem ser realizadas de igual maneira: ou por procedimentos mecanizados, ou compreensivamente.

É possível apontar um dado empírico que esclarece as afirmações anteriores: uma criança circula o primeiro, sexto e décimo sexto elementos como representativos dos algarismos do numeral 16.



O entrevistador solicita que ela explique os objetos não circulados. A criança argumenta que seriam necessários outros algarismos, completados no numeral a partir da solicitação do pesquisador. Em virtude desse argumento, acrescenta à direita do 16 os algarismos 4 e 7 (1647), e circula o quarto e o sétimo elemento. Ao fazer a leitura do numeral, lê “hum mil seiscentos e quarenta e sete”.



Esse dado empírico é revelador de desequilíbrios a favor da acomodação, tendo em vista que essa criança manipula os algoritmos corretamente (tanto para a realização de adições, como de subtrações, com ou sem reserva) e escreve os números por meio de palavras e numerais arábicos, sem, no entanto, atribuir significados para os algarismos desses numerais. Numa adição com reserva seus argumentos revelam a não compreensão da estrutura do SND: na adição de  $37 + 48$  não sabe explicar porque a soma 15, resultante da adição de 7 com 8, não é colocada inteiramente na casa das unidades, tendo que ser decomposta em seus algarismos constituintes “1” e “5”. O “5” permanece na casa das unidades, mas o “1” vai para a casa das dezenas, para ser

adicionado ao “3” e ao “4”. A criança argumenta que aquele “1” só vale “1” e tem que ser colocado naquela posição para que a conta dê certo.

O mesmo ocorre na subtração “56 - 48”: ao tentar subtrair 8 de 6, afirma: “*oito não dá para tirar de 6, então empresta 1 do 5, fica 16, daí 8 para 16, dá 8.*” Ao ser questionada sobre o valor do “1” emprestado, diz que vale “1” mesmo e não sabe responder por que razão ele, ao ser adicionado ao “6” do “56”, o transforma em “16” e não em “7”.

Esse e outros fatos concretos são reveladores da inexistência de correlações entre procedimentos de contagem e manipulação de algoritmos e escrita de numerais, que podem ser realizados exitosamente como resultado de transmissão social ou imitação de modelos propostos pelo professor.

No entanto, esses procedimentos de contagem podem ser correlacionados à compreensão do SND e a identificação da estrutura do SND nos algoritmos da notação arábica. Evidentemente, essa compreensão tem que ser analisada à luz da abstração reflexionante, visto que as crianças não são capazes de admitir os possíveis. Por sua faixa etária, essas crianças, segundo Piaget (1995, p. 6), podem “somente efetuar construções, que mais tarde se tornarão puramente dedutivas, apoiando-se constantemente sobre seus resultados constatáveis.” Tais construções são denominadas abstrações pseudo-empíricas, visto que a identificação dos agrupamentos de dez é feita a partir de objetos materiais, mas as propriedades constatadas são introduzidas nos objetos pela atividade do sujeito. Essa abstração pseudo-reflexionante conta com a ajuda de observáveis exteriores. Ela se diferencia da abstração empírica, na qual, segundo Piaget (1995, p. 6), as propriedades existem “nos objetos antes de qualquer constatação por parte do sujeito”.

As correlações apontadas entre os procedimentos adotados para a resolução das questões presentes nas provas 6(Q6a) e 7 (Q6b) também podem ser analisadas à luz da abstração reflexionante. Isso porque a prova constitui um desafio cognoscitivo, ao solicitar a identificação do número de feijões restantes a partir da retirada de alguns do montante submetido à contagem.

A contagem de um e um revela a atribuição de nomes aos números que exprimem a medida do conjunto por meio de uma lexicalização direta. É esse conhecimento que é transferido por reflexionamento (um dos sentidos da abstração reflexionante) de um



patamar A para um patamar B, e reorganizado por reflexão (outro sentido da abstração reflexionante), para dar conta da solução de novos problemas. A contagem unitária é transportada para a resolução da subtração exigida e, em virtude da lexicalização e da exigência em termos de memória, conduz ao erro. A criança procede contando de trás para frente, unitariamente, procurando atingir o número de objetos restantes, e se perde durante o raciocínio, não conseguindo controlar o valor da retirada.

Ao contrário, a contagem em grupos de 10 e a consequente recontagem dos grupos de 10 para registro da medida do conjunto de partida e do conjunto retirado, por meio do numeral arábico, conduz à abstração da estrutura do SND, e esse conhecimento é transportado para um patamar superior para dar conta da resolução do problema proposto. O valor do montante restante é obtido por meio da utilização do algoritmo. Isso significa que a criança se vale das coordenações de estruturas já construídas e as reorganiza em função de dados novos.

Não se pode deixar de contemplar nessa análise o papel dos esquemas, que tanto constituem condições da ação como a prática e a observação da atividade. Eles configuram-se como a condição da aprendizagem e, portanto, são fundamentais para a assimilação cognitiva, garantidos pelo processo de acomodação que também os coordena, caracterizando o processo de equilíbrio.

As diversas provas propostas às crianças permitiram verificar as compreensões da estrutura do SND, adquiridas em função de uma equilíbrio majorante oriunda de superação de desafios que possibilitou a aprendizagem desse objeto de conhecimento. Essa superação ocorre em virtude do equilíbrio entre os esquemas do sujeito e os objetos, que obedece ao sistema cognitivo, pois qualquer ação ou operação concretiza uma finalidade em função do esquema que a determina. Essa ação, por sua vez, sendo mental e não física, constitui a organização cognitiva da criança, a qual coloca em marcha uma forma de atuar a fim de resolver o problema de encontrar o valor do montante retirado, tendo o valor do montante inicial e o do montante restante. É a ação que se interioriza, permitindo ao sujeito transformar e modificar dados.

As correlações apontadas entre os procedimentos adotados para a resolução das tarefas propostas nas provas 9 (Q8), 10 (Q9), 11 (Q10a), 12 (Q10b) e 13 (Q11) justificam-se por envolverem provas com objetivos de investigar a identificação da estrutura do SND em contextos específicos de dinheiro. Elas têm que ser analisadas enquanto interações de um tipo diferenciado entre sujeito e objeto de conhecimento que provoca uma

intervenção de tipos de abstrações diferentes, que deverão ser identificadas como ações do tipo causais ou do tipo lógico-matemáticas.

Por se tratar de um contexto específico, envolvendo dinheiro, será importante identificar se ocorreu uma interação do tipo I (IA e IB) ou do tipo II (IIA e IIB). Os observáveis que intervêm são os valores das notas (Obs. O, isto é, observáveis do objeto) ou do sujeito (Obs. S, observáveis do sujeito), que podem resultar numa ação simplesmente causal ou se relacionar constituindo uma ação lógico-matemática acompanhada de coordenações inferenciais do sujeito (Coord. S) ou entre objetos (Coord. O).

Nessas provas foram identificadas interações do tipo II B, pois são propostas composições de totais com notas de valores diferentes. Os totais solicitados compreendem coordenações efetuadas pelo sujeito e aplicadas aos objetos. São essas coordenações que permitem as inferências lógicas para justificar as quantificações intensivas (tem mais, tem menos) ou extensivas (têm tantos).

O progresso que se observa nessas provas é oriundo de outras necessidades, o que exige a construção de novas operações, mais enriquecidas, uma vez constatada a insuficiência das composições operatórias precedentes, nas situações desprovidas de contexto. O papel dos objetos se modifica. Nas situações sem contexto esses objetos caracterizam um conteúdo de primeira forma, e numa situação de contexto de dinheiro eles se tornam um conteúdo de conteúdo. É por isso que determinadas formalizações acontecem e os sujeitos são capazes de argumentar sobre resultados de comparações relativas aos totais registrados, por meio de palavras ou notações arábicas. Esses argumentos constituem resultado da intervenção de abstrações reflexivas, diferentemente das interações possibilitadas pelas tarefas propostas nas provas sem contexto específico, que provocam argumentações que resultam de intervenções de abstrações pseudo-empíricas (a partir dos observáveis) e reflexivas (a partir das coordenações operatórias).

Analisando os desempenhos das crianças nessas provas que envolveram contextos de dinheiro, podemos considerar os resultados dos estudos de Piaget (1976) sobre as abstrações, diferenciações e integrações no emprego das operações aritméticas elementares. Esses estudos apontam que as diferenciações correspondem ao aspecto do reflexionamento da abstração reflexionante, e as integrações correspondem ao aspecto da reflexão, enquanto reorganização do novo todo. As crianças revelam ser capazes de diferenciações que correspondem a reflexionamentos das ações, no plano das conceituações, das diferenças qualitativas (número de notas versus valor das notas, no

plano das extensões), mas isso não é garantia de uma abstração da aditividade que só é utilizada implicitamente, não sendo ainda tematizada de maneira refletida.

Essa aditividade é diferenciada pelo reflexionamento num plano da tematização, isto é, num plano em que ela se torna objeto de pensamento depois de ter servido como instrumento de ação. É o caso em que as crianças têm que argumentar sobre o valor relativo dos algarismos da notação arábica, sobre o valor das reservas nas operações de adição e subtração, sobre a seleção de cartões representativos de quantidades. Esses argumentos podem apresentar uma relação abstraída das operações aditivas segundo um processo de abstração da multiplicação lógica.

Piaget (1976) considera esse processo complexo, pois exige uma abstração com reflexionamento e reflexão para as conceituações. A identificação do valor relativo das unidades vai colocar em jogo a comparação, que exige uma reflexão sobre as reflexões anteriores, uma abstração de segunda grandeza ou de enésima grandeza. No caso da estrutura do SND, será a integração dos algarismos da notação arábica no numeral como um todo que acontecerá por reorganização reflexionante do todo.

### **Considerações Finais**

O conjunto das provas apresentadas buscou a compreensão que as crianças de 3ª e 4ª séries do Ensino Fundamental possuem da estrutura do Sistema de Numeração Decimal Posicional e as interferências dos rótulos verbais na construção da composição aditiva e da representação escrita.

As perguntas lançadas e os desafios propostos estavam voltados para as ações que eram executadas pelos alunos. Buscava-se a explicitação e o significado de suas compreensões durante a resolução das provas. Essas ações podem resultar em diferentes tipos de abstrações. Assim, as crianças que compreendem a estrutura do SND apresentaram ações de segundo grau (BECKER, 1993, p. 72), visto que se debruçaram sobre ações de primeiro grau (automatizadas) “para abstrair coordenações (reflexionamento) e levá-las a outro patamar onde serão reorganizadas (reflexão)”.

Disso resulta a primeira implicação para a prática educativa organizada: promover a aprendizagem do SND. A identificação do grau de compreensão é uma das condições necessárias para promover desafios geradores de desequilíbrios e motivação. Portanto, a ligação entre o campo da epistemologia genética com o pedagógico solicita, da

docência, o encaminhamento de ações capazes de promover a invenção dos alunos em pensamentos de segunda potência, ou seja, de refletir sobre a coordenação de suas ações, ou de buscar a lógica implícita dessas ações (BECKER, 1993, p.72). Refletir sobre suas ações, em situação de ensino, exige que se instaure um clima de atenção e respeito capaz de promover a disposição e o interesse para aprender matemática.

A condução das entrevistas, devolvendo os problemas e as respostas, solicitando mais detalhes sobre a lógica de determinada resposta, traz a segunda implicação didático-pedagógica. Esse procedimento faz com que os alunos tomem consciência das operações e assumam parte da responsabilidade, a partir da qual será possível construir ou refazer o conhecimento (ZUNINO, 1995).

A socialização das respostas e das estratégias de resolução dos alunos promove a socialização do pensamento e o trabalho intelectual cooperativo. Não se trata do aluno operando as informações individualmente, mas operando com o investigador, refazendo os seus pensamentos. Por extensão, a estratégia de investigação clínica de devolver e solicitar a explicitação da lógica do pensamento constitui o fundamento das iniciativas dialógicas que pretendem não apenas a reprodução, mas a construção de estratégias compreensivas. Com isso, além de reforçar as operações, no plano individual, desenvolve-se também a co-operação, no plano social.

O estudo realizado ressalta a importância de o professor compreender a organização e o funcionamento da inteligência dos alunos para subsidiar a organização da prática educativa. Segundo Becker (1993, p.71), é a prova de “legitimidade” para ensinar. A terceira implicação está ligada ao sentido pedagógico que emerge da epistemologia genética, desafiando o professor a ‘inventar situações experimentais para facilitar a invenção de seu aluno’, organizando ações de segundo grau em que a mediação da fala desempenha um papel necessário, superando a aula que, em nome da aprendizagem ou do desenvolvimento do conhecimento, reprime a fala. Estabelecer uma ergonomia entre a estrutura do SND e a organização do processo de ensino só será possível com conhecimento dos limites e possibilidades cognitivas dos alunos, que, por sua vez, estão diretamente ligados ao processo de abstração reflexionante que coordena as ações dos sujeitos (BECKER, 1993).

A construção de um objeto de conhecimento tem em Jean Piaget o critério de permanência, e em Pierre Lévy, o da sua circulação. Tem-se, assim, a quarta implicação: as ações que não se apresentam de forma natural ao sujeito conhecedor são

sempre sobre objetos de conhecimento e necessitam estar direcionadas ao objeto de conhecimento. Existem ações que podem ser realizadas de forma mecanizada, sem que a criança tenha consciência da estrutura do SND presente em registros de representação do número: notação arábica, palavra, dentre outros.

Essas ações podem compreender a escrita correta dos numerais ou das palavras que representam números, porém diferem da realização de operações (adição, subtração, dentre outras) por serem coordenadas por automatizações oriundas de conhecimento social ou de aprendizagens escolares. Elas podem levar ao êxito no plano do fazer, mas é necessária também a permanência, a circulação do SND, sua composição e lógica, para se atingir a compreensão.

Os resultados de pesquisa, associados aos do papel da abstração na construção do conhecimento, podem contribuir para a análise dos erros apresentados pelos alunos em atividades ligadas ao SND. Isso se deve aos tipos de interação nos quais podem intervir os observáveis relativos ao sujeito ou ao objeto, ou às coordenações inferenciais das ações do sujeito. Os erros podem ser oriundos das interações provocadas que promovem abstrações diferenciadas (empíricas, pseudo-empíricas, refletidas) que, por sua vez, desvelam parte do objeto. Eles podem ser também oriundos das estruturas ou esquemas já construídos ou não pelos sujeitos, que os impossibilitam de assimilar por completo o objeto de conhecimento.

Isso promove a quinta implicação, pois os erros são inerentes à abstração, visto que o sujeito, ao interagir, sempre retém alguns aspectos da interação e não todos os aspectos nela envolvidos. Associado ao seu mecanismo, tem-se também o trajeto cognitivo singular, que pode se constituir em obstáculo ao aprendizado da matemática, apesar de essa trajetória ser universal para o sujeito epistêmico. O ato do conhecimento se dá pelo jogo das assimilações e acomodações, as quais, segundo Becker (1993, p. 74), “implicam constantes funcionais e rupturas estruturais”. No caso da aprendizagem da estrutura do SND, as rupturas têm que compreender a lexicalização direta, que é oriunda do conhecimento social.

As interações ocorrem quando há ação, e elas podem ser de maior ou menor qualidade, dependendo dos desafios e das experiências anteriores. No ambiente da sala de aula, essas interações são provocadas pelo professor, que precisa estar preparado para possibilitar que o aluno construa o conhecimento. Segundo Becker (1993, p. 76), na base de tudo isso “encontra-se a compreensão de que o processo de aprendizagem

coincide com o processo de (re)construção de estruturas cognitivas; essas estruturas constituem a condição de assimilação de qualquer conteúdo”.

Em relação à aprendizagem da estrutura do SND, essas interações têm que provocar abstrações e generalizações para garantir as diferenciações e as integrações que correspondem aos reflexionamentos e às reflexões, respectivamente, para que a criança consiga reorganizar o novo conhecimento.

Pode haver falta de diferenciação, como no caso de a criança não atribuir valor relativo aos algarismos do numeral arábico ou à reserva numa operação de adição ou subtração (vai um, empresta um). Nessa situação, é preciso identificar se a falta de diferenciação é oriunda de coordenações de ações necessárias: considerar os elementos da estrutura do sistema de numeração. No entanto, havendo diferenciação pode não existir integração, como no caso em que os indícios linguísticos provocam abstrações empíricas (por exemplo, no caso em que as palavras revelam a quantidade representada, sem revelar a estrutura do SND: as palavras “vinte e cinco”, associadas ao numeral arábico “25”, podem levar o sujeito a separar vinte fichas para o algarismo 2, do 25, sem identificar os dois grupos de 10 representados pelo 2 em virtude de sua posição no numeral). Nesse caso, essa diferenciação caracteriza uma abstração pseudo-empírica, por ser acompanhada de coordenações de ações por parte do sujeito.

Pode existir diferenciação no plano da conceituação revelada pela criança que separa o número de objetos referentes aos algarismos do numeral arábico, de acordo com o seu valor relativo. Ela se mostra completa e consolida uma integração generalizadora da estrutura do SND na continuação de outras atividades: quando a criança justifica a reserva nas operações de adição e subtração com algoritmos, separa cartões para quantificar extensivamente (como, por exemplo, selecionar um cartão de 2 dezenas e um outro de 3 unidades para expressar o valor do numeral 23).

Entretanto, essas diferenciações e integrações podem ainda não ser completas no sentido de constituírem abstrações da composição aditiva usada no padrão de organização do numeral arábico ou das palavras. Isso significaria identificar as operações de adição e multiplicação implícitas nesses registros de representação:

Notação arábica: o número quatorze seria representado por 14 em que  $a_1 = 1 \times 10^1$  e

$a_0 = 4 \times 10^0$  e  $14 = 1 \times 10 + 4 \times 10^0 = 10 + 4$

Palavra: quatorze  $4 + 10$

Essa abstração é utilizada implicitamente, mas ainda não é tematizada de maneira refletida. Isso decorre do fato de que o padrão de organização do numeral arábico e das palavras não explicita essas operações e, portanto, não caracteriza, por si só, interações capazes de possibilitar abstrações de nenhuma natureza, que permitam a identificação dessas operações.

Quando houver uma diferenciação no plano da tematização, esse objeto de conhecimento torna-se objeto de pensamento depois de ter servido como instrumento de ação. Essa diferenciação exige a consideração de novas totalidades, isso é, exige que esse padrão se aplique para outros números representados por numerais ou palavras. Ela pode ser reforçada por abstrações pseudo-empíricas que possibilitam a compreensão, que permitam identificar correlatos que levem, por extensão, à composição aditiva. Tal fato acontece a partir da ação do sujeito que faz correspondências sucessivas entre numerais, entre palavras, entre numerais com palavras, de coordenações das relações percebidas.

Segundo Piaget (1995, p. 28),

do ponto de vista da abstração, há um processo complexo, que exige: [...] uma abstração [...] com reflexionamento e reflexão no plano das conceituações [...] uma reflexão sobre as reflexões anteriores, uma abstração, pois, de segunda grandeza [...] uma integração (reorganização reflexionante do todo), equilibrando as diferenciações (abstrações parciais [...]).

## Referências

- BECKER, F. Ensino e construção do conhecimento: o processo de abstração reflexionante. **Educação e Realidade**, Porto Alegre, 18(1): 43-52, jan/jun, 1993.
- BRANDT, C.F.; CAMARGO, J.A. ; & ROSSO, J. A. Operatividade e Sistema de Numeração Decimal: ação discente e ação docente. **Zetetiké**, Campinas, SP, v.12, n.22, jul/dez. 2004. p. 89-124.
- BRIZUELA, B. Invenções e convenções: uma história sobre números maiúsculos. In: Carraher, D.; Schlickeamann, A. (organizadores). **A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa**. São Paulo: Papyrus, 1998.
- EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 2. ed. Campinas, São Paulo: Editora da Unicamp, 1997.
- FAYOL, M. **A criança e o número: da contagem à resolução de problemas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

- IFRAH, G. **Os números**: a história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo, 1989.
- KAMII, C. **A criança e o número**: implicações educacionais da teoria de Piaget junto a escolares de 4 a 6 anos. Campinas, SP: Papirus, 1990.
- KAMII, C.; JOSEPH, L. L. **Aritmética**: novas perspectivas implicações da teoria de Piaget. São Paulo: Papirus, 1992.
- KAMII, C.; LIVINGSTON, S. J. **Desvendando a aritmética**: implicações da teoria de Piaget. São Paulo: Papirus, 1995.
- KAMII, C.; DECLARK, G. **Reinventando a aritmética**: implicações da teoria de Piaget. 11. ed. Campinas, SP: Papirus, 1996.
- KAMII, C.; HOUSMAN, L. B. **Crianças pequenas reinventam a aritmética**: implicações da teoria de Piaget. 2. ed. Porto Alegre: Artmed. 2002.
- LÉVY, Pierre. As Tecnologias da inteligência. O Futuro do pensamento na era da informática. São Paulo. Ed. 34, 14ª Reimpressão, 2006.
- LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: SAIZ, I.; PARRA, C. **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artmed, 1996.
- NUNES, T. & BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artmed, 1997.
- PIAGET, J.; SEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. 3. ed. São Paulo: Zahar, 1981.
- PIAGET, J. **Sobre a Pedagogia**: textos inéditos. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1998. Org. por Silvia Parrat e Anastasia Tryphon.
- PIAGET, Jean. **O nascimento da inteligência na criança**. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1987. Tradução de Álvaro Cabral.
- PIAGET, J. Developmente and learning. **Journal of Research in Science Teaching**, XI, n.e (1964), 176-86.
- PIAGET, Jean. **A equilibração das estruturas cognitivas**: problema do desenvolvimento central. Rio de Janeiro: Zahar, 1975/1976.
- PIAGET, Jean. **O nascimento da inteligência na criança**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1966/1987.
- PIAGET, Jean. **Abstração reflexionante**: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: ArtMed, 1977/1995.
- PIAGET, J. **A iniciação à matemática, a matemática moderna e a psicologia da criança**. In: PARRANT, S.; TRYPHON, A. Jean Piaget: sobre a pedagogia, textos inéditos. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1998, p. 217-221.



ROSSO, A. J.; BECKER, F.; TAGLIEBER, J. E. A produção do conhecimento e a ação pedagógica. **Educação e Realidade**, v. 23, n. 2, jul/dez. 1998, p. 63-81.

SERON, X. DELOCHE, Gerard & NOËL, Marie-Pascale. Um transcodage des nombres chez l'enfant: la production de chiffres sous dictée. In: BIDEAU, Jacqueline; MELJAC, C.; FISCHER, J.P. **Les chemins du nombre**. France: Presses Universitaires de Lille, 1991.

SINCLAIR, A.; CHRISTINA, C. T.; GARINM, A. Comment l'enfant interprète-t-il les nombres écrits à plusieurs chiffres. In: ARTIGUE, M. et col. Vingt ans de didactique des mathématiques em France. Homenage à G. Brousseau et G. VERGNAUD: **La Pensée Sauvage**, 1994, p. 243-249.

SINCLAIR, A. com a colaboração de MELLO, D. & SIEGRST, F. A notação numérica na criança. Capítulo II. In: SINCLAIR, Hermine et al. Tradução de Maria Lúcia Moro. **A produção de notações da criança: linguagem, número, ritmos e melodias**. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1990.

TEIXEIRA, L. Aprendizagem inicial do valor posicional dos números: conceituação e simbolização. In: **Psicologia na Educação: articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica**. Rio de Janeiro: Associação Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Psicologia, 1996.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches em didactique de mathématiques**, v. 10, n. 23, 1990, p.133-170.

ZUNINO, DELIA LERNER DE. **A matemática na escola - aqui e agora**. Porto Alegre: ARTMED, 1995.