

Características do Pensamento Algébrico de Estudantes do 1º Ano do Ensino Médio

Characteristics of Students' Algebraic Thinking in the 1st Year of High School

CLAUDIA LISETE OLIVEIRA GROENWALD¹
EDNEI LUIS BECHER²

Resumo

Buscando compreender como o desenvolvimento do pensamento algébrico ocorre, esse trabalho buscou mapear, com estudantes do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública do município de Osório - RS, as competências e habilidades algébricas desenvolvidas durante o Ensino Fundamental com os conteúdos comumente estudados naquelas séries, através de uma investigação qualitativa segundo uma abordagem de estudo de caso. Ao final do processo, foi possível verificar que os estudantes investigados apresentavam as habilidades relacionadas com a manipulação mais desenvolvidas que as habilidades relacionadas com generalização e resolução de problemas, além disso, os resultados obtidos pelos estudantes mostraram-se melhores quando as questões utilizavam uma linguagem próxima daquela que eles conheciam dos livros didáticos. A investigação também foi capaz de identificar os erros mais frequentes cometidos pelos estudantes, o que oportunizou constatar que os estudantes participantes do experimento têm muitos de seus procedimentos algébricos baseados na aprendizagem anterior da aritmética.

Palavras Chave: Álgebra. Pensamento Algébrico. Ensino Médio. Matemática.

Abstract

Looking for to understand how algebraic thinking developed, this work pursue to map, with 1st year High School students of a public school from Osório – RS, the algebraic competences and skills developed during their Elementary School with the contents generally studied in those grades, through an qualitative investigation using a approach of case study. At the end of investigation, it was possible to verify that investigated students presented the skills related with manipulation more developed than skills related with generalization and problem solving, besides the results shown that question with language close that used in text books were easier for students. The investigation was also capable to identify the most frequent mistakes committed by the students, what allowed to verify that participant students of the experiment have many of their algebraic knowledge based on the previous learning of arithmetic.

Keywords: Algebra. Algebraic Thinking. High School. Mathematics.

¹ Universidade Luterana do Brasil – ULBRA - claudiag@ulbra.br

² Instituto Federal Catarinense, Campus Concórdia - edneibeche@gmail.com

Introdução

O momento histórico atual é caracterizado pelas constantes mudanças sociais, onde os avanços científicos e tecnológicos alteraram a maneira como nos comunicamos e nos relacionamos com as pessoas e o mundo a nossa volta. Nessa realidade quase toda informação está disponível, no entanto, é necessário que essa informação seja transformada em conhecimento, de forma a produzir novos conhecimentos.

Esta sociedade fundamentada na informação e na comunicação se desenvolveu sobre o alicerce da informática e, por conseguinte, sobre a Matemática que forneceu as bases para o desenvolvimento dos *softwares* que fazem as máquinas funcionarem. Em particular, a Álgebra constitui-se na base da programação desses equipamentos, o que torna esse tema de relevância para a formação do pensamento matemático que os estudantes necessitam para atuarem no mundo moderno.

Essa realidade exige, cada vez mais, conhecimentos matemáticos, exigindo que os estudantes tenham uma formação matemática que vá além da utilização de algoritmos e repetição de técnicas. Neste trabalho apresentam-se os resultados do mapeamento do pensamento algébrico de 12 alunos do 1º ano do Ensino Médio, participantes de um experimento, que visou identificar as características do pensamento algébrico de alunos que concluíram o Ensino Fundamental.

Perspectivas da Álgebra

A Álgebra pode ser caracterizada por ter seu foco no estudo de relações matemáticas abstratas, incluindo fórmulas, equações e inequações, estudando ainda, conjuntos numéricos e não numéricos, onde as operações são definidas de modo abstrato.

Lins e Gimenez (1997) caracterizam a Álgebra considerando quatro características da atividade algébrica: conteúdos, notação, ação do pensamento e campo conceitual. Os conteúdos são os tópicos da Álgebra que consensualmente entende-se que possuam significado dentro do estudo algébrico – equações, cálculo literal, funções, etc.. Entendem que a atividade algébrica se caracteriza por resolver problemas de Álgebra, contextualizados ou não, deste modo, a atividade algébrica é “fazer ou usar Álgebra” e caracterizar a atividade algébrica, a partir da notação é considerado, por esses autores, uma tendência “letrista”. Com relação às mudanças conceituais produzidas com o

estudo da Álgebra, acredita-se que sejam relacionadas com o estágio do desenvolvimento do pensamento algébrico. Lins e Gimenez (1997, p. 92), referem-se que a “introdução de notação especial (no caso, letras) corresponde diretamente a essa mudança conceitual”. A atividade algébrica resulta da ação do pensamento formal, assim o pensamento formal é algébrico, conseqüentemente, “todo pensamento daquele que atingiu o estágio operatório formal constituiria alguma atividade algébrica” (p. 99). Como assim se produziria um campo muito vasto, os autores optam por restringir-se ao pensamento de quem opera com operações (concretas) aritméticas, o que leva à noção de Álgebra escolar como Aritmética generalizada e, obtém-se uma caracterização dependente de conteúdos (p. 99-100).

Para Falcão (2003), a Álgebra não pode ser vista como a generalização da Aritmética, pois possui propriedades intrínsecas, relacionadas com o seu campo conceitual específico. A Álgebra tem uma série de relações entre números, estabelecidas no domínio da Aritmética, para depois as generalizar com letras (variáveis e/ou incógnitas). Para muitos pesquisadores, segundo Falcão, a Álgebra tem a dupla função de representar fenômenos e relações e, auxiliar na resolução de problemas matemáticos, conforme quadro 1.

Atividades em Álgebra	
Ferramenta representacional	Ferramenta de resolução de problemas
Modelação: captura e descrição dos fenômenos do real. Função: explicitação simbólica de relações elementares. Generalização: passagem de descrições específicas ligadas a um contexto para leis gerais.	Algoritmos: regras sintáticas, prioridades de operações, princípio da equivalência entre equações
Elementos básicos do campo conceitual algébrico	
Números, medidas, incógnitas e variáveis, regras de atribuição de símbolos, gama de aceções do sinal de igual, trânsito entre formas de linguagem.	Operadores, sintaxe, prioridade de operações, princípio da equivalência, conhecimentos-em-ação vinculados a experiências extra-escolares, fatos aritméticos instrumentais (por exemplo: elemento neutro da adição).

Quadro 01: quadro dos elementos básicos de caracterização do campo conceitual de Álgebra, adaptado de Falcão, 2003, p.31.

Para Kaput (2005), a visão tradicional da Álgebra está relacionada com a aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos, simplificação de expressões algébricas e resolução de equações. Assim, a Álgebra escolar tem servido para ensinar um conjunto de procedimentos que, na visão dos alunos, não têm relação com outros conhecimentos matemáticos e nem com o seu mundo cotidiano. Além disso, para o autor, a Álgebra se dedica a capacitar os estudantes para produzir sequências de símbolos corretas e não

foca na compreensão dos conceitos e do raciocínio matemático. As aplicações utilizadas são artificiais, e os alunos não têm a oportunidade de refletir sobre as suas próprias experiências, nem de articular os seus conhecimentos, memorizam procedimentos que são assumidos como operações sobre sequências de símbolos e que resolvem problemas artificiais sem significado. Para o autor o raciocínio algébrico³ e o uso de representações algébricas como gráficos, tabelas, planilhas eletrônicas e fórmulas, são as ferramentas intelectuais mais poderosas, e é lamentável que os estudantes, muitas vezes, se afastem da Matemática por não compreenderem o significado dos conteúdos estudados, deixando de desenvolver competências e habilidades ligadas ao simbolismo algébrico, sem o qual não existiria a Matemática superior nem a Ciência como a conhecemos. Para esse autor o grande empreendimento é fazer a Álgebra acessível a todos os alunos, criando um ambiente na sala de aula que possibilite a aprendizagem com compreensão.

Para Kaput (2005) a Álgebra deve ser entendida de forma muito mais ampla do que ocorre tradicionalmente, devendo-se contemplar nos currículos cinco perspectivas da Álgebra: (a) como generalização e formalização de padrões e como aritmética generalizada; (b) como manipulação de formalismos guiada sintaticamente; (c) como estudo de funções e de variação; (d) como estudo de estruturas abstratas; e (e) como linguagem de modelação. Na visão do autor estas cinco perspectivas contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, promovendo a compreensão e levando-os a fazer generalizações a partir de suas concepções e experiências, não limitada a Álgebra somente, mas também, a aplicação de regras de manipulação simbólica onde os estudantes por vezes perdem as relações com o significado do símbolo, algo comum quando entende-se a Álgebra simplesmente como manipulação formal.

Kieran (1992) defende a existência de duas perspectivas diferentes no estudo da Álgebra: a processual e a estrutural. A Álgebra processual não lida com a transformação de expressões algébricas, mas sim com a substituição de variáveis por números, realizando depois as correspondentes operações aritméticas. Enquanto que a Álgebra estrutural diz respeito a um conjunto diferente de operações realizadas, não com

³ Raciocínio algébrico é aqui entendido como pensamento algébrico.

números, mas sim com expressões algébricas, onde os objetos operados são as próprias expressões algébricas, e o resultado obtido é também uma expressão algébrica.

Podemos também estudar as diferentes concepções da Álgebra a partir dos vários usos dados à variável. Neste sentido, Usiskin (1995) aponta quatro concepções da Álgebra: como Aritmética generalizada, onde a variável é entendida como um padrão aritmético para traduzir e generalizar; como um meio para resolver determinados problemas, a Álgebra utiliza as variáveis como incógnitas ou constantes, tendo como principal uso a simplificação e resolução de equações; como estudo de relações, onde a variável é considerada como argumento ou parâmetro, sendo usada para estabelecer relações e definir funções e sendo também utilizada para a construção de gráficos; como o estudo das estruturas, quando a variável é entendida como um símbolo arbitrário para manipular e para justificar determinadas propriedades.

O estudo das ideias fundamentais da Álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico têm sido discutidos por muitos (NCTM⁴, 1989, 2000; DRISCOLL, 1999), o que leva inevitavelmente a uma reflexão sobre o que é o pensamento algébrico, que se admite evolui com o estudo da Álgebra e que deve capacitar o estudante no uso da Matemática, com mais desenvoltura, na resolução de problemas.

Para Howden (1990) o conhecimento de conteúdos específicos e o vocabulário são ingredientes necessários para a fundamentação da Álgebra, e de igual importância, é a habilidade de olhar além dos detalhes numéricos ou dimensões para a essência de uma situação. Desenvolver essa habilidade requer o foco da instrução no processo, bem como no conteúdo, ou seja, é necessário que o professor seja capaz de orientar o processo de aprendizagem nos procedimentos, estratégias e conteúdos.

Assim, podemos constatar que na opinião dos pesquisadores em Educação Matemática, existe uma convergência, no sentido de que o pensamento algébrico consiste em um conjunto de habilidades cognitivas que contemplam a representação, a resolução de problemas, as operações e análises matemáticas de situações tendo as ideias e conceitos algébricos como seu referencial.

⁴ National Council of Teachers of Mathematics

Álgebra e simbolismo

Arcavi (1994) indica oito aspectos para o sentido do símbolo, que são: *fazer os símbolos amigos; ir além da manipulação; construir expressões simbólicas ajustadas aos dados; expressões equivalentes com significados não equivalentes; a escolha dos símbolos*, cada estudante pode escolher um símbolo para representar um problema, a escolha deve ser feita no sentido de simplificar o cálculo ou o resultado final; *capacidade para manipular com flexibilidade; usar símbolos em retrospectiva*, na resolução de um problema recorre-se à construção de um modelo matemático da situação, onde os símbolos e os significados estão geralmente relacionados, quer com o início quer com o fim do problema, no sentido de interpretar os resultados; *usar símbolos num contexto*.

Arcavi (1994) acrescenta ainda que o “sentido do símbolo” é um sentimento complexo e multifacetado que inclui: a compreensão e um sentimento estético para o poder dos símbolos; a capacidade para ser capaz de abandonar símbolos em favor de outras abordagens; a capacidade para manipular e ler expressões simbólicas; a consciência de que um símbolo pode construir com sucesso uma relação simbólica; a capacidade para selecionar possíveis representações simbólicas do problema; a realização de uma constante necessidade de verificar o significado dos símbolos; a sensibilidade para os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar em diferentes contextos (p. 31).

A vinculação entre a Álgebra e os símbolos utilizados na sua escrita ou notação é algo praticamente indissociável, tanto que para muitos estudantes a Álgebra consiste no estudo e manipulação de letras. Esse simbolismo utilizado na Álgebra evoluiu ao longo da história. Harper (1987) considera três períodos do desenvolvimento da manipulação do simbolismo algébrico: o primeiro, designado pelo autor por “*Álgebra retórica*”, ocorre antes de Diofanto (cerca 250 a.C.) e é caracterizado por existirem descrições por extenso na linguagem comum para a resolução de problemas e por não existirem símbolos para representar o desconhecido, ou seja, é caracterizada pelo uso exclusivo de palavras. O segundo período, “*Álgebra sincopada*”, vai desde Diofanto até ao final do século XVI e envolve o uso de letras para representar quantidades desconhecidas. Ives (2002, p.206) concorda com Harper e relata que Diofanto criou abreviaturas para incógnitas, potência de incógnitas até a de expoente seis, subtração, igualdade e inverso.

De acordo com Socas, Machado, Palarea e Hernández (1996), a linguagem algébrica é constituída por dois níveis. No primeiro nível, semântico⁵, “os símbolos e as notações são tratados com significados claros e precisos” (p. 15). Assim, neste nível existe um paralelismo com a linguagem comum. O segundo nível, sintático⁶, é aquele onde “as regras podem ser operadas sem referência direta a nenhum significado” (p. 15).

A Álgebra e a Resolução de Problemas

A Álgebra e o conhecimento prático se relacionam geralmente através dos problemas. Em 1980 o NCTM declarou que o foco do ensino da Matemática deveria ser a resolução de problemas. Nesse sentido, Filloy e Sutherland (1996) defendem que estes problemas têm um papel importante no ensino e aprendizagem da Álgebra. Entretanto, o viés adotado no ensino da Matemática com relação aos problemas tem sido criticado devido a sua natureza artificial com que geralmente são apresentados aos alunos.

Kieran (1981) acredita que, uma das dificuldades relacionadas com o uso de problemas, no sentido de dar significado ao simbolismo matemático é precisamente o assunto da relação *versus* procedimento do uso do sinal de igual. Lochhead e Mestre (1988) referem-se às instruções em Álgebra, que parecem muitas vezes não fornecer aos alunos uma oportunidade adequada para aprender a interpretar símbolos matemáticos. Além disso, os alunos não aprendem a ler e escrever em Matemática. Esta omissão não só limita o seu desempenho em problemas como também os põe em clara desvantagem quando se trata de aprender a manipulação simbólica de regras em Álgebra. Sem a capacidade para interpretar expressões, os alunos não têm mecanismos para verificarem se um determinado procedimento é correto. Assim, têm muitas vezes de confiar em aspectos mecanizados para resolver os problemas.

Problema da investigação

A aprendizagem da Álgebra formal tem recebido atenção de muitos pesquisadores (KIERAN, 1992; SOCAS et al, 1996; NCTM, 2000) que buscam entender melhor a origem das dificuldades, e ao mesmo tempo, compreender como acontece o processo de aprendizagem da Álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

⁵ Refere-se ao significado

⁶ Refere-se às regras

Durante o Ensino Fundamental, geralmente a partir da 6^a série, os estudantes começam o seu aprendizado formal da Álgebra, no entanto, no Ensino Médio ainda apresentam dificuldades no uso de habilidades e conhecimentos algébricos. Esse trabalho buscou identificar e mapear quais competências, habilidades e conhecimentos algébricos desenvolvidos na escola, os estudantes efetivamente utilizam quando ingressam no Ensino Médio.

Objetivos da investigação

Essa investigação possui como objetivo geral identificar e mapear os conhecimentos, competências e habilidades algébricas que estudantes de 1^o ano do Ensino Médio desenvolveram ao longo dos anos de escolarização no Ensino Fundamental.

Para alcançar essa meta foram traçados os seguintes objetivos específicos: investigar quais as competências e habilidades algébricas que estudantes do 1^o Ano do Ensino Médio desenvolveram durante o período em que cursaram o Ensino Fundamental e caracterizar seu pensamento algébrico; investigar o que estudantes do Ensino Médio aplicam dos conteúdos algébricos estudados no Ensino Fundamental.

Metodologia utilizada na Investigação

Para a execução da investigação dividiu-se o trabalho em três etapas: caracterização do pensamento algébrico, desenvolvido nas séries finais do Ensino Fundamental (5^a, 6^a, 7^a e 8^a séries); implementação de uma experiência, com o software SCOMAX, visando identificar as características do pensamento algébrico de alunos do 1^o ano do Ensino Médio; identificação das características do pensamento algébrico dos alunos participantes do experimento.

A caracterização do pensamento algébrico foi desenvolvida a partir de um cruzamento entre as habilidades que os estudantes devem desenvolver durante o Ensino Fundamental, tendo NCTM (2000), PISA⁷(2004), PCN+(2002) e ENEM (2001) como referência e, também os conteúdos de Matemática estudados na escola, conforme os livros didáticos utilizados nessa fase. Após esta caracterização foi necessária uma ampla investigação de atividades didáticas (exercícios, problemas ou modelagens) que

⁷ Programme for International Student Assessment

pudessem ser utilizadas nos testes, para indicar como os estudantes lidam com situações que exijam conhecimentos algébricos.

Os estudantes resolveram os testes, no SCOMAX, individualmente, em dois encontros semanais de aproximadamente 2 horas e 30 minutos cada, os testes 01 (5ª série) e 02 (6ª série) foram resolvidos no primeiro encontro e os testes 03 (7ª série) e 04 (8ª série) no segundo encontro. O investigador também desempenhou o papel de professor.

Nas análises posteriores, para o mapeamento do pensamento algébrico dos estudantes participantes do experimento, foram utilizados o banco de dados gerado pelo SCOMAX e os registros feitos pelos estudantes durante a realização dos testes no computador. Para preservar o anonimato dos estudantes a referência aos mesmos acontece, nesse artigo, como aluno 01 até aluno 12.

Perfil da Amostra

Todos os participantes do experimento eram alunos do professor/pesquisador, no 1º ano do Ensino Médio da Escola Estadual de Educação Básica Prudente de Moraes, no município de Osório/RS, no turno da manhã. Os estudantes foram convidados a participar da pesquisa, comparecendo de forma espontânea no turno oposto ao horário normal de aula.

A turma que participou da pesquisa era formada por 28 alunos (19 meninos e 9 meninas), sendo que 12 compareceram para a realização do teste, sete meninos e cinco meninas, com idade média de 16 anos. Onze alunos nunca foram reprovados e apenas um aluno já tinha sido reprovado no 1º ano do Ensino Médio. Aproximadamente 50% dos estudantes têm computador em casa e, 80% afirmaram utilizar internet pelo menos três vezes por semana, o que evidencia um perfil de estudante com bom acesso à tecnologia. A maioria dos estudantes participantes (nove alunos) mostrou-se favorável ao estudo da Matemática, e seis alunos consideraram essa disciplina difícil.

O Software SCOMAX Utilizado no Experimento

O SCOMAX (Student Concept Map Explore), cujo significado é a exploração do mapa conceitual de um aluno, possibilita ao professor importar um PCIG, utilizando o software Compendiumⁱ, de um conteúdo qualquer, criar um banco de questões e ligá-lo a um teste adaptativo (MORENO et al, 2007), gerando uma série de perguntas seguindo

a estrutura hierárquica descrita no PCIG. Das respostas obtidas de cada estudante se obtém um mapa conceitual personalizado que descreve o que cada aluno conhece a priori do conteúdo do PCIG, o que gera o mapa individualizado das dificuldades do aluno, conforme a figura 2.

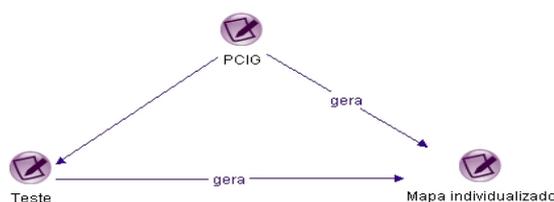


Figura 2: esquema do sistema SCOMAX

Para cada conceito do PCIG, devem ser cadastradas perguntas que irão compor o banco de questões do teste adaptativo, com o objetivo de avaliar o grau de conhecimento que o aluno possui de cada conceito. Um teste adaptativo informatizado é administrado pelo computador, que procura ajustar as questões do teste ao nível de habilidade de cada examinando. Segundo Costa (2009) um teste adaptativo informatizado procura encontrar um teste ótimo para cada estudante, para isso, a proficiência do indivíduo é estimada interativamente durante a administração do teste e, assim, só são selecionados os itens que mensurem eficientemente a proficiência do examinado. Como cada questão apresentada a um indivíduo é adequado à sua habilidade, nenhuma questão do teste é irrelevante (SANDS e WATERS, 1997). As perguntas são de múltipla escolha, classificadas em fáceis, médias e difíceis, sendo necessário definir, para cada pergunta: o grau de sua relação com o conceito; o grau de sua dificuldade (fácil, média ou difícil); a resposta verdadeira; a possibilidade de responder a pergunta considerando exclusivamente sorte ou azar; a estimativa do conhecimento prévio que o aluno tem sobre esse conceito; o tempo de resposta (em segundos) para o aluno responder à pergunta. As definições desses parâmetros são fundamentais para que seja possível, através do teste adaptativo, estimar o grau de conhecimento do aluno para cada conceito, de acordo com as respostas do estudante. Para isso o teste adaptativo vai lançando perguntas aleatórias ao aluno, com um nível de dificuldade de acordo com as respostas do estudante ao teste. Quer dizer, se o aluno vai contestando corretamente, o sistema vai subindo o grau de dificuldade das perguntas, e ao contrário, se a partir de um determinado momento o aluno não responde corretamente, o sistema diminui o nível de dificuldade da pergunta seguinte. O sistema dispõe de um mecanismo de parada,

quando já não pode obter uma maior estimativa sobre o grau de conhecimento de um conceito, ou quando não existam mais perguntas. A ferramenta informática parte dos conceitos prévios, definidos no PCIG, e começa a avaliar os conceitos, progredindo sempre que o aluno consegue uma nota superior ao estipulado, pelo professor, no teste. Quando um conceito não é superado o sistema não prossegue avaliando por esse ramo de conceitos do PCIG, pois se entende que esse conceito é necessário para a compreensão do seguinte, o sistema poderá prosseguir por outras ramificações do PCIG.

O desempenho do aluno é calculado a partir da fórmula $\frac{D \times P}{D \times P + (1-P) \times L}$, onde: D é a dificuldade da pergunta; L é o nível de adivinhação da pergunta; P é a nota da pergunta anterior.

A seguir apresentam-se os grafos utilizados para a estruturação dos testes adaptativos que foram realizados pelos estudantes participantes do experimento.

Na figura 03 pode-se verificar que o teste concentra-se em habilidades algébricas e matemáticas desenvolvidas antes da formalização da Álgebra, que ocorre na 7ª série. O teste busca verificar se o estudante consegue trabalhar com representações, quer sejam de padrões ou em fórmulas. Os sete nodos que fazem parte deste grafo são: ler representações algébricas, representar relações algébricas, usar fórmulas, valor numérico, propriedades e operações dos números naturais e reconhecimento de padrões.

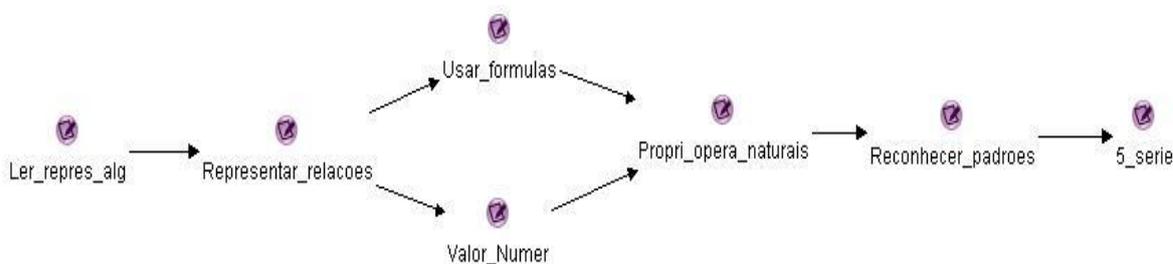


Figura 03: grafo do teste 01 (5ª série)

Na figura 04 é apresentado o grafo do teste 02, referente à 6ª série, a ênfase está nas habilidades operacionais relacionadas a equações de 1º grau e, ao nível de compreensão que os estudantes participantes do experimento tinham nas representações algébricas. Esse teste foi composto por sete nodos: compreender e representar algebricamente, usar fórmulas, calcular e compreender razão e proporção, reconhecer padrões, operar algebricamente e resolver e compreender soluções de equações de 1º grau.

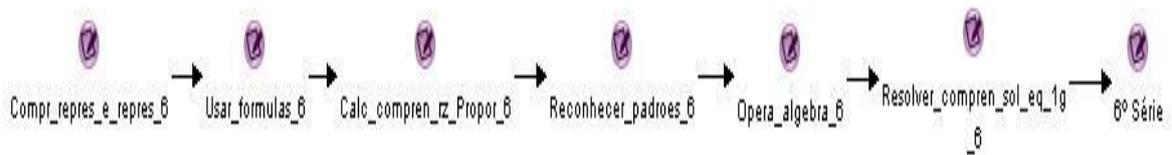


Figura 04: grafo do teste 02 (6ª série)

Na figura 05 está o grafo do teste 03, que tem como parâmetro os conteúdos e as respectivas habilidades desenvolvidas na 7ª série. Como é nessa série que os estudantes normalmente formalizam a Álgebra, nesse teste deu-se ênfase no mapeamento das habilidades vinculadas com as propriedades operacionais e as operações algébricas, ao mesmo tempo em que se buscou verificar se os estudantes seriam capazes de utilizar os seus conhecimentos algébricos na resolução de situações problema. Esse grafo possui 5 nodos: propriedades e operações algébricas, resolver sistemas e inequações de 1º grau, compreender e expressar ideias algebricamente, fazer generalizações e deduzir fórmulas e resolver problemas.

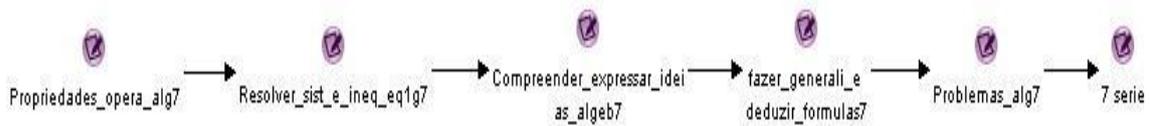


Figura 05: grafo do teste 03 (7ª série)

A figura 06 mostra o grafo do teste relacionado com a 8ª série, centrou-se no mapeamento das habilidades dos estudantes no uso da Álgebra para descrever situações, fazer generalizações e resolver problemas. Esse teste tinha 6 nodos: compreender e usar propriedades dos números reais, usar propriedades e operações algébricas, criar representações, resolver equações de 2º grau, usar e compreender gráficos, fazer generalizações e deduzir fórmulas e resolver problemas.

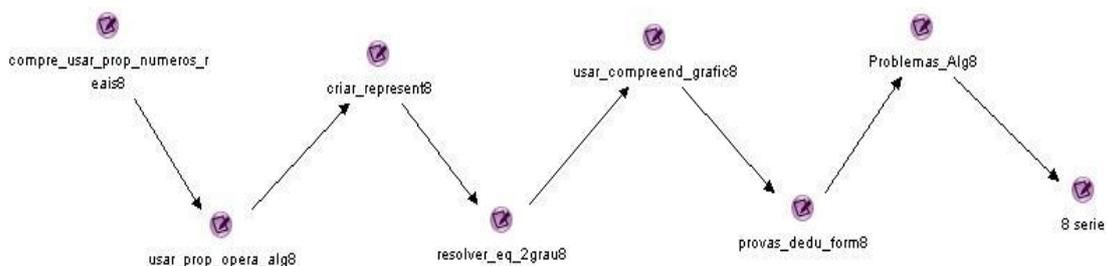


Figura 06: grafo do teste 04 (8ª série)

Os bancos de questões usados nesse experimento tinham 15 questões em cada nodo, classificadas em fáceis, médias ou difíceis. Foi definido, nos testes, o tempo de resposta, sendo 100 segundos para as perguntas consideradas fáceis, 180 segundos nas médias e 270 segundos nas difíceis.

Ao final dos testes o sistema SCOMAX gera um banco de dados com os resultados de cada nodo, conforme a figura 07.

El tiempo de la respuesta	Pregunta	Num.respuesta	Tipo de la respuesta	Tiempo restante(s)	Dificultad	Adivinanza	puntos antes
06/10/08 18:47:01.035	Quando um determinado número é fatorado obtém-se: a.a.a.b.c.c Qual das opções abaixo representa o resultado obtido.	3	Incorrecto	176	0.55	0.2	0.1
06/10/08 18:47:39.142	Mariana tem 17 anos menos que o triplo da idade de Dora. A soma das idades das duas é 39. A expressão que nos permite calcular a idade de Dora é:	2	correcto	130	0.4	0.15	0.1
06/10/08 18:48:20.274	Eliminando parênteses e colchetes, escreva da forma mais simples possível a expressão: $3x - (2x + 7x) - [10x + (-4x - 2x) - (7x + 10x)]$.	3	Incorrecto	181	0.55	0.2	0.22857141
06/10/08 18:49:10.701	A diagonal de um quadrado pode ser calculada usando a fórmula , onde d é a medida da diagonal e a medida do lado. Porém, se desejarmos calcular a medida do lado, a partir, da medida da diagonal devemos usar:	0	Incorrecto	130	0.4	0.15	0.22857141
06/10/08 18:49:41.395	Simplificando a expressão $-9(X+3)-18$, obtemos:	4	Incorrecto	38	0.3	0.15	0.22857141
06/10/08 18:50:51.608	Qual o valor de X na expressão $3X+X-8 = X+8$?	4	correcto	44	0.3	0.15	0.22857141
06/10/08 18:51:55.277	Qual o valor de Z na expressão $Z+2Z+4 = Z+Z+5$?	1	correcto	96	0.4	0.15	0.37209302
06/10/08 18:52:55.285	A simplificação de $4x+4-x+y-2+x$ resulta em:	2	Incorrecto	50	0.3	0.15	0.61244017
06/10/08 18:53:51.274	Para calcular a área de um círculo usamos a fórmula , onde A é a área do círculo e r é a medida do raio. Qual é a área de um círculo que tem diâmetro de 24 cm?	2	Incorrecto	128	0.4	0.15	0.61244017
Puntos en total							0.61244017

Figura 07: exemplo de tabela de resultados gerado pelo SCOMAX

A caracterização do pensamento se fez através dos conteúdos, buscando identificar que habilidades e, por consequência, que competências algébricas os estudantes desenvolveram. Adotou-se a mesma concepção de competência proposta para o ENEM, onde se entende que competências são modalidades estruturais da inteligência, ou melhor, ações e operações que utiliza-se para estabelecer relações com e entre objetos, situações, fenômenos e pessoas que se deseja conhecer (Relatório Pedagógico 2000, pág. 11).

Enquanto que Habilidades são especificações das competências estruturais em contextos específicos, decorrem das competências adquiridas e referem-se ao plano imediato do “saber fazer”. Por meio de ações e operações, as habilidades aperfeiçoam-se e articulam-se, possibilitando nova reorganização das competências (Relatório Pedagógico 2000, pág. 11).

A partir desta caracterização geral entende-se que competências algébricas são ações e operações de pensamento que utilizam representação, operação e interpretação abstrata de termos, incógnitas e variáveis que descrevem e/ou generalizam situações. Enquanto

que habilidades algébricas estão relacionadas à capacidade do estudante de utilizar e aplicar determinada competência para compreender fatos e situações algébricas, bem como, para resolver problemas.

Os testes centraram-se especialmente em quatro competências básicas (PCN, 1998, PCN+, 2002, NCTM, 2000) que os estudantes devem ter desenvolvido ao longo dos anos de Ensino Fundamental, conforme a figura 08, que mostra como foram estruturados os testes com o objetivo de mapear as competências e habilidades algébricas dos estudantes e o conteúdo tradicionalmente estudado no Ensino Fundamental utilizado pelos estudantes.

Competência	Habilidade	Nodo ⁸ dos grafos utilizados no PCIG	Grupo	Série	
Compreender representações algébricas	Ler representações algébricas	Ler representações algébricas	01	5 ^a	
	Representar relações algébricas	Representar relações algébricamente	01	5 ^a	
	Compreender/representar algebricamente	Compreender/representar algebricamente	Compreender/representar algebricamente	02	6 ^a
		Compreender/expressar algebricamente	Compreender/expressar algebricamente	02	7 ^a
Operar algebricamente	Usar fórmulas	Usar fórmulas 1	03	5 ^a	
		Usar fórmulas 2	03	6 ^a	
	Valor numérico	Valor numérico	03	5 ^a	
	Usar propriedades e operações	Propriedades/operações com N	04	5 ^a	
		Propriedades/operações com R	04	8 ^a	
		Propriedades/operações algébricas	04	7 ^a	
		Operar algebricamente	06	6 ^a	
		Compreender/usar propriedades algébricas	06	8 ^a	
	Resolver equações	Resolução de equações de 1º grau	05	6 ^a	
		Resolução de equações de 2º grau	05	8 ^a	
		Resolução de sistemas e inequações	05	7 ^a	
Reconhecer	Reconhecer padrões	Reconhecer padrões 1	07	5 ^a	
		Reconhecer padrões 2	07	6 ^a	
	Generalizar e deduzir fórmulas	Criar representações	08	8 ^a	
		Generalizar e deduzir fórmulas 1	08	7 ^a	
		Generalizar e deduzir fórmulas 2	08	8 ^a	
Resolver	Resolver problemas algébricos	Problemas algébricos 1	09	7 ^a	
		Problemas algébricos 2	09	8 ^a	

Figura 08: quadro das competências e habilidades mapeadas pelos testes.

Evidentemente algumas habilidades algébricas são desenvolvidas em mais de uma série, pois a aprendizagem da Álgebra é um processo longo, portanto existem casos onde a mesma habilidade é avaliada mais de uma vez e, além disso, uma competência pode

⁸ Nodo é o nome que se dá a cada etapa do grafo que será utilizado pelo SCOMAX para estruturar o teste adaptativo individualizado.

exigir muitas habilidades diferentes. Assim, para permitir uma análise mais apurada foram organizados 9 grupos, conforme a figura 8.

As questões utilizadas nos testes adaptativos, gerados pelo SCOMAX foram baseadas em questões encontradas em livros didáticos de 5^a, 6^a, 7^a e 8^a séries (CAVALCANTE, 2006; MORI, 2005; NAME, 1979; SOUZA e SPINELLI, 2002; IEZZI, 2004; IMENES e LELLIS, 1997; GUELLI, 1998, 2004; GIOVANNI, 2002; GIOVANNI e PARENTE, 1999; DANTE, 2004; FILHO e SILVA, 2003).

No processo de construção do banco de questões que foi utilizado pelo SCOMAX, buscou-se contemplar também as perspectivas processual e estrutural, que existem no estudo da Álgebra segundo Kieran (1992). Entende-se que a distinção proposta por Kieran complementa naturalmente a proposta deste trabalho.

Resultados e análise

Para a análise global foram utilizadas as competências e habilidades da figura 8, reunidas em 9 grupos, de modo que fosse possível uma análise das habilidades algébricas dos alunos.

A competência de **compreensão de representações algébricas** mapeou duas habilidades, através de quatro nodos.

- Grupo 01 – buscou mapear a habilidade dos alunos de lerem e reconhecerem representações; faziam parte desse grupo os nodos: ler representações algébricas e representar relações algebricamente. A figura 9 apresenta um exemplo de questão do grupo 01.

A fórmula $CP=0,5PU+IP$ é bem traduzida da seguinte forma:
(a) o custo de produção é igual à metade do preço unitário
(b) o custo de produção é igual à metade do preço unitário mais metade dos impostos
(c) o custo de produção é igual à metade do custo de produção, mais impostos
(d) o custo de produção é igual R\$0,50 mais o custo de produção mais imposto
(e) nenhuma dessas

Figura 9: exemplo de questão proposta no grupo 01.

- Grupo 02 – mapeou a capacidade dos alunos de compreenderem representações; sendo o grupo composto pelos nodos: compreender e representar algebricamente e, compreender e expressar algebricamente, sendo a ênfase adotada nesse grupo mais formal, no sentido de propor questões com linguagem parecida com a

utilizada nos livros didáticos. As questões utilizadas para mapear essa primeira competência tinham um enfoque semântico (SOCAS. et al. 1996) pois as questões priorizavam o significado, além disso, as questões buscavam trabalhar a perspectiva da Álgebra como linguagem (KAPUT, 2005). A figura 10 mostra um exemplo de questão do grupo 2.

A expressão algébrica que representa a soma de um número com seu triplo é:

(a) $x+3$
 (b) $x+\frac{3}{x}$
 (c) $x+3x$
 (d) $x+3+x$
 (e) $x+\frac{x}{3}$

Figura 10: exemplo de questão proposta no grupo 02.

Na competência de **operar algebricamente**, a análise centrou-se em quatro habilidades, mapeadas pelos grupos descritos a seguir.

- Grupo 03 – buscou mapear a capacidade dos alunos de determinar valores numéricos, a partir de fórmulas e expressões; esse grupo apresenta os nodos: usar fórmulas 1 (5ª série), usar fórmulas 2 (6ª série) e valor numérico. A figura 11 apresenta uma questão proposta nesse grupo.

Podemos calcular o perímetro de um hexágono utilizando $P=6L$. Qual o é o perímetro, em metros de um hexágono com 2,5 m de lado?

(a) 2,5 m
 (b) 10 m
 (c) 15 m
 (d) 8,5 m

Figura 11: exemplo de questão proposta no grupo 03.

- Grupo 04 – mapeou a habilidade dos alunos em utilizar propriedades; os nodos desse grupo são: propriedades e operações com números naturais, propriedades e operações com números reais e, propriedades e operações algébricas. Aqui se busca identificar se os estudantes conhecem as propriedades operacionais. O exemplo da figura 12 mostra uma questão desse grupo.

Quando dividimos potências com a mesma base é válida a seguinte propriedade: $c^m \div c^n = c^{m-n}$. Em qual alternativa abaixo essa propriedade foi corretamente empregada?

(a) $3^2 \div 3 = 1^2$
 (b) $3^8 \div 3^4 = 3^2$
 (c) $3^{10} \div 3^5 = 3^5$
 (d) $3^{10} \div 3^2 = 3^5$
 (e) Em nenhuma dessas

Figura 12: exemplo de questão proposta no grupo 04.

- Grupo 05 – mapeia a habilidade dos alunos em resolverem equações, inequações e se utilizam esses conhecimentos na resolução de problemas; foi composto pelos nodos: resolução de equações de 1º grau, resolução de equações do 2º grau e resolução de sistemas e inequações de 1º grau. A figura 13 apresenta um exemplo de questão.

Qual o valor de X na equação $\frac{x-3}{3} = x-19$?

(a) 19
(b) 27
(c) 3
(d) 0

Figura 13: exemplo de questão proposta no grupo 05.

- Grupo 06 – é composto pelos nodos relacionados especificamente a habilidade de executar operações algébricas; está composto pelos nodos: operar algebricamente e compreender e usar propriedades algébricas. As questões utilizadas no mapeamento desta segunda competência tiveram como referência a distinção feita por Kieran (1992), entre Álgebra processual (grupo 03) e Álgebra estrutural (grupos 04, 05 e 06). Com relação aos trabalhos de Socas (1996) as questões priorizaram o enfoque sintático, pois davam ênfase as regras operacionais. E com relação a Kaput (2005) as questões tinham a manipulação de formalismos e o estudo de funções como perspectiva. A figura 14 apresenta um exemplo de questão.

Qual polinômio representa a área do quadrado abaixo?

(a) $a + 2ab + b$
 (b) $a^2 + 2ab + b^2$
 (c) $2a + 2b$
 (d) $2(a + b)$
 (e) $a^2 - 2ab + b^2$

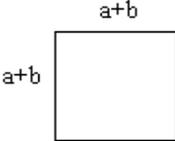


Figura 14: exemplo de questão proposta no grupo 06.

A terceira competência objetivava **reconhecer e representar padrões**, onde foram consideradas duas habilidades centrais.

- Grupo 07 – neste grupo deseja-se mapear a capacidade dos alunos de reconhecerem padrões; composto pelos nodos: reconhecer padrões 1 (7ª série e 8ª série). A figura 15 apresenta um exemplo de questão, que avaliava se os estudantes conseguiam reconhecer padrões.

Qual o termo vem depois na seqüência 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... ?

(a) 11
 (b) 13
 (c) 12
 (d) 15
 (e) nenhum desses

Figura 15: exemplo de questão proposta no grupo 07.

- Grupo 08 – mapeou a habilidade dos alunos de representarem padrões e situações algebricamente; os nodos deste grupo são: criar representações, generalizar e deduzir fórmulas 1 (7ª série) e generalizar e deduzir fórmulas 2 (8ª série). Esse grupo desejava identificar se os alunos seriam capazes de reconhecer padrões, como no grupo 08, e se conseguiriam representar os padrões percebidos utilizando linguagem algébrica. A perspectiva adotada nesses grupos foi a da Álgebra como generalização e formalização de padrões (KAPUT, 2005). A figura 16 apresenta uma questão desse grupo.

Observe a seqüência abaixo:

1º 2º 3º 4º ...

Qual expressão nos permite calcular o número de quadradinhos da 80ª posição?

(a) $2n + 1$
 (b) $4n + 1$
 (c) $4n - 3$
 (d) não tem um padrão

Figura 16: exemplo de questão proposta no grupo 08.

A última competência considerada foi **resolver problemas algébricos e a Álgebra como linguagem de modelação** na perspectiva de Kaput (2005).

- Grupo 09 – essa competência foi testada duas vezes, nos nodos: problemas algébricos 1 (7ª série) e problemas algébricos 2 (8ª série). Como se entende que o uso dos conhecimentos matemáticos para a resolução de problemas é o ápice do processo de aprendizagem, esse grupo buscou verificar até que ponto os estudantes seriam capazes de utilizar os conhecimentos de Álgebra para resolver problemas que

exigiam um enfoque algébrico, e outros, que também permitiam uma abordagem aritmética. A figura 17 apresenta um exemplo desse tipo de questão.

Em um jogo de basquete, as equipes A e B fizeram, ao todo, 153 pontos. A equipe B fez o dobro de pontos da equipe A, menos 3 pontos. Quantos pontos fez cada equipe?

- (a) 51 pt e 101 pt
- (b) 50pt e 103 pt
- (c) 52 pt e 101 pt
- (d) 51 pt e 102 pt

Figura 17: exemplo de questão proposta no grupo 09.

A seguir apresentam-se as constatações, considerando os grupos descritos como referência.

A competência de compreender representações algébricas foi mapeada pelos grupos 01 e 02, constatou-se que somente dois alunos (alunos 01 e 06) obtiveram um desempenho igual ou superior a 0,5⁹ nesses dois nodos.

Já no grupo 02, cinco alunos (alunos 01, 04, 05, 07 e 09) atingiram os objetivos esperados nos dois nodos, enquanto os demais tiveram um desempenho superior a 0,5 em apenas um dos nodos. As questões utilizadas nesse grupo tinham uma redação que utilizavam uma linguagem matematicamente mais formal.

A figura 18 apresenta os resultados do mapeamento dessa competência, com relação a esses dois grupos, onde se pode visualizar com clareza que, como já referido, o desempenho dos estudantes participantes do experimento foi melhor no segundo grupo, sugerindo que para esses estudantes a linguagem algébrica é aplicada fundamentalmente em questões usualmente utilizadas em sala de aula e comuns nos livros didáticos do Ensino Fundamental.

⁹ 0,5 é o resultado mínimo requerido, para os objetivos de um nodo sejam considerados atingidos.

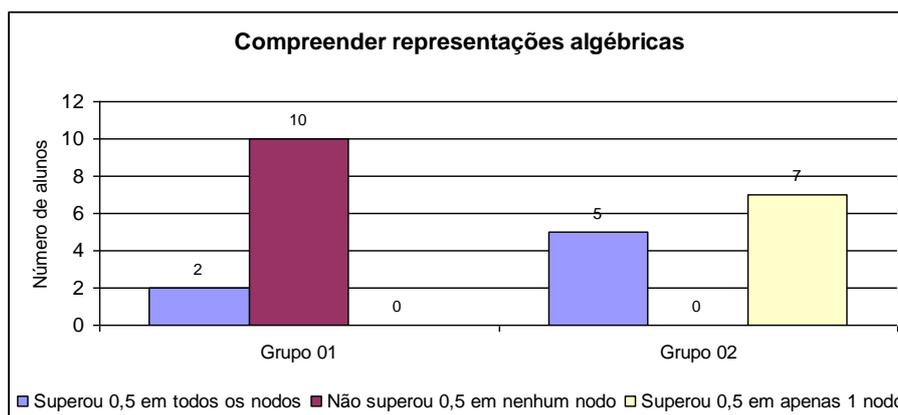


Figura 18: resultados dos estudantes com relação ao desenvolvimento da compreensão e representação algébrica

Com relação à competência de operar algebricamente, buscou-se mapear 4 habilidades. A primeira habilidade centrava-se no uso de fórmulas e na determinação do valor numérico, e nenhum aluno superou 0,5 nos três nodos desse grupo (grupo 03), sendo que três alunos tiveram bons resultados¹⁰ em dois nodos (Alunos 05 e 06 nos nodos usar fórmulas 1 e valor numérico e, o aluno 01 nos nodos usar fórmulas 1 e usar fórmulas 2); quatro alunos tiveram bom resultado em apenas um nodo (Alunos 02, 07 e 08 no nodo usar fórmulas 1 e aluno 10 no nodo usar fórmulas 2) enquanto os outros cinco alunos não tiveram um desempenho superior a 0,5 em nenhum dos nodos.

Constatou-se que as questões que requeriam algum conhecimento de geometria foram aquelas que tiveram menor índice de acerto, sendo possível inferir que os estudantes participantes do teste apresentaram dificuldades nos conteúdos relacionados à geometria, pois apresentaram baixo desempenho.

A segunda habilidade estudada está vinculada a capacidade dos estudantes de utilizarem as propriedades e operações nos conjuntos numéricos dos números naturais e reais, além das propriedades algébricas (grupo 04). Os alunos 06 e 09 evidenciaram pleno desenvolvimento dessas habilidades, pois tiveram desempenho superior a 0,5 nos três nodos. Já, os alunos 01, 04, 05 e 12 apresentaram um desempenho satisfatório, pois superaram o índice mínimo exigido em dois nodos (propriedades e operações em N e propriedades e operações algébricas). Entre os seis alunos restantes, três obtiveram um resultado dentro do esperado em apenas um nodo (propriedades e operações algébricas), e três tiveram resultado inferior a 0,5 em todos os nodos.

¹⁰ Entenda-se “bons resultados” como aqueles que são maiores ou iguais a 0,5.

Na terceira habilidade dessa competência avalia-se a capacidade dos alunos de resolverem equações de 1º e 2º grau, sistemas de equações e inequações. Onde se constata que somente dois alunos (Alunos 02 e 05) tiveram um desempenho superior a 0,5 nos três nodos. Cinco alunos (Alunos 04, 09, 10, 11 e 12) obtiveram um bom resultado nos nodos relacionados a equações de 1º e 2º grau e, três alunos (Alunos 03, 06 e 07) obtiveram bons resultados apenas no nodo referente a equação do 2º grau. Sendo que o aluno 08 não obteve resultado superior a 0,5 em nenhum nodo.

A quarta habilidade (grupo 06) que integra essa competência está relacionada à capacidade dos estudantes de realizarem operações algébricas com expressões, onde apenas três alunos (Alunos 03, 05 e 10) tiveram resultados superiores a 0,5 em ambos os nodos, quatro alunos (Alunos 06, 06, 09 e 10) superaram o mínimo requerido apenas no nodo compreender e usar propriedades algébricas, enquanto o aluno 01 saiu-se bem apenas no nodo operar algebricamente. Os outros quatro alunos (Alunos 02, 04, 08 e 12) não tiveram um desempenho acima do mínimo desejado em nenhum dos nodos.

Analisando os resultados descritos, observa-se que cinco alunos tiveram bom desempenho em apenas um nodo, tendo um domínio parcial das propriedades e operações algébricas, realizando por vezes as operações de forma intuitiva, enquanto os três que tiveram bom resultado em ambos os nodos, demonstraram melhor compreensão dos processos e procedimentos desenvolvidos.

Sob a distinção proposta por Kieran (1992) entre Álgebra processual e Álgebra estrutural, verifica-se que os estudantes participantes do experimento que tiveram os melhores resultados, com relação a esta competência tiveram bons resultados tanto nos grupos processuais como nos estruturais, enquanto que os outros alunos não evidenciaram o desenvolvimento de nenhuma das duas perspectivas. O grupo 05 foi aquele que teve os melhores resultados, e visava mapear a habilidade dos estudantes para resolverem equações.

Nos grupos relacionados a competência de operar algebricamente deu-se prioridade a um enfoque sintático (SOCAS, 1996) e, pode-se verificar que os estudantes em sua maioria têm dificuldade para realizarem operações algébricas. Pois, muitas vezes, utilizaram procedimentos e propriedades adequados, mas não fizeram adaptações necessárias ao contexto apresentado pela questão.

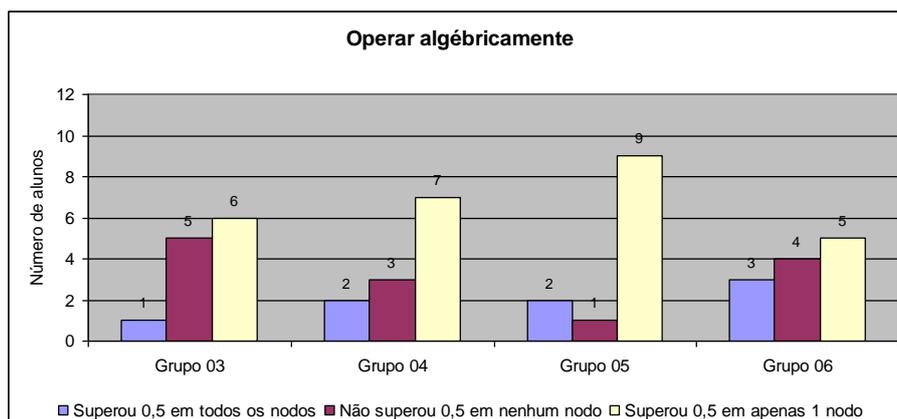


Figura 19: resultado dos estudantes com relação a operações algébricas

A figura 19 sintetiza os resultados obtidos pelos alunos por grupo de questões, sendo possível verificar que os grupos 03 e 06 foram aqueles em que mais estudantes evidenciaram não dominar as habilidades mapeadas por esses grupos. Nos grupos 04 e 05, embora poucos alunos tenham demonstrado pleno desenvolvimento das habilidades mapeadas por esses grupos, foram os grupos em que menos alunos tiveram desempenho abaixo do mínimo desejado, evidenciando um desenvolvimento parcial dessas habilidades.

A terceira competência desejou mapear o reconhecimento e a representação de padrões algebricamente, através de duas habilidades: reconhecer padrões (grupo 07) e representar esses padrões a partir de generalizações e deduções (grupo 08).

No reconhecimento de padrões somente o aluno 06 não teve o desempenho esperado no primeiro nodo, porém no segundo nodo, desta habilidade, somente 2 alunos (Alunos 01 e 05) tiveram desempenho acima do mínimo esperado de 0,5. Levando a conclusão que esses estudantes têm a habilidade de reconhecer apenas padrões simples, tendo desenvolvido essa habilidade apenas basicamente. Essa inferência decorre do fato de nenhum aluno ter tido um desempenho acima do mínimo desejado nos três nodos que avaliavam esta habilidade. Sendo que seis alunos (alunos 03, 07, 08, 09, 10 e 11) tiveram um desempenho acima do mínimo desejado em dois dos três nodos, quatro alunos (Alunos 01, 02, 05 e 12) em apenas um dos três nodos e dois alunos (alunos 04 e 06) não obtiveram um resultado acima de 0,5 em nenhum dos nodos. A figura 20 resume os resultados do mapeamento dessa competência, evidenciando que os estudantes desenvolveram apenas parcialmente as habilidades relacionadas a competência de reconhecer e representar padrões.

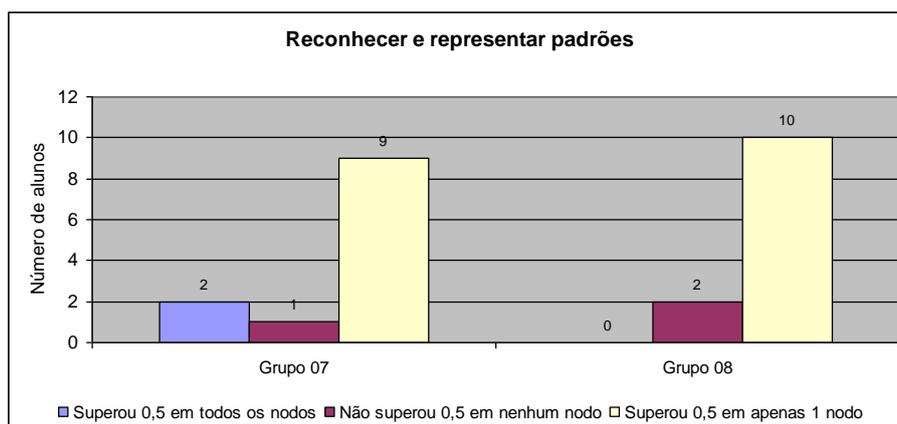


Figura 20: resultado dos estudantes com relação a reconhecimento e representação de padrões.

A quarta competência estudada foi resolução de problemas (grupo 09), entende-se que é possível considerar que um estudante possui desenvolvido o pensamento algébrico quando é capaz de mobilizar seus conhecimentos, competências e habilidades para a resolução de situações problema.

Esta competência foi avaliada em dois nodos, no teste referente à 7ª série e no teste referente à 8ª série, e os resultados obtidos demonstram uma situação preocupante, pois somente o aluno 06 obteve resultados acima de 0,5 nos dois nodos e seis alunos (alunos 01, 02, 04, 06, 08 e 12) obtiveram resultados acima do mínimo desejado em apenas um nodo, sendo os cinco primeiros no teste 3 (7ª série). Os outros cinco alunos (alunos 03, 05, 09, 10 e 11) obtiveram resultados inferiores a 0,5 em ambos nodos, que avaliavam essa competência.

Como se observa na figura 21, o grupo de estudantes participantes do experimento mostrou-se bastante heterogêneo, pois metade dos estudantes não superou o mínimo desejado em nenhum dos nodos, enquanto outros cinco alunos obtiveram um desempenho acima do mínimo em somente um dos nodos. Essa situação permite que se considere que esses alunos possuem pouca capacidade de utilizarem Álgebra para resolver problemas, transitando entre um nível baixo, para aqueles que obtiveram um sucesso parcial e um nível zero, para aqueles que não conseguiram resultados acima do mínimo desejado em nenhum dos nodos que buscavam avaliar e mapear esta competência.

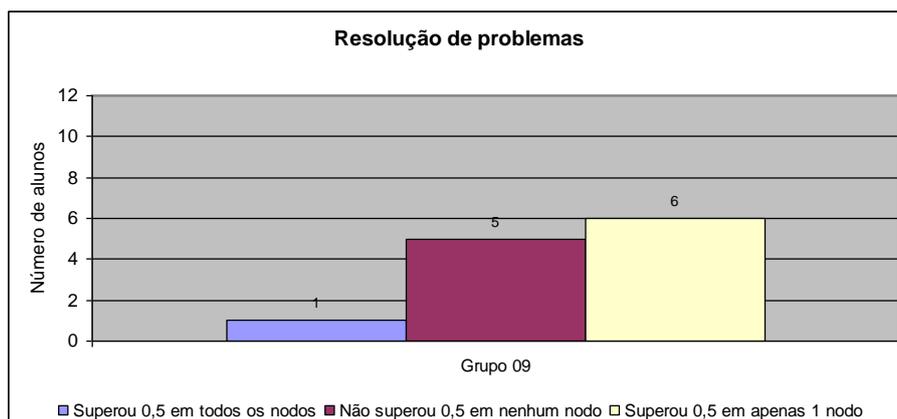


Figura 21: resultado dos estudantes com relação a resolução de problemas

Como já referido, buscamos identificar com relação às 4 competências, como os estudantes lidam com os enfoques processuais e estruturais da Álgebra segundo (KIERAN, 1992). No mapeamento da compreensão e representação algébrica, as questões enfocaram a Álgebra processual enquanto no mapeamento das habilidades relacionadas a operações algébricas, buscou-se mapear tanto questões com enfoque processual quanto questões com enfoque estrutural. O reconhecimento e representação de padrões e a resolução de problemas enfocaram apenas a Álgebra estrutural.

Verificou-se que a Álgebra processual mostrou-se difícil para a maioria dos estudantes participantes do experimento, pois esse enfoque foi mapeado em 9 nodos e somente 3 alunos (alunos 01, 05 e 06) obtiveram desempenho acima de 0,5 em pelo menos 5 nodos, o que se considerou aceitável pois representa mais de 50% dos nodos, enquanto os outros alunos superaram 0,5 em no máximo 4 nodos, sendo importante destacar que as questões que não utilizam linguagem semelhante à utilizada em livros didáticos ofereceram maior dificuldade pois se verificou menor índice de acerto. Um fato que merece destaque no aspecto processual são os resultados obtidos pelos estudantes com relação ao nodo resolução de equações de 2º grau, no qual 10 dos 12 alunos superaram o mínimo desejado.

Os resultados encontrados, com relação à Álgebra estrutural, mapeada em 13 nodos, foram percentualmente iguais, pois mantendo o mesmo percentual de sucesso em 50% dos nodos, 3 alunos (alunos 01, 05 e 07) obtiveram resultados superiores a 0,5 em pelo menos 7 dos 13 nodos. Os resultados obtidos pelos demais alunos também foram

semelhantes, se comparados aos obtidos na Álgebra processual, pois esses alunos tiveram um desempenho médio superior a 0,5 em no máximo 4 nodos.

Os nodos em que os estudantes tiveram melhor desempenho foram aqueles em que deviam utilizar propriedades algébricas, e naqueles em que tinham que reconhecer e representar padrões simples. Analisando as questões propostas nesses 2 nodos novamente se observa que as questões que utilizavam uma linguagem próxima daquela utilizada nos livros didáticos e conseqüentemente de sala de aula, parecem ser mais fáceis para os estudantes, sendo isso um fator que parece influenciar o desempenho dos estudantes.

Especificamente sobre os nodos que mapearam as habilidades e os conhecimentos dos estudantes, com relação a resolução de equações, tendo como referência o trabalho de Kieran (1992), não foi possível identificar erros, dos estudantes participantes da pesquisa, com relação a interpretação do significado das letras utilizadas nas representações algébricas referenciados por aquela pesquisadora.

Da mesma forma, na análise dos resultados é possível identificar maior dificuldade por parte dos estudantes, com relação as questões de enfoque mais sintático e estruturais, relacionadas a contextos matemáticos, como utilizar propriedades em situações puramente matemáticas.

Características do Pensamento Algébrico dos Estudantes Pesquisados

Visando obter uma medida global, optou-se pelo cálculo da média aritmética dos resultados obtidos em cada conjunto de habilidades de cada competência e o respectivo desvio padrão. Os resultados obtidos mostram que apenas 2 alunos (aluno 01 e 05) tiveram um desempenho médio superior a 0,5 na compreensão e representação algébrica, o que representa 17% dos alunos. Com relação a competência de operar algebricamente, 5 alunos (alunos 01, 03, 05, 06 e 09) obtiveram média maior que 0,5 nos nodos que mapeavam essa competência, representando 42% dos alunos participantes do experimento.

O reconhecimento e representação de padrões foi a competência em que o maior número de estudantes obteve média superior a 0,5. Sendo que 6 dos estudantes (alunos 01, 03, 05, 09, 10 e 11) obtiveram médias que superaram o mínimo esperado, atingindo um percentual de 50% dos alunos. A resolução de problemas foi avaliada em apenas 2

nodos, o que influenciou o resultado da média aritmética, uma vez que um resultado alto em um dos nodos pode não evidenciar um resultado baixo no outro, fato esse que se pode verificar com os alunos 01, 02, 07 e 12 que obtiveram médias maiores que 0,5 em virtude de terem obtido resultado alto em apenas 1 dos nodos, em particular no primeiro nodo que propunha questões que podiam ser resolvidas algebricamente e aritmeticamente, abordagem essa preferida pelos estudantes, enquanto no segundo nodo que propunha questões com enfoque essencialmente algébrico os estudantes não obtiveram resultado semelhante. Assim, o uso da média aritmética para analisar a competência de resolução de problemas deve ser feito com cuidado.

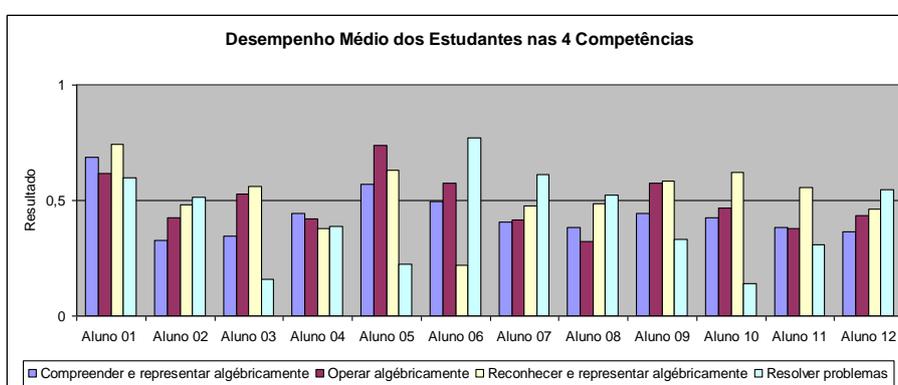


Figura 22: gráfico mostrando o desempenho médio dos estudantes em cada competência.

O gráfico da figura 22 apresenta os resultados médios dos alunos participantes do experimento em cada competência e, evidencia que se pode considerar que apenas o aluno 01 desenvolveu as competências e habilidades algébricas esperadas durante o Ensino Fundamental. O aluno 05 também mostrou bom desempenho, obtendo uma média aritmética superior a 0,5 em três das quatro competências mapeadas, embora não tenha obtido bons resultados na resolução de problemas. Os alunos 03, 06 e 09 superaram o mínimo desejado em duas competências, e os demais estudantes ou tiveram resultados superiores ao mínimo desejado em apenas uma das competências ou em nenhuma delas.

Analisando a amostra, se pode considerar que esses estudantes não desenvolveram plenamente as competências e habilidades algébricas, com o estudo dos conteúdos de Matemática propostos no Ensino Fundamental. Com exceção do aluno 01 que atingiu plenamente os objetivos esperados e dos alunos 05 e 06 que atingiram parcialmente, mas que globalmente evidenciaram bons resultados, todos os outros estudantes

participantes do experimento apresentaram resultados insatisfatórios para alunos ingressantes no Ensino Médio. Ao mesmo tempo, percebe-se que embora exista variação entre os resultados obtidos pelos alunos nas diferentes competências, os 9 alunos que tiveram resultado insatisfatório, desenvolveram as suas competências algébricas tendo o aprendizado da Matemática centrado na manipulação, o que explica em parte os resultados relacionados a segunda competência, além disso estes estudantes demonstraram serem capazes de representar e reconhecer padrões simples, baseando-se em análises aritméticas.

Conclusão

Os estudantes, participantes do experimento, tendem a usar seus conhecimentos prévios de Aritmética para resolver problemas de Álgebra, e só utilizam conhecimentos essencialmente algébricos para resolver problemas elementares. Os resultados apontam que esses estudantes não vivenciaram suficientemente, no seu processo de ensino e aprendizagem do Ensino Fundamental, situações em que fossem confrontados com a necessidade de resolver problemas. Foi possível identificar que os estudantes, tiveram dificuldade para estruturar formalmente a resolução dos problemas, dando preferência pela resolução através de uma solução numérica, com estratégias de tentativa e erro.

O perfil algébrico dos estudantes participantes do experimento é caracterizado pelo domínio de habilidades de manipulação e representação, bem delimitados em contextos matemáticos, ou seja, esses alunos não evidenciaram serem capazes de utilizar seus conhecimentos de Álgebra e as respectivas competências e habilidades para resolverem problemas novos. Os estudantes mostraram serem capazes de resolver equações, embora não tenham evidenciado que sejam capazes de utilizar equações para modelar e resolver problemas. Além das habilidades algébricas relacionadas a manipulação de símbolos, os estudantes participantes do experimento também mostraram serem capazes de reconhecer e representar padrões simples ou que possam ser determinados aritmeticamente.

Os resultados encontrados evidenciam a necessidade de uma metodologia, segundo Arcavi (1994), no ensino da Álgebra, que oportunize aos estudantes aprendê-la e compreendê-la sob um contexto de resolução de problemas.

Referências

- ARCAVI, Abraham. Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 24-35, 1994.
- BAKER, Frank B. **The Basis of Item Response Theory**. 2º Ed.. ERIC Clearinghouse on Assessment and Evaluation, 2001.
- BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: Mec, 2002.
- COSTA, Denise Reis. Métodos Estatísticos com Testes Adaptativos Informatizados. **Dissertação de Mestrado**. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.
- DRISCOLL, M. *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers Grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann, 1999.
- EVES, Howard. Introdução a História da Matemática. 3 ed. Campinas: Ed. Da Unicamp, 2002.
- FALCÃO, Jorge T. R. Alfabetização algébrica nas séries iniciais. Como começar? *Boletim GEPEM*, 42, 27-36, 2003.
- FILLOY, Eugenio; RUBIO, Guillermo Didactic models, cognition and competence in the solution of arithmetic & algebra word problems. In . Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F.-L. Lin (eds.). In *7th Annual Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, 1, 154-161, 1993.
- HAMBLETON, Ronald; SWAMINATHAN, Hariharan. Response Theory: Principles an Application. Kluwer /Nijhoff Publishing, 1985.
- HARPER, E. Ghosts of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 75-90, 1987.
- HOWDEN, Hilde. *Prior Experiences*. In: Edwards, Edgar L. Jr., Ed. Algebra for Everyone (Chap. 2, pp. 7-23) Reston, Virginia: NCTM, 1990.
- INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS - INEP. ENEM – Relatório Pedagógico 2000. Brasília: O instituto, 2001.
- KAPUT, James. *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Documento retirado de <http://www.simcalc.umassd.edu/downloads /KaputAlgUnd.pdf> em 21de Outubro de 2005.
- KIERAN, Carolyn. Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 12(3), 317-326, 1981.
- KIERAN, Carolyn. The learning and teaching of school algebra. In Grows, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York, NY: MacMillan, 1992.
- LINS, Romulo C.; GIMENEZ, Joaquim. Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. Campinas: Papirus, 1997.

LOCHHEAD, J.; MESTRE, J. P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In: Coxford Arthur F. & Shulte Albert P. (Org.) *As ideias da álgebra* (Chap. 13, pp. 144-154). São Paulo, Brasil: Atual, 1995.

MORENO, Lorenzo. et all. Hacia un Sistema Inteligente basado en Mapas Conceptuales Evolucionados para la Automatización de un Aprendizaje Significativo. Aplicación a la Enseñanza Universitaria de la Jerarquía de Memoria. XII Jornada de Enseñanza Universitaria de la Informática. Tenerife, 2007.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM. *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA, 1989.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM. Principios e Estándares para la Educación Matemática. Trad. Manuel Fernández Reyes. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2000.

NOVAK, Joseph D. e GOWIN, D. Bob. *Aprendiendo a aprender*. Barcelona: Ediciones Martínez Roca S.A., 1988.

SANDS, W. A. e WATERS, B. K. Introduction to ASVAB and CAT. Em **Computerized Adaptive Testing: from inquiry to operation** (eds. W. A. Sands, B. K. Waters e J. R. McBride). Washington: American Psychological Association, 1997.

SOCAS, M.; MACHADO, M.; PALAREA, M.; HERNÁNDEZ, J. *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis, 1996.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis In: Coxford Arthur F. & Shulte Albert P. (Org.) *As ideias da álgebra* (Chap. 2, pp. 9-22). São Paulo, Brasil: Atual, 1995.

WAINER, H. **Computerized Adaptive Testing: A Primer**. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 2000.

ⁱ Disponível em <http://www.compendiuminstitute.org/>.