# Razonamiento Probabilístico de Profesores y su Evolucion en un Taller Formativo

## Probabilistic Reasoning of Teachers and its evolution in a training workshop

JOSÉ MIGUEL CONTRERAS[1]
CARMEN DÍAZ[2]
CARMEN BATANERO[3]
JUAN JESÚS ORTIZ[4]

**Resumen**

*Las nuevas directrices curriculares que amplían el estudio de la estadística y de la probabilidad en los diferentes niveles educativos requieren de una formación específica de los profesores. Dicha formación ha de estar basada en la evaluación previa de sus necesidades formativas y ha de atender simultáneamente al conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido. En este trabajo presentamos los resultados obtenidos en un taller basado en un problema paradójico y dirigido a profesores en México, Portugal y España. Los datos sirven para evaluar la existencia de sesgos de razonamiento en una proporción importante de participantes y muestran un cambio positivo en el desarrollo del taller. Se observa diferencia en algunos resultados respecto a la situación del profesor (formación o ejercicio) y contexto geográfico. Se analizan las posibilidades que ofrece el taller para mejorar también el conocimiento didáctico de los profesores.*
**Palabras clave:** *Formación de profesores, Enseñanza de probabilidad, Paradojas de probabilidad.*
**Clasificación AMS:** 00-01,97Uxx

**Abstract**

*New curricular guidelines increase the study of Statistics and Probability in different educational levels and thus require the teachers' specific education. This education should be based on the previous assesment of the formative needs and should consider simultaneously the mathematical and pedagogical content knowledge. In this paper results obtained in a workshop based on a paradoxical game and directed to teachers in Mexico, Spain and Portugal are presented. The assesment data suggest reasoning biases in an important proportion of participants as well as a positive change along the workshop. Some results vary as regards the teacher's situation (in-service or pre-service teacher) or geographical context. The possibilities of this workshop to improve the pedagogical content knowledge of teachers is also analysed.*
**Keywords:** *Teacher training, Teaching probability, Paradoxes of Probability.*

[1] Universidad de Granada - jmcontreras@ugr.es
[2] Universidad de Huelva - carmen.diaz@dpsi.uhu.es
[3] Universidad de Granada - batanero@ugr.es
[4] Universidad de Granada - jortiz@ugr.es

## Introducción

Aunque la enseñanza de la probabilidad ha estado presente en los currículos no universitarios en los últimos 20 años, encontramos una tendencia reciente a renovar su enseñanza, haciéndola más experimental, en forma que se pueda proporcionar a los alumnos una experiencia estocástica desde su infancia (M.E.C., 2006a, 2006b). Estos cambios nos llevan a reflexionar sobre los fines de su enseñanza en la educación obligatoria, que son dos principalmente: (a) enseñar los fundamentos matemáticos de la probabilidad, como preparación al estudio posterior de la estadística y otras disciplinas; (b) educar el razonamiento probabilístico de los alumnos para la toma de decisiones en múltiples situaciones, puesto que el azar y los fenómenos aleatorios impregnan nuestra vida y nuestro entorno (BENNET, 1998). Estas dos razones, no completamente separadas, debieran orientar el contenido y la metodología de la acción didáctica, aunque con frecuencia nos centramos en la primera de ellas, suponiendo que de ella se derivará la segunda (GAL, 2005).

Una condición para mejorar la enseñanza de la probabilidad es la adecuada preparación de los profesores. Como indica Azcárate (1997), el movimiento de reforma surgido en los niveles obligatorios debe generar simultánemente un profundo debate sobre el conocimiento profesional deseable en los profesores. Aunque muchos profesores de educación secundaria son licenciados en ciencias o matemáticas, son pocos profesores los que recibieron una formación específica sobre didáctica de estadística o probabilidad. Por consiguiente, podrían desconocer los resultados de las investigaciones sobre las dificultades de sus en el razonamiento probabilístico y no llegar a detectarlas en sus alumnos. Sería importante que los grupos de investigación y departamentos universitarios proporcionaran apoyo al profesorado, colaborando en su formación (FRANKLIN y MEWBORN, 2006).

El objetivo de este trabajo es evaluar la existencia de algunas intuiciones probabilísticas incorrectas en profesores, así como la eficacia del desarrollo de talleres formativos, basados en juegos paradójicos, para provocar en los profesores la reflexión sobre estas intuiciones incorrectas y promover un cambio en las mismas. Asimismo, se proporciona un modelo educativo que los profesores pueden utilizar con sus estudiantes en la enseñanza de la probabilidad. La evaluación se lleva a cabo a partir del análisis de protocolos recogidos en talleres dirigidos al perfeccionamiento del profesorado en

México, Portugal y España, con un total de 166 participantes. La actividad del taller está tomada de Batanero, Godino y Roa (2004) quienes la experimentaron con una muestra reducida de estudiantes de estadística. En este trabajo se pretende evaluar si los resultados descritos por los autores se conservan en una muestra mayor de sujetos y en particular, en profesores en servicio.

Para fundamentar el trabajo, comenzamos analizando los componentes del conocimiento requerido en los profesores para enseñar probabilidad y justificamos el interés didáctico de las paradojas en la formación probabilística de los profesores.

# 1. Marco teórico

## *1.1. Componentes del conocimiento profesional para enseñar probabilidad*

Los profesores tienen un papel esencial al interpretar el currículo y adaptarlo a las circunstancias específicas (PONTE, 2001). La investigación sobre formación de profesores diferencia entre el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento de contenido pedagógico. Este último sería "la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza" o bien "esa amalgama especial de contenido y pedagogía que es el campo propio de los profesores, su forma especial de comprensión profesional" (SHULMAN, 1986, p. 8-9).

Hill, Ball, y Schilling (2008) describen el conocimiento matemático para la enseñanza como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno." (p. 374). Aunque, para la enseñanza de la probabilidad en niveles no universitarios, los profesores no necesitan altos niveles de conocimiento del contenido matemático, tales como, por ejemplo, la teoría de la medida, sin embargo si requieren una comprensión profunda de la probabilidad básica. Dicha comprensión incluye un conocimiento suficiente de las interconexiones y relaciones entre los diferentes conceptos probabilísticos y sus aplicaciones (MA, 1999), pero también incluye otros conocimientos no estrictamente matemáticos que son necesarios para organizar la enseñanza y llevarla a la práctica.

Dentro del conocimiento del contenido matemático, Hill, Ball y Schilling (2008) diferencian el Conocimiento Común del Contenido, Conocimiento Especializado del

Contenido, y Conocimiento en el Horizonte Matemático. Mientras el conocimiento común del contenido es el puesto en juego para resolver problemas matemáticos por cualquier persona, el conocimiento especializado del contenido incluye aspectos que no necesariamente tiene una persona ordinaria, por ejemplo, elegir una secuencia de enseñanza o identificar las ideas matemáticas trabajadas en un problema. El "conocimiento en el horizonte matemático" aporta perspectiva a los profesores para su trabajo, e incluye, por ejemplo, conocimiento de la relación con otras materias, o la historia de las matemáticas.

Para el conocimiento pedagógico del contenido Hill, Ball y Schilling (2008) proponen tener en cuenta tres componentes:

a) El Conocimiento del Contenido y los Estudiantes es el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular" (p. 375). Incluye el conocimiento de los errores y dificultades comunes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, el ser capaz de valorar la comprensión del alumno y saber cómo evoluciona su razonamiento matemático.

b) El Conocimiento del Contenido y la Enseñanza resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido. Incluye saber construir, a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos pertinentes para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas.

c) El Conocimiento del Contenido y el Currículo, sería el conocimiento de las orientaciones curriculares, objetivos y competencias pretendidas, contenidos, medios de evaluación y materiales curriculares.

Estos tipos de conocimiento son revisados por Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi (2008), quienes incluyen los siguientes componentes en su modelo de conocimiento profesional de los docentes:

- Componente epistémica: El profesor requiere no sólo conocer el significado matemático de los conceptos, sino también el conocimiento de su desarrollo histórico y de los diversos significados que cada concepto que enseña ha recibido en diferentes periodos, así como de las controversias asociadas a estas diferentes definiciones puede ayudarle a comprender mejor las dificultades de sus alumnos. Por ejemplo, los diferentes significados de la probabilidad estuvieron en su día sujetos a debates filosóficos, algunos de los cuáles se mantienen incluso en la actualidad (ver Batanero, Henry y Parzysz, 2005);

- Componente cognitiva: Es importante tener conocimientos sobre el desarrollo de la probabilidad que los alumnos alcanzan de los conceptos básicos, dependiendo de su edad, así como de los sesgos de razonamiento más comunes. Ello permitirá una mejor predicción de las dificultades de aprendizaje de los alumnos, sus posibles errores, obstáculos y estrategias en la resolución de problemas. Los aspectos afectivos que los estudiantes puedan desarrollar en relación a la materia (miedo, interés, etc.) también deben tenerse en cuenta;
- Materiales: El profesor debe conocer los recursos que pueden favorecer el aprendizaje y las técnicas de enseñanza adecuadas. Debe tener experiencia con buenos ejemplos de situaciones de enseñanza y herramientas didácticas, alcanzar una capacidad crítica para analizar los libros de texto y documentos curriculares y habilidad para adaptar los temas a los conocimientos en diferentes niveles de enseñanza. Debe tener habilidad para conseguir el interés de los alumnos, teniendo en cuenta sus actitudes y creencias;
- Interacción: Capacidad para crear una buena comunicación en el aula y organizar el discurso y comunicación entre alumnos y entre alumnos y profesor. Asimismo debe utilizar la evaluación como una forma de guiar la instrucción.

Los modelos descritos de conocimientos profesionales sugieren que los conocimientos matemáticos no son suficientes para que los docentes puedan enseñar probabilidad de una manera efectiva y desarrollar en sus estudiantes un adecuado razonamiento probabilístico. Algunos profesores pudieran no estar familiarizados con los resultados de las investigaciones sobre dificultades y sesgos en el razonamiento de los estudiantes, o con la metodología propuesta en los nuevos currículos (basada en experimentos y simulaciones) (STOHL, 2005). Si su formación inicial se centró en las competencias matemáticas, pueden sentirse inseguros con enfoques más informales y tratar de omitir o reducir la enseñanza del tema.

### *1.2. Paradojas como herramienta didáctica en la formación de profesores*

Una implicación del anterior análisis es la necesidad de desarrollar y evaluar los conocimientos profesionales de los docentes y las competencias, que tenga en cuenta los diferentes componentes del conocimiento didáctico. Es importante apoyarlos y proporcionarles actividades que les sirvan para conectar los aspectos conceptuales y didácticos (BALL, 2000). Si queremos que los estudiantes construyan su conocimiento en forma activa, resolviendo problemas e interactuando con sus compañeros en la clase, las actividades presentadas a los profesores también deben basarse en el enfoque constructivista y social del aprendizaje (JAWORSKI, 2006).

Puesto que el profesor tiene unos conocimientos sólidos de probabilidad elemental, hemos de buscar problemas, que, siendo aparentemente sencillos, puedan tener soluciones contra intuitivas o sorprendentes. No es difícil encontrar este tipo de situaciones, ya que la historia de la probabilidad y estadística está repleta de episodios y problemas que resultaron en su tiempo desafiantes y que muestran que la intuición estocástica con frecuencia nos engaña. La construcción de la teoría de la probabilidad no ha sido sencilla, y es sólo el esfuerzo y el aprendizaje a partir del análisis de los propios errores, lo que llevó al progreso de la misma (BATANERO, HENRY Y PARZYSZ, 2005).

Algunas paradojas clásicas de la teoría de la probabilidad (Székely, 1986) pueden ser usadas como recurso didáctico en la formación de profesores. Las soluciones, tanto correctas como erróneas, que algunos participantes puedan defender vehementemente, servirán para analizar cuáles son los conceptos involucrados en las soluciones, algunos de los cuales surgieron precisamente para resolver uno de estos problemas paradójicos.

Posteriormente los profesores podrían usarlas también como recurso didáctico. Lesser (1998) indica que el uso inteligente de estos ejemplos contra-intuitivos apoya una pedagogía constructivista, promoviendo un aprendizaje profundo a partir de las creencias previas y dando al profesor el papel de facilitador del aprendizaje. Los estudiantes se pueden beneficiar al desarrollar su motivación y meta cognición, descubriendo las conexiones con la historia y la vida real. Falk y Konold (1992), por su parte, afirman que estas actividades requieren una consciencia de sus propios pensamientos, lo que es tan importante como el aprendizaje de la solución correcta y un paso vital para alcanzar la capacidad matemática abstracta. Konold (1994) destaca el efecto motivador de los resultados sorprendentes que anima a los estudiantes a explorar el problema más formalmente.

## 2. Método

En lo que sigue analizamos los datos del trabajo con un taller dirigidos a profesores, comparando los resultados por situación del profesor (formación y ejercicio) y contexto. El taller se realizó en tres países diferentes, España, México y Portugal. El objetivo de este estudio es comparar si las dificultades de partida y el aprendizaje a lo largo de la actividad descrita por Batanero et al. (2004) en una muestra pequeña de profesores en formación (n=47) se reproducen en una muestra de mayor tamaño y se conservan en el caso de los docentes en servicio. También se quiere analizar si hay diferencias debidas al contexto cultural y analizar la frecuencia de demostraciones correctas en incorrectas de la solución al problema, que no fue realizada por Batanero et al. (2004).

### *2.1. Muestras participantes y contexto*

En la tabla 1 se presenta la composición de la muestra. Los profesores en formación españoles eran alumnos del quinto curso en la licenciatura de Ciencias y Técnicas Estadísticas. Los profesores portugueses en formación eran licenciados en matemáticas y cursaban el Máster de Didáctica de la Matemática. Todos ellos realizaron el taller dentro de una asignatura optativa de Didáctica de la Matemática. Los profesores en ejercicio realizaron el taller en congresos dirigidos al profesorado, en sus países respectivos. Su formación inicial era variada, siendo mayoría los licenciados en Matemáticas en España o Educación Matemática (en Portugal y México). En el taller impartido en México participaron también profesores en activo de estadística en diversas titulaciones universitarias, algunos de los cuales tenían una formación como ingeniero, médico o farmacéutico.

Tabla 1. Frecuencia (y porcentaje) de participantes por paises según situación

| *Situación del profesor* | *España* | *Portugal* | *México* | *Total* |
|---|---|---|---|---|
| En ejercicio | 40 (38,1) | 14 (50) | 33 (100) | 87 (52,4) |
| En formación | 65 (61,9) | 14 (50) | 0 (0) | 79 (47,6) |
| Total | 105 (59) | 28 (16,9) | 33 (24,1) | 166 (100) |

Tabla 2. Distribución de profesores en ejercicio por años de experiencia docente

| Experiencia docente (años) | Secundaria | Universidad | Total |
|---|---|---|---|
| Menos de 5 | 10 (15,8) | 10 (41,7) | 20 (23,0) |
| De 5 a 10 | 19 (30,2) | 5 (20,8) | 24 (27,6) |
| De 10 a 15 | 11 (17,5) | 3 (12,5) | 14 (16,1) |
| De 15 a 20 | 11 (17,5) | 3 (12,5) | 14 (16,1) |
| Más de 20 | 12 (19) | 3 (12,5) | 15 (17,2) |
| Total | 63 (72,4) | 24 (27,5) | 87 (100) |

La experiencia docente de los profesores en ejercicio era variada (media=14,45; desviación típica=9,23 tomando tanto a nivel de secundaria como universitario), predominando los profesores de educación secundaria y con menos de 10 años de docencia (ver tabla 2).

### *2.2. Descripción del taller*

Los datos se recogieron de los protocolos escritos que los participantes en los talleres completaron durante el desarrollo del mismo y entregaron voluntariamente para ser utilizados en esta investigación. Dicho protocolo (Ver Figura 1) describía el juego e incluía tablas de registros de resultados a lo largo del juego, así como preguntas que los participantes debían responder. El taller estuvo dividido en dos sesiones, con una duración aproximada de dos horas cada una de ellas.

TALLER: IDEAS ESTOCÁSTICAS FUNDAMENTALES

Nombre: País

Formación previa:

Años de docencia en Secundaria o Primaria En Universidad

¿Has explicado alguna vez estadística?

¿Ha estudiado algún curso de estadística? ¿Cuántos?

**Decripción del juego**

*Se toman 3 fichas de la misma forma y tamaño, de las cuales una es roja por ambas caras; otra es azul por una cara y roja por la otra, y la tercera es azul por las dos caras.*

*El profesor coloca las tres fichas en una caja, que agita convenientemente, antes de seleccionar una de las tres fichas, al azar. Muestra, a continuación, una de las caras de la ficha elegida, manteniendo la otra tapada, pidiéndo a sus alumnos que adivinen el color de la cara oculta.*

*Una vez hechas las apuestas, el profesor muestra la cara oculta. Cada alumno que haya acertado en la predicción efectuada, consigue un punto.*

Figura 1. Hoja de registro

| Ensayo n. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Color de la cara mostrada | | | | | | | | | | |
| Color predicho | | | | | | | | | | |
| Color de la cara oculta | | | | | | | | | | |

1. ¿Has seguido alguna estrategia? Descríbela

Figura 1. Ejemplo del material entregado en el taller

El taller utiliza un problema, tomado de Batanero, Godino y Roa (2004), y basado la paradoja de la caja de Bertrand, publicada  Joseph Bertrand en su libro "Calcul des probabilités" publicado en 1889. El taller comienza involucrando a los participantes en el juego descrito en la Figura 1. Se pide a los participantes primero hacer  una serie de 10 ensayos del juego y, a continuación, deben encontrar la estrategia que produce la oportunidad de ganar más veces en una serie larga de ensayos. Debido al carácter paradójico del problema, en el grupo de profesores surgirá más de una solución (algunas incorrectas).

Después de la primera serie de 10 ensayos del juego, se listan en la pizarra todas las estrategias sugeridas por los profesores y a continuación el formador organiza un debate para decidir cuál es la mejor estrategia. El principal objetivo de este debate, en el cuál se esperan tanto el razonamiento correcto como otros incorrectos, es aumentar el conocimiento común probabilístico del profesor. También se espera incrementar el conocimiento especializado de la probabilidad, proporcionándole modelos para la enseñanza. Puesto que el problema es contra intuitivo, los participantes necesitarán una serie de jugadas más larga para ver el comportamiento del experimento. Por ello, mientras parte de los participantes continúen convencidos de que alguna de las estrategias erróneas es correcta, se repetirán varias veces las fases anteriores (serie de 10 jugadas del juego; pregunta a los participantes sobre las estrategias utilizadas; petición de argumentar por qué se prefiere una estrategia u otra y debate de soluciones.

Si no hay acuerdo pasado un tiempo razonable (30-40 jugadas), los participantes serán animados a realizar una demostración matemática de sus estrategias. Se organiza de nuevo un debate para analizar si las demostraciones propuestas con correctas desde el punto de vista matemático y revelar los razonamientos erróneos. También servirá para reflexionar sobre los conceptos de experimento dependiente y probabilidad condicional, así como sobre el papel de la resolución de problemas en la construcción del conocimiento matemático. En esta fase se espera que los profesores aumenten su conocimiento sobre el contenido y la enseñanza y el conocimiento del contenido y los estudiantes.

## 3. Resultados

### *3.1 Estrategias iniciales y finales*

Recogidos los protocolos escritos, completados por los profesores a lo largo del taller, se realizó un análisis cualitativo de su contenido. La estrategia considerada correcta al finalizar la primera serie de diez jugadas en el juego (estrategia inicial) se muestra en la tabla 3 y la considerada correcta finalmente en la tabla 4. Al igual que los resultados descritos por Batanero, Godino y Roa (2004), en nuestro estudio menos de la mitad de los docentes eligió la estrategia correcta en el comienzo del juego. Esto sugiere la existencia de concepciones incorrectas, aun cuando la mayoría de los participantes tenían un título de licenciado en matemáticas, estadística o ciencias.

Tabla 3. Frecuencia (y porcentaje) de estrategia inicial según país

| | País | | | |
|---|---|---|---|---|
| Estrategia inicial | España (n=98) | Portugal (n=27) | México (n=41) | Total (n=166) |
| E1. Apostar al color de la cara mostrada(correcta) | 33 (33,7) | 5 (18,5) | 3 (7,3) | 41 (24,7) |
| E2. Predecir el color contrario del que se muestra | 8 (8,2) | 3 (11,1) | 2 (4,9) | 13 (7,8) |
| E3. Considerar que no hay estrategia (aleatoriedad) | 38 (38,7) | 14 (51,9) | 27 (65,8) | 79 (47,7) |
| E4. Elección de un mismo color en todos los ensayos | 3 (3,1) | 1(3,7) | 1 (2,4) | 5(3,0) |
| E5. Alternar colores | 4 (4,1) | 3 (11,1) | 0 (0) | 7 (4,2) |
| E6. Usar los resultados anteriores para la predicción | 7 (7,1) | 1 (3,7) | 4 (9,8) | 12 (7,2) |
| E7. Cambiar las estrategias a lo largo de la secuencia de ensayos | 4 (4,1) | 0 (0) | 4 (9,8) | 8 (4,8) |
| E8. Propiedades no físicas de las tarjetas | 1(1,0) | 0(0) | 0 (0) | 1(0,6) |

También aparecen una variedad de estrategias de partida, por lo que se logró el objetivo de crear una situación problemática que sirvió a los profesores a enfrentarse a sus diferentes soluciones y a reflexionar sobre las intuiciones erróneas en probabilidad. Algunos participantes no perciben la independencia de los ensayos, ya que utilizan los resultados anteriores antes de predecir el color. Las estrategias fueron muy similares en los distintos entornos (México, Portugal y España), aunque con diferentes porcentajes y similares a las descritas por Batanero et al., a pesar de que el grupo contenia profesores con experiencia docente (educación secundaria o universidad). El mayor porcentaje de estrategias correctas en el grupo español se debe a la presencia en este grupo de una proporción importante de licenciados en estadística. Esta mayor proporción se refleja también en los resultados finales.

Tabla 4. Resumen de estrategias iniciales y finales por país

| | *España* | | *Portugal* | | *México* | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Estrategia* | *Inicial* | *Final* | *Inicial* | *Final* | *Inicial* | *Final* |
| Correcta | 32 (32,6) | 71 (72,4) | 5 (18,5) | 17 (63) | 3 (7,3) | 23 (56,1) |
| Incorrecta | 66(67,4) | 27 (27,6) | 22 (81,5) | 10 (37) | 38 (92,7) | 18 (43,9) |
| | 98 | 98 | 27 | 27 | 41 | 41 |

En la tabla 4 se resumen las estrategias iniciales con las consideradas correctas después de tres repeticiones de la serie de 10 jugadas (30 experimentos), seguida cada una de debate en cada país. Hubo diferencias iniciales en la proporción de estrategias correctas/incorrectas entre países, que se hicieron más pequeñas en las estrategias finales. Puesto que los profesores fueron invitados a escribir y justificar sus soluciones como parte del taller, hubo un tiempo de reflexión, y, como consecuencia del debate, en la etapa final, la mayoría de los profesores ha cambiado a la estrategia correcta. Observamos globalmente un aumento muy importante de las respuestas correctas, que se duplican respecto a la situación inicial. Puesto que la situación inicial era diferente en los tres países, la diferencia se conserva en la estrategia final. El porcentaje de aumento es similar en todas las muestras alrededor del 40% de profesores pasan de una estrategia incorrecta a otra correcta. Por consiguiente, los datos sugieren un cambio positivo en general en las concepciones de los docentes acerca de los conceptos involucrados en la actividad.

En la tabla 5 se presentan los datos por tipo de profesor. Observamos también poca diferencia entre los profesores en formación y ejercicio, inicialmente (Chi-cuadrado= 1.16, 1 g.l. p= 0,28) con menos del 30 % de estrategias correctas en los dos grupos y finalmente (Chi-cuadrado= 0,27, 1 g.l p= 0,60) con porcentajes de estrategias correctas superiores al 60%. Concluimos la similitud de intuiciones incorrectas en los dos colectivos y la utilidad para ambos de la actividad formativa propuesta.

Tabla 5. Frecuencia (y porcentaje) de estrategias iniciales y finales según situación profesional

| | *En formación* | | *En ejercicio* | |
|---|---|---|---|---|
| *Estrategia* | *Inicial* | *Final* | *Inicial* | *Final* |
| Correcta | 23 (29,1) | 53 (67,1) | 19 (21,8) | 55 (63,2) |
| Incorrecta | 56 (70,9) | 26 (32,9) | 68 (78,2) | 32 (36,8) |
| Total | 79 | 79 | 87 | 87 |

La actividad también sirvió para hacer que los maestros sean conscientes de sus propios errores en probabilidad y prepararlos para evaluar más adelante estos conceptos erróneos en sus propios estudiantes. Otra observación es que, al final de la actividad, cerca de un tercio de los participantes estaban convencidos de que su propia estrategia (incorrecta) era mejor que el de sus compañeros. Probablemente habría sido necesario más tiempo con algunos profesores para que ellos superasen sus concepciones erróneas iniciales.

### *3.2 Capacidad de argumentación*

En la tablas 6 y 7 presentamos las demostraciones realizadas por los participantes de sus estrategias. Observamos que únicamente el 36% fue capaz de dar una demostración deductiva correcta y parte de ellos la llevaron a cabo únicamente en forma verbal o utilizando un diagrama en árbol, sin utilizar una notación matemática completa. Un 18% de profesores compararon las diferentes estrategias propuestas con los datos empíricos obtenidos en el experimento y, ya que la estrategia correcta proporcionaba una clara ventaja en el juego, consideraron que esta comparación empírica era una “prueba” suficiente. Consideramos esta estrategia sólo como parcialmente correcta, pues el carácter aleatorio del experimento requeriría del uso de un contraste de hipótesis, para comparar los datos observados con los resultados esperados teóricamente, para considerar la prueba como aceptable. Tres de los profesores realizaron este tipo de “prueba”, utilizando el contraste Chi-cuadrado para comparar sus datos con el valor esperado (2/3 de aciertos) en la estrategia correcta. En este caso consideramos la prueba correcta al involucrar un contraste de hipótesis.

Tabla 6. Tipo de demostración de la estrategia considerada correcta

| | Justificación | Frecuencia | % |
|---|---|---|---|
| Correcta | Deductiva, utilizando simbolización matemática | 31 | 18,7 |
| | Deductiva, mediante diagrama o verbalmente | 26 | 15,7 |
| | Empírica con contraste de hipótesis | 3 | 1,8 |
| Parcialmente correcta | Empírica | 30 | 18,1 |
| Incorrecta | Confunde experimento simple y compuesto | 12 | 7,2 |
| | Demostración deductiva incorrecta | 4 | 2,4 |
| | Demostración incorrecta al no percibir la dependencia | 21 | 12,6 |
| | No completa o no demuestra | 39 | 23,5 |
| | Total | 166 | 100 |

Otro 22,3% de profesores presentan una demostración matemáticamente incorrecta, por diversos motivos, sobre todo, por no percibir la dependencia de los experimentos aleatorios que subyacen en este juego y seguir en la fase final apostando por una estrategia incorrecta, que es la que tratan de demostrar. Hacemos también notar que otro 23,5% de los profesores no finalizar su demostración o ni siquiera la inicia; en este grupo se incluyen aquellos que en la fase final todavía piensan que no hay una estrategia posible, por lo que no intentan la demostración.

Tabla 7. Frecuencia (y porcentaje) de tipos de demostración por país

| | *España* | *Portugal* | *México* |
|---|---|---|---|
| Correcta | 47(48,0) | 4(14,3) | 19(47,5) |
| P. correcta | 15(15,3) | 9(32,1) | 6(15) |
| Incorrecta | 17(17,3) | 12(42,9) | 8(20) |
| No completa | 19(19,4) | 3(10,7) | 7(17,5) |
| Total | 98 | 28 | 40 |

Tabla 8. Frecuencia (y porcentaje) de tipos de demostración por situación

| | Ejercicio | Formación |
|---|---|---|
| Correcta | 33(37,9) | 37(46,8) |
| P. correcta | 15(17,3) | 15(19,0) |
| Incorrecta | 16(18,4) | 21(26,6) |
| No completa | 23(26,4) | 6(7,6) |
| Total | 87 | 79 |

Observamos algunas diferencias por país y por situación profesional en las justificaciones (Tablas 7 y 8). Respecto a país (Chi-cuadrado = 17,32; 6 g.l.; p= 0,0082) hubo una mayor proporción de demostraciones empíricas e incorrectas comparativamente en Portugal. En cuanto a situación profesional (Chi-cuadrado =10,51; 3 g.l., p=0,0147), paradójicamente, hubo mayor proporción de estrategias correctas y parcialmente correctas en los profesores en formación, quienes dejan la respuesta en blanco en menos ocasiones, pero también tienen más demostraciones incorrectas.

Asumimos que el contrato didáctico para estos profesores quienes estaban cursando una asignatura optativa cuando se les pasó el cuestionario, les lleva a completar la solución, incluso cuando no estén seguros de ella, mientras los profesores en ejercicio prefirieron en estos casos no responder. Al encontrarse en el último curso de la licenciatura de matemáticas o estadística igualmente los profesores en formación tienen más reciente el estudio de la probabilidad, lo que ha influido en la mejor respuesta.

## 4. Discusión

Los resultados mostrados señalan la necesidad de mejorar el conocimiento del contenido probabilístico en los profesores, incluso de los profesores en ejercicio, quienes, en una proporción considerable mostraron intuiciones incorrectas al comienzo de la actividad y no fueron capaces de dar una demostración completa de la estrategia, una vez identificada al final del juego. Pensamos que ello se debe a que la preparación matemática de los profesores en su formación inicial se centra en el conocimiento común del contenido, y sería necesario complementarlo con un conocimiento especializado del contenido, que incluye información sobre los sesgos en el razonamiento probabilístico. Los profesores requieren también un conocimiento didáctico del contenido, incluyendo aspectos como metodología de enseñanza y representaciones instruccionales, tales como tipos de demostración matemática asequible a los estudiantes.

Para proporcionar a los participantes en el taller estos conocimientos, la actividad se complementó en la segunda sesión del taller con el análisis didáctico sobre el conocimiento matemático que necesitan los estudiantes para resolver el problema, los errores potenciales de los estudiantes y las fases didácticas del taller. La actividad también ayudó a aumentar algunas componentes de los conocimientos profesionales:

- Componente epistémica: Al hacer reflexionar al futuro profesor sobre los diversos significados históricos de la probabilidad (subjetiva, frecuentista y clásica) y las controversias ligadas a su definición en diferentes momentos históricos;
- Componente cognitiva: pues adquieren conocimientos sobre la dificultades de los estudiantes con los conceptos de probabilidad condicional e independencia y

sobre posibles razonamientos y estrategias correctas e incorrectas para resolver el problema;

- Componente afectiva: experimentando nuevos métodos de enseñanza, basados en el juego, experimentación y debate, que permite aumentar el interés de los alumnos y su participación en la actividad;
- Componente interaccional: aumentando su experiencia sobre la forma de organizar el discurso y el tiempo didáctico y de hacer aflorar y resolver los conflictos cognitivos de los estudiantes;
- Componente ecológica: pues la actividad se puede conectar con el estudio de las concepciones erróneas sobre el azar (psicología) y con los problemas sociales relacionados con la adicción a los juegos de azar (sociología).

## Implicaciones para la formación de profesores

Los profesores necesitan apoyo y formación adecuada para tener éxito en el logro de un equilibrio adecuado de la intuición y el rigor en la enseñanza de la probabilidad. Lamentablemente, no todos los profesores reciben una buena preparación para enseñar a la probabilidad en su formación inicial (SERRADÓ, AZCÁRATE Y CARDEÑOSO, 2006). Es necesario el apoyo de departamentos y grupos de investigación para ofertar a los profesores actividades formativas.

Como indican Ponte y Chapman (2006), debemos considerar los profesores como profesionales, y formar a los docentes en la práctica profesional, haciendo que los elementos de la práctica (tareas y materiales, realización de clases, observación y reflexión sobre la experiencia) sean el elemento central del proceso de formación del profesorado. Actividades como la analizada pueden servir al mismo tiempo para aumentar los conocimientos de probabilidad en los docentes y sus conocimientos didácticos, pues pueden posteriormente ser utilizadas por los profesores con sus estudiantes.

Es, sin embargo, necesario seguir investigando sobre los componentes esenciales en la preparación de los profesores para enseñar la probabilidad y el método adecuado en el que cada componente debe ser enseñado. De este modo se completaría el notable esfuerzo de investigación centrado en la educación matemática y en el desarrollo profesional docente en la última década (por ejemplo, Ponte y Chapman, 2006; Hill, Sleep, Lewis & Ball, 2007; Wood, 2008), que, sin embargo, no ha tenido en cuenta la enseñanza de la probabilidad.

*Agradecimientos:* Trabajo apoyado por los proyectos SEJ2007-00789/EDUC (MEC-FEDER) y EDU2010-14947 (MCIN), beca FPI BES-2008-003573 (MEC-FEDRE) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

## Referencias

Azcárate, P. La investigación matemática. Cuestiones sobre los procesos de formación de los profesores. *Relieve, 3* (2). 1997.

Ball, D. L. Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*, 241-247. 2000.

Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education Volume 12, 1.* 2004. On line: www.amstat.org/publications/jse/.

Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. The nature of chance and probability. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). New York: Springer. 2005.

Bennet, D. J. *Randomness.* New York: Cambridge University Press. 1998.

Falk, R. y Konold, C. The psychology of learning probability. En F. Gordon y S. Gordon (eds.), *Statistics for the twuenty-first century, MAA Notes 26* (pp. 151-164). Washington, DC: Mathematical Association of America. 1992.

Franklin, C. y Mewborn, D. The statistical education of PreK-12 teachers: A shared responsibility. En G. Burrill (Ed.), *NCTM 2006 yearbook: Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 335-344). Reston, VA: NCTM. 2006.

Gal, I. Democratic access to probability: Issues of probability literacy. En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-64). Nueva York: Springer. 2005.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R. y Wilhelmi, M. R.. Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey: ICMI and IASE. 2008.On line: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publicatons.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400. 2008.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M. y Ball, D. Assessing teachers' mathematical knowledge. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching* *and learning* (pp. 111-155). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc. y NCTM. 2007.

Jaworski, B. Theory and practice in mathematics teaching development: Critical Inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 9, 187-211. 2006.

Konold, C. Teaching probability through modeling real problems. *The Mathematics Teacher, 87*(4), 232-235. 1994.

Lesser, L. Countering indifference – Using counterintuitive examples. *Teaching Statistics*, *20*(1), 10-12. 1998.

Ma, L. P. *Knowing and teaching elementary mathematics.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum. 1999.

MEC. *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria.* 2006a.

MEC. *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.* 2006b.

Ponte, J. P. Investigating in mathematics and in learning to teach mathematics. In T. J. Cooney & F. L. Lin (Eds.*), Making sense of mathematics teacher education* (pp. 53-72). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 2001.

Ponte, J. P.y Chapman, O. Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education*: *Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense Publishers. 2006.

Serradó, A., Azcárate, P. y Cardeñoso, J. M Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. [CD-ROM]. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute. 2006.

Shulman, L. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15* (2), 4-14. 1986.

Stohl, H. Probability in teacher education and development. En G. Jones (Ed.). *Exploring probability in schools: Challenges for teaching and learning* (345-366). New York: Springer. 2005.

Székely, G. J. *Paradoxes in probability theory and in mathematical statistics.* Dordrech: Reidel. 1986.

Wood, T. *The international handbook of mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers. 2008.