ISSN 1983-3156
A2
http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i2p211-235

A geometria do táxi: uma proposta da geometria não euclidiana na educação básica

The táxicab geometry: a proposal non-euclidean geometry in basic education

NATHAN LASCOSKI GUSMÃO[1]
FERNANDO YUDI SAKAGUTI[2]
LICEIA ALVES PIRES[3]

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta de inserção da geometria não-euclidiana na educação básica, em especial nas aulas de matemática no ensino fundamental e médio. Para o estudo, foi escolhida a geometria do táxi, por ser de fácil compreensão e por possibilitar a ligação com outros conteúdos da educação básica, como por exemplo, o modelo de geografia urbana está diretamente relacionada ao cotidiano dos alunos. Como sugestões para a construção deste conceito foram elaboradas cinco atividades que levaram os alunos a explorar esta geometria, evidenciando as diferenças existentes entre a geometria euclidiana e a geometria do táxi, considerada não-euclidiana, por apresentar uma métrica diferenciada. Na última atividade, foi proposto um problema em que os alunos deveriam aplicar o conceito de circunferência do ponto de vista das duas geometrias para resolvê-lo. Apesar de ser algo novo para os alunos, pôde-se perceber um grande interesse, por fazer relação com seu cotidiano, além de ter um resultado satisfatório no que diz respeito ao resgate de conceitos da geometria euclidiana.

Palavras-chave: *Geometria não-euclidiana; Geometria do táxi; Educação básica.*

Abstract

This paper presents a proposal for the insertion of non-Euclidean geometry in basic education, especially in mathematics classes in primary and secondary education. For the study, the taxicab geometry was chosen because it is easy to understand and because it allows the connection with other contents of basic education, for example, the model of urban geography is directly related to the students' daily life. As suggestions for the construction of this concept were elaborated five activities that led the students to explore this geometry, evidencing the differences between the Euclidean geometry and the taxicab geometry, considered non-Euclidean, to present a differentiated metric. In the last activity, a problem was proposed in which the students should apply the concept of circumference from the point of view of the two geometries to solve it. In spite of being something new for the students, it was possible to

[1] Graduado em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR - Campus Paranaguá) – nathan.gusmao@hotmail.com
[2] Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia, Professor do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da UNESPAR Campus Paranaguá – fernando.sakaguti@unespar.edu.br
[3] Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação da PUC-PR. Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia, Professora do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da UNESPAR Campus Paranaguá – liceia.pires@unespar.edu.br

perceive a great interest, to make relation with their daily life, besides having a satisfactory result with respect to the rescue of concepts of Euclidean geometry.

Keywords: *Non-Euclidean geometry; Taxicab geometry; Basic education.*

Introdução

No processo de ensino e de aprendizagem da matemática muitos questionamentos estão presentes no dia a dia do professor, seja com relação à metodologia, conceitos, estratégias, recurso didáticos e até mesmos com relação aos conteúdos a serem trabalhados.

Com relação a conteúdos, alguns que se destacam nos questionamentos, se referem à geometria, pois muitos alunos não gostam do conteúdo ou não veem aplicação.

Uma forma de iniciar os estudos da geometria não-euclidiana é a geometria do táxi que se adapta às propostas pelas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná - DCE (2008), que pode ser facilmente trabalhada nas aulas de matemática na educação básica, no Ensino Médio.

A geometria do táxi, considerada uma geometria não-euclidiana, vem com um novo conceito de geometria, de fácil entendimento e que responde um velho questionamento dos estudantes referente à aplicabilidade em seu cotidiano.

Assim pode-se fazer uma abordagem sobre o estudo da geometria do táxi como um saber científico, relacionando os estudos desta nova geometria com seu cotidiano, estudando sua métrica e a circunferência, para comparar suas formas e reforçar as suas propriedades.

A geometria não euclidiana

Da geometria dedutiva do povo egípcio, para a geometria empírica dos babilônios e a axiomática do povo grego, Os Elementos de Euclides reúnem todos esses conhecimentos no que hoje conhece-se por geometria euclidiana.

Durante muitos anos essa era a ciência estudada e ensinada. Para poucos existia uma imprecisão nos conhecimentos de Euclides, mas não contraria a sua filosófica, e sim a posição de um de seus postulados.

No sistema axiomático de Euclides, separando axiomas de postulados, o quinto postulado não foi muito bem aceito na sociedade matemática. Não foi uma oposição à sua ideia, mas sim a sua posição como postulado. Segundo Brito e Moraes:

> Certamente ninguém duvidaria do teor de verdade dessa afirmação. Contudo, as críticas a Euclides deveriam do fato de ele ter qualificado essa afirmação como se o teor dela fosse facilmente subsumido e, além disso, usá-la somente na demonstração do teorema 29. Talvez, por isso, não poucos, ao longo da história, tentaram deduzi-lo como um teorema a partir dos demais postulados. (BRITO e MORAES 1998, p. 107)

Durante anos a prova deste quinto postulado foi intensa, muitos matemáticos e filósofos tentaram, mas foram equivocados ao utilizar em suas provas um resultado equivalente ao quinto postulado. Foi aí que surgiram os postulados “substitutos” deste quinto postulado, sendo o mais famoso e o mais aceito até hoje o Postulado das Paralelas, proposto por John Playfair em 1795.

A partir do século XIX, três pessoas mudaram a história da geometria. Para Boyer (1974, p. 396) “(...) um assombroso exemplo de simultaneidade de descoberta, pois noções semelhantes ocorreram, durante o primeiro terço do século dezenove, a três homens, um alemão, um húngaro, e um russo. ”

Na Rússia Nicolai Ivanovich Lobachevsky, desde 1820 estava convencido da possibilidade de existir uma geometria sem a necessidade do quinto postulado, mas foi em 1829 em um desconhecido jornal russo, o Mensageiro de Kazan, que Lobachevsky publicou seu artigo intitulado *On The Principles Of Geometry*(Os Princípios da Geometria), que marca oficialmente o início da geometria não euclidiana. (BOYER 1974, p.397).

Intitulado por “Geometria Imaginaria” pelo próprio Lobachevsky, hoje conhecida por geometria hiperbólica, teve pouca influência na comunidade matemática pelo fato de estar escrito em russo.

Em seu trabalho Lobachevsky “sugeriu uma nova geometria na qual mais de uma reta paralela a uma reta dada podiam ser traçadas por um ponto e onde a soma dos ângulos de um triângulo seria menor que dois ângulos retos” (BARBOSA 2008, p. 51).

Lobachevsky parecia conhecer bem o significado de suas descobertas, pois segundo Boyer (1974, p. 397) “(...) nos vinte anos seguintes escreveu três exposições completas da nova geometria.” Em 1838 publicou seu livro Novos Fundamentos da Geometria, 1840 publicou Investigações Geométricas Sobre A Teoria Das Paralelas, e em 1855 seu último livro Pangeometria.

Longe dos grandes centros europeus está Janos Bolyai, um jovem oficial húngaro do exército austríaco, filho de Farkas Bolyai, um amigo de Gauss. Ao saber dos estudos de seu filho sobre as paralelas, estudo o qual ele mesmo passaria sua vida estudando, escreve dizendo: “Pelo amor de Deus, eu lhe peço, desista! Tema tanto isso quanto as paixões sensuais porque isto também pode tomar todo seu tempo, e privá-lo de sua saúde, paz de espírito e felicidade na vida.” (BOYER 1974, p. 387).

Acredita-se que outro estudioso da área, que já vinha pesquisando sobre o tema desde 1792, era Carl Friedrich Gauss. Porém publicou muito pouco sobre esta nova geometria, conhecida na época por geometria anti-euclidiana. Cartas enviadas a amigos matemáticos era registro desses estudos. (BONOLA 1955, p. 65). Para Mlodinow sua ideia sobre Gauss era:

> Gauss foi um cronista meticuloso das coisas à sua volta. Tinha o prazer de colecionar dados bizarros, tais como a duração da vida de seus amigos mortos, ou o número de passos desde o laboratório onde trabalhava até vários lugares que gostava de visitar. Ele também fazia registros de seu trabalho. Após a sua morte, especialistas estudaram com atenção suas anotações e correspondências. Lá, descobriram a sua pesquisa sobre o espaço não euclidiano, bem como os trabalhos de Bolyai e Lobachevsky. (MLODINOW 2008, p.125).

Gauss temia a não aceitação do trabalho sobre essa nova geometria, o que fica claro em uma de suas cartas a um amigo matemático Friedrich Wilhelm Bessel, em 1829, Gauss dizia que temia os gritos dos Beócios, caso publicasse seus estudos sobre a nova geometria.

Durante um curto período de tempo, três matemáticos mudaram uma visão que era aceita como a única verdade, a geometria de Euclides. Mas esta geometria imaginária absoluta ou hiperbólica não foi muito reverenciada durante um tempo.

Em 1866 outro matemático entrou na discussão G. F. Bernhard Reimann, filho de um pastor, sugeriu uma nova geometria mais ligada à teoria das superfícies, um pouco diferente da sistemática de Lobachevsky e Bolyai.

Em seu trabalho Reimann propôs a seguinte afirmação "duas retas nunca são paralelas e a soma dos ângulos de um triângulo é maior que de dois ângulos retos" (EVES 1992, p. 47) Para Boyer:

> Suas geometrias eram não-euclidianas num sentido muito mais geral do que a de Lobachevsky em que a questão é simplesmente a de quantas retas paralelas são possíveis por um ponto. Reimann viu que a geometria nem sequer deveria necessariamente tratar de pontos ou retas ou do espaço no sentido ordinário, mas de coleções de n-uplas que são combinadas segundo certas regras. (BOYER 1974, p. 398)

Ao mostrar a sua nova geometria cuja soma dos ângulos internos de um triângulo é maior que dois ângulos retos sobre a superfície de uma esfera, Reimann prova a consistência dos axiomas a qual a geometria deriva.

Um pouco após a grandiosa descoberta de Reimann, um professor Eugênio Beltrami construiu um modelo para a geometria de Lobachevsky. Comenta Boyer:

> Essa é a superfície gerada pela revolução de uma tratriz em torno de uma assíntota, superfície denominada pseudo-esfera por ter curvatura negativa constante, assim como a esfera tem curvatura positiva constante. Se definimos a "reta" entre dois pontos da pseudo-esfera como a geodésica por esses pontos, a geometria resultante terá as propriedades que resultam dos postulados de Lobachevsky. (BOYER 1974, p. 399)

Em um de seus teoremas Beltrami propôs o seguinte: Se a geometria euclidiana for consistente, então a geometria hiperbólica também será logo a consistência da geometria é relativa à outra, não havendo necessidade de verificar a consistência da geometria euclidiana.

Nos princípios de 1900 surgem os novos modelos da geometria hiperbólica, como os discos de Poincaré, inventado pelo francês Henri Poincaré. Prova-se, porém que este é isométrico ao plano hiperbólico de Lobachevsky.

Para muitos historiadores o final do século dezoito e o início do século dezenove foi o ápice da atual geometria não euclidiana, muitos nomes respeitados na sociedade matemática contribuíram para a ascensão deste novo ramo da geometria. Para Eves:

> O desenvolvimento das geometrias não euclidianas deve um significado especial ao mostrar por que falharam as tentativas de provar o postulado das paralelas de Euclides. O desenvolvimento bem sucedido de uma geometria consiste usando os quatro primeiros postulados, mas substituindo o quinto por outro incompatível com ele prova que o quinto postulado e de fato independente dos demais, assim não poderia ser provado. Essa realização contribui para que se fizesse um exame mais cuidadoso dos fundamentos da matemática. (EVES 1992, p.47)

Mais de 2000 anos, desde os tempos de Euclides com seus Elementos, até dois jovens matemáticos Bolyai e Lobachevsky, foi o tempo que a ciência da geometria precisou para que sua matemática consolidasse as ideias e considerações em torno do quinto postulado, e abrisse o caminho para esta nova geometria, a geometria não-euclidiana. Conclui, então, Lobachevsky: “Não há ramo da matemática, por mais abstrato que seja que não possa um dia ser aplicado aos fenômenos do mundo real.” (LOBACHEVSKY apud BOYER 1974, p. 386)

A geometria do táxi

Com os estudos de Bolyai e Lobachevsky no final do século XVIII, a geometria não-euclidiana se destaca na busca pelas novas ciências. Segundo Braz (2009, p. 31) “A nova geometria rompe a fronteira da matemática e Albert Einstein utiliza o espaço curvo na Teoria da Relatividade, que diz que a presença de matéria pode ‘encurvar’ o espaço e modificar o tempo, provando que a nova geometria tinha aplicação prática”.

Em meados do século XIX surge então uma geometria diferente, a geometria do táxi, considerada por alguns como não-euclidiana na época, mas que não tinha relação com o postulado de Euclides. Uma geometria simples e de fácil compreensão, uma geometria do dia-a-dia da sociedade.

A geometria do táxista teve início na topologia com os estudos do russo Hermann Minkowski (1864-1909), o qual foi um dos professores de Einstein. Os estudos de Minkowski sobre um conjunto de métricas diferentes foi o precursor dos estudos de uma geometria diferenciada.

O termo geometria do táxi surgiu pela primeira vez em 1952 quando Karl Menger apresentou seu livreto com o título "*You will like geometry*" no *Museum of Science and Industry of Chicago.*

Em 1975 Eugene F. Krause em seu livro *"Táxicab Geometry: An adventure in non-euclidean geometry"* apresentou a gemetria do táxi sob dois pontos de vista. Primeiro, dentro de uma perspectiva educacional, como um instrumental didático, destinado a despertar o interesse daqueles que se iniciam nos estudos de geometria. Segundo, como uma geometria de importantes aplicações práticas.

Em 1978 serviu como tese de doutorado na Universidade de Michigan, em Ann Arbor, onde J. Shun C. Lau estudou as propriedades básicas desta geometria e realizou aplicações, definindo áreas de influência econômica e estudando caminhos urbanos preferidos pela população da cidade de Ann Arbor, cuja malha é retangular.

Com o passar dos anos a geometria do táxi se difundiu no meio acadêmico, foi criticada e apreciada por diversos estudiosos. Para Kaleff e Nascimento:

> A Geometria do Táxi pode ser apresentada, com a intenção de se integrar a Matemática ao cotidiano do aluno, pois está se apresenta em todos os lugares, não podendo, portanto, deixar de ser encontrada no espaço das "ruas". Desta forma, confrontado com esta nova Geometria, o aluno pode ser levado a perceber que existem outras Geometrias além da Euclidiana, possibilitando que tenha despertada a sua curiosidade para novos ambientes matemáticos. (KALEFF e NASCIMENTO 2004, p. 13)

É de fácil entendimento, tem estrutura semelhante e paralela à da geometria euclidiana, mesmo negando que a menor distância entre dois pontos é uma linha reta.

Por mais que na época de sua descoberta a geometria do táxi não foi considerada uma geometria não-euclidiana, ela é vista atualmente como uma, pois nega a métrica de Euclides.

No entanto, por possuir propriedades semelhantes à geometria euclidiana, como por exemplo, a utilização da mesma definição de ponto e reta é também considerada como euclidiana, outro exemplo que é a distância na geometria do táxi é sempre não-negativa e só é zero se os pontos coincidirem. É também simétrica e ainda satisfaz a desigualdade triangular.

Matematicamente a métrica euclidiana assim como a métrica do Táxi segue as seguintes definições: uma métrica num conjunto M é uma função D: $M \ x \ M \rightarrow R$, conjunto dos reais, que associa cada par ordenado dos elementos $x, y \in M$ é um número real $d(x, y)$, chamado a distância de x a y, de modo que sejam satisfeitas às seguintes condições para quaisquer $x, y, z \in M$:

$$d(x, x) = 0 \tag{1}$$

$$\text{Se } x \neq y \text{ então } d(x,y) > 0 \quad (2)$$

$$d(x,y) = d(y,x) \quad (3)$$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad (4)$$

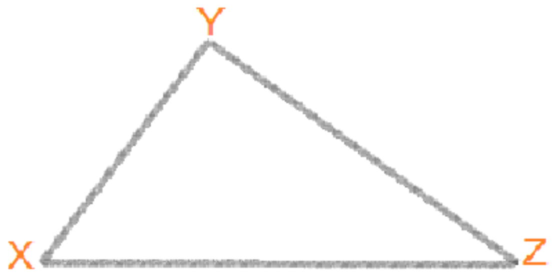
Ao observar as definições acima nota-se que:

1º- As definições (1) *e* (2) *dizem que a* $d(x,y) = 0$ *somente se os pontos forem simétricos, ou seja,* $x = y$ *.*

2º- A definição (3) *afirma que a distância* $d(x,y)$ *é uma função simétrica das variáveis* x *e* y. *Assim uma função* M *em* M, *denotada por* $d: M \rightarrow M$ *é uma terna* (d, M, M)*onde* d *é uma relação de* M *em* M *e que será simétrica se* $\forall\, x, y, z \in M$ *se* $(x,y) \in d \rightarrow (y,x) \in d$ *, ou seja,* $x\, d\, y = y\, d\, x$*.*

3º- A definição (4), a desigualdade triangular, tem origem no fato de que, no plano euclidiano, o comprimento de um dos lados de um triângulo não excede a soma dos outros dois. Porém, é possível visualizar geometricamente a desigualdade no plano euclidiano:

Figura 1 - Desigualdade do triângulo no plano



Fonte: Autor (2016)

Para a geometria, desigualdade triangular significa que a soma de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o terceiro lado.

Se observarmos a Figura 1 podemos visualizar esta desigualdade triangular. Se forem formadas a distância entre o ponto x até o ponto z, entre x e y,é menor que a somadas distâncias entre o segmento xy e o segmento yz.

$$d(x,z) < d\,(x,y) + d(y,z) \quad (5)$$

No entanto nos mostra que a distância entre o ponto x até y e de y até z será mínima quando o ponto y pertencer ao segmento xz.

$$d(x,z) = d(x,y) + d(y,z) \quad (6)$$

A métrica chamada Euclidiana, provém da fórmula da distância entre dois pontos, no plano cartesiano, provada no teorema de Pitágoras.

Logo para $d: R^n X\, R^n \rightarrow R$ tem:

$$d_E(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{1/2} \forall\, x,y\ \in R \qquad (7)$$

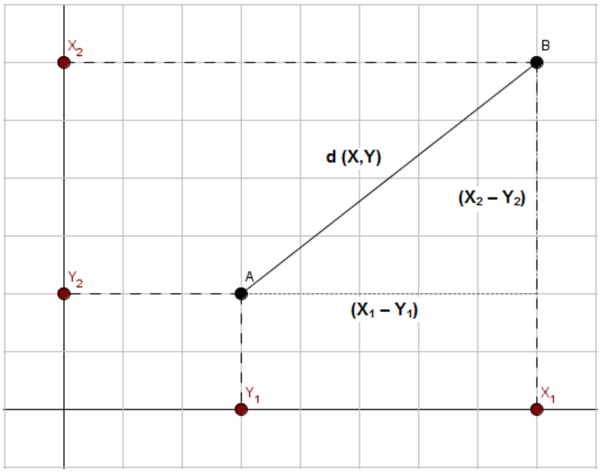
Considerando d_E como a métrica euclidiana deve-se propor uma forma mais simples e de uma manipulação mais fácil, para o caso de $n = 2$, ou seja, R^2 podemos considerar a planta de uma cidade cujas ruas são retas e paralelas aos eixos coordenados $x = 0$ e $y = 0$, então o menor caminho ligando dois pontos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ através das ruas tem:

$$d\ (x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \qquad (8)$$

Nota-se que a função módulo aparece de uma forma natural baseando-se nas definições de métrica citadas acima. Logo, no caso particular do R^2 teria-se a Métrica Euclidiana e a Métrica do Táxi descritas do seguinte modo:

Diferenças entre as métricas euclidiana e do táxi

Figura 2 - Métrica Euclidiana



Fonte: Autor (2016)

Da Figura 2, onde $A = (y_1, y_2)\ e\ B = (x_1, x_2)$ pertencente a R^2 tem-se:

$$d_E(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{1/2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \qquad (9)$$

Da mesma figura 2, tem-se:

$$d_T(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \qquad (10)$$

Na métrica euclidiana a distância entre os pontos (A,B) é dada por um segmento de reta que os une, e é provada pelo teorema de Pitágoras. A métrica do Táxi irá mostra uma nova geometria, utilizando as mesmas relações de ponto, reta, ângulo da geometria euclidiana, mas o conceito de métrica distância se apresenta de uma forma diferenciada. Com isso a geometria do táxi é considerada uma geometria não-euclidiana.

A circunferência

Com o surgimento desta nova geometria, a geometria do táxista foi muito criticada em seu início e muito desta preocupação surgiu com a ideia de circunferência na geometria do táxi, círculos quadrados e quadrados redondos, preocuparam muitos estudiosos, sendo dita como impossível ou absurda na época.

Para a geometria conceitua-se circunferência como sendo o lugar geométrico dos postos que estão a uma mesma distância de um ponto fixo. Desta forma podemos definir:

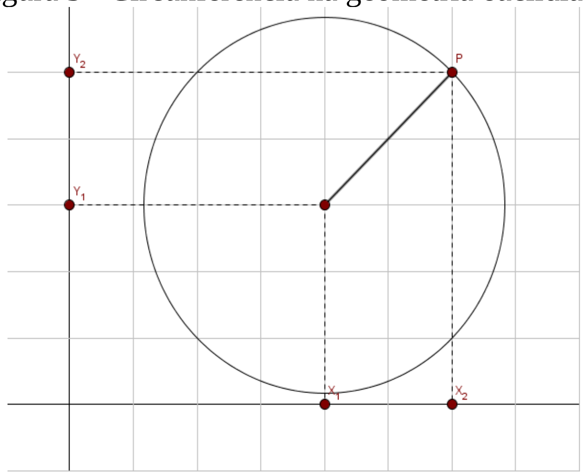
Dados dois pontos $A(x,y)$ e $B(a,b)$ tal que A é um ponto que pertence a circunferência em que B é seu centro, ou seja, $d(A,B) = r$. Logo tem-se:

$$C_E: \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \tag{11}$$

$$C_T: |x-a| + |y-b| = r \tag{12}$$

Onde C_E representa o modelo Euclidiano e C_T representa o modelo do táxi. Graficamente podemos estabelecer a mesma relação:

Figura 3 - Circunferência na geometria euclidiana



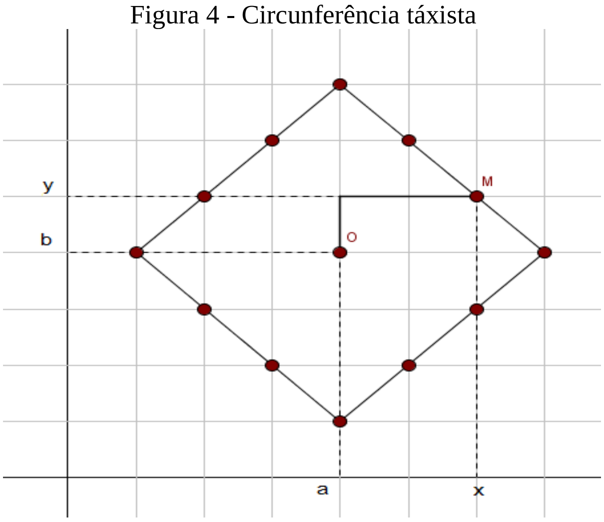
Fonte: Autor (2016)

Da Figura 3, sendo $C = (x_1, y_1)$ o centro da circunferencia e $P = (x,y)$ um ponto qualquer da circunferência, o raio é dado pela distancia entre os pontos $C\ e\ P$. No plano Euclidiano a distância entre dois pontos e dado pelo teorema de Pitágoras:

$$d_{CP} = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = \text{r} \tag{13}$$

Denominado equação da circunferência euclidiana (Equação 13) de centro $C = (x_1, y_1)$ e raio r. Já na Gemetria do Táxi, a definição de circunferência permanece a mesma sendo apenas a métrica diferente. Logo:

Figura 4 - Circunferência táxista



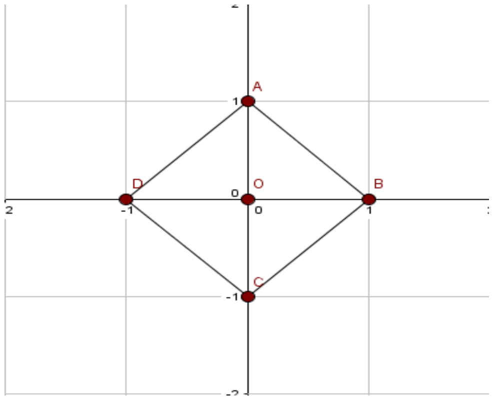
Fonte: Autor (2016)

Da Figura 4, sendo a circunferência de centro $O(a, b)$ e $M(x, y)$ um ponto qualquer da circunferência o raio é obtido através do cálculo da distância na geometria do táxi:

$$d_{OM} = |x - a| + |y - b| = \mathrm{r} \tag{14}$$

Nota-se que na circunferência do Táxi existem várias possibilidades para se encontrar o raio e também o diâmetro da circunferência. Como na geometria Euclidiana o π, a razão entre o perímetro e o diâmetro. Se pegarmos uma circunferência unitária na geometria do táxi vemos que:

Figura 5 - Circunferência unitária



Fonte: Autor (2016)

Na Figura 5, percebe-se que estão destacadas as distâncias entre os pontos $(0;1)\ e\ (1;0), (-1;0)\ e\ (0;1), (0;-1)\ e\ (-1;0)\ e\ (0;-1)\ e\ (1;0)$ que medem 2. Assim, o comprimento da circunferência unitária do táxista é $2+2+2+2\ =\ 8$.

Logo o π na geometria do táxi vai ser:

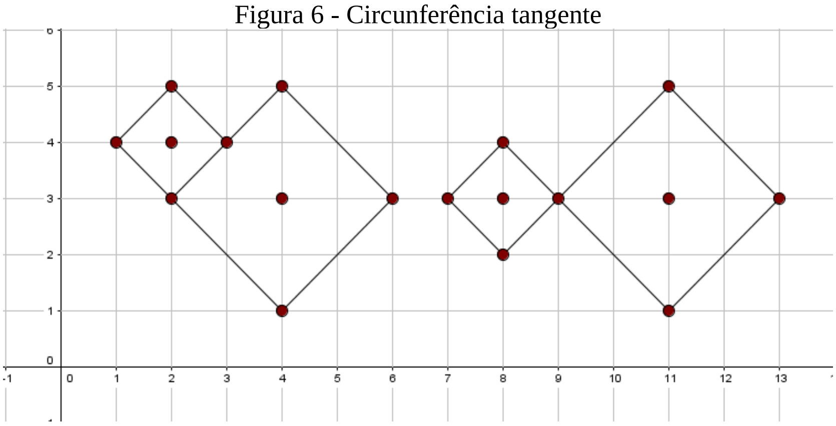
$$\pi = {}^{8}\!/_{2} = 4 \tag{15}$$

Deste modo, se o raio do círculo é r, temos a fórmula geral para a o comprimento da circunferência do Táxista, é notavelmente semelhante à forma Euclidiana do comprimento da circunferência dada por:

$$C = 8r = 2\pi r \text{ , onde } \pi = 4 \tag{16}$$

Existem alguns teoremas da geometria euclidiana que não são satisfeitos pela geometria do táxista, como a de que duas circunferências se interceptam em apenas dois pontos, pois na geometria do táxi as circunferências podem ficar tangentes em um único ponto ou em inúmeros pontos:

Figura 6 - Circunferência tangente



Fonte: autor (2016)

Notam-se algumas diferenças entre a Circunferência do Táxi e a de Euclides, o que era de se esperar, pois dita como uma geometria não-euclidiana, a métrica do Táxi contradiz a métrica euclidiana.

É uma geometria de fácil compreensão, visto que retrata um ambiente vivenciado pela maioria dos estudantes, a geografia urbana, facilitando a aceitação pela disciplina de matemática.

No que diz respeito ao ensino da geometria, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica, apresentam:

> O Conteúdo Estruturante Geometrias, no Ensino Fundamental e Médio, tem o espaço como referência, de modo que o aluno consiga analisá-lo e perceber seus objetos para, então, representá-lo. Neste nível de ensino, o aluno deve compreender (...) as noções de geometrias não euclidianas. (PARANA 2008, p.56)

Ao introduzir o estudo da geometria do táxi na sala de aula, os alunos têm, por meio dele, a oportunidade e a capacidade de investigar tópicos da matemática tradicional por uma nova perspectiva, fazendo conexões dentro da própria Matemática com o mundo a sua volta.

> A geometria do táxi vem ao encontro das necessidades requeridas para as mudanças no ensino da Matemática, pois, permite desenvolver os seus conteúdos relacionando-os o ambiente que cerca o indivíduo, possibilitando o surgimento de condições de um ensino significativo e, provavelmente, mais eficaz. (KALLEF e NASCIMENTO 2004, p. 5).

Por entender que a geometria do táxi é importante de ser inserida nas aulas de matemática, como um exemplo de geometria não-euclidiana de fácil entendimento, é que se elaborou esse trabalho que visa apresentar os alunos do ensino médio uma nova abordagem geométrica para conceitos já conhecidos.

Metodologia e resultados obtidos

O presente trabalho teve como objetivo a introdução das geometrias não-euclidianas, para uma turma do ensino médio com o objetivo de acrescentar um conceito novo e poder relacioná-lo com seu dia a dia. O trabalho está amparado pelas Diretrizes Curriculares da Educação Básica (2008), que visam à inserção das geometrias não-euclidianas no ensino fundamental e médio.

As atividades foram aplicadas no mês de março de 2016, no período da manhã, para a turma do 3º ano do Colégio Estadual Sertãozinho, localizado na Cidade de Matinhos, no Estado do Paraná. A aplicação ocupou duas aulas de 50 minutos cada, cedidas pela professora regente da turma e autorizada pela equipe pedagógica da escola. Na data da aplicação, 37 alunos estavam na sala e foram dispostos em grupos formando um total de 17 equipes. Os alunos foram colocados em equipes, pois segundo SOARES (2017, p.10) “O trabalho em grupo como estratégia didática de ensino apresenta vários pontos positivos por proporcionar a interação entre os alunos e a troca de experiências entre os mesmos, favorecendo, assim, o processo de aprendizagem. ”

A aplicação começou com um breve relato histórico sobre a origem da geometria, a contribuição dos grandes filósofos, principalmente Euclides em sua obra *Os Elementos*. Se alongou um pouco com a origem da geometria euclidiana, mas o objetivo geral desta palestra foi relatar a construção das geometrias não-euclidianas. Em seguida foi explanado de uma forma bastante informal sobre as geometrias e as diferenças entre elas. Teve-se como foco principal a geometria do táxi, a qual é o principal objetivo desta aplicação.

Após esse relato histórico foram entregues aos alunos as atividades propostas, iniciando a parte introdutória da aplicação, atividades estas, que enfatizaram a visão Euclidiana da geometria, a qual é inserida como verdade a eles. Na sequência foram trabalhadas outras atividades com foto na geometria não-euclidiana, em especial na geometria do táxi.

Como as atividades propostas tinham por finalidade criar um novo conceito de geometria. Foram elaboradas de tal forma que possibilitassem aos alunos terem a noção da geometria do táxi, relacionando com o seu cotidiano.

As atividades introdutórias (Atividade 1 e Atividade 2) afirmaram os conceitos Euclidianos, as noções de espaço e distância que estão habituados a estudar para então fazer a comparação com o novo conceito.

As Atividades 3 e Atividade 4 ilustram essa nova comparação entre as diferentes geometrias, fazendo uma comparação e possibilitando também que tenham a noção de aplicabilidade em seu cotidiano.

A Atividade 5 ajuda na visualização da relação existente entre as geometrias e suas formas geométricas, daremos ênfase à circunferência, demonstrando suas principais propriedades e seus formatos.

Por fim, a Atividade 6, tem o objetivo de aplicar os conceitos adquiridos, unindo as diferentes geometrias em um problema do dia a dia dos alunos.

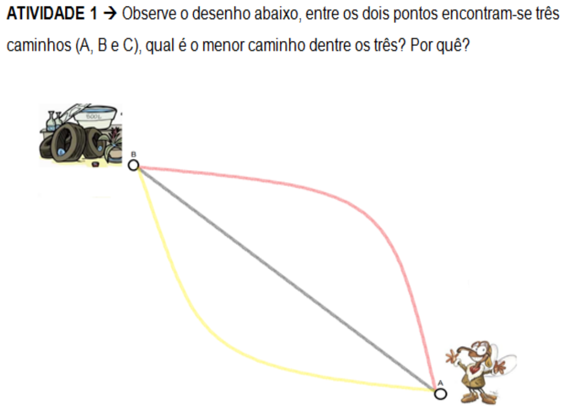
Para o início da aplicação uma pequena palestra foi ministrada com o intuito de explicar, a história das geometrias, com foco na geometria de Euclides e o surgimento das demais. Após esta palestra foram apresentadas as atividades abaixo relacionadas.

Sequência de atividades e as respostas obtidas

Após o trabalho com a história das geometrias e de revisão de alguns conceitos da geometria euclidiana e da introdução em forma de explicações sobre a geometria do táxi, foi passadas a primeira parte das atividades que são compostas pelos exercícios abaixo:

Atividade 1 → O objetivo desta atividade é revisar o conceito euclidiano de distância, a qual a menor distância entre dois pontos é a reta que os une. Para essa atividade foi entregue aos alunos a folha número um, a qual apresentava dois pontos (A e B) e três caminhos que os ligavam, separados por cor. Desta forma, foi perguntado qual o menor caminho entre os desenhos e o porquê de sua resposta (Figura 7).

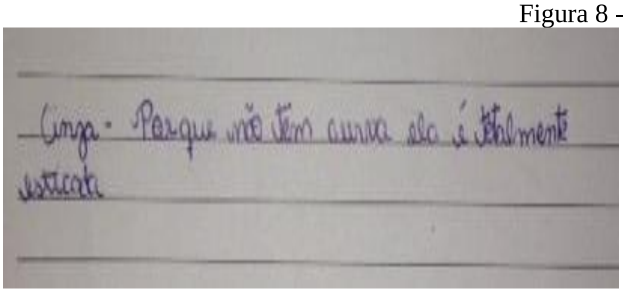
Figura 7 - Folha número 01

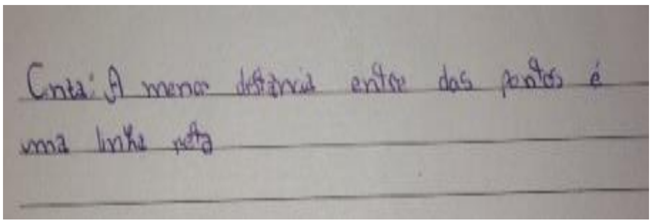


Fonte: Autor (2016)

Reafirmar os conceitos Euclidianos de distância é importante para o decorrer do trabalho, pois, para fazer a comparação entre as geometrias, os alunos deveriam compreender muito bem a visão Euclidiana, a qual está intrínseca como uma verdade. Na Figura 8 são apresentadas duas respostas dadas pelos alunos.

Figura 8 - Resposta da questão 1



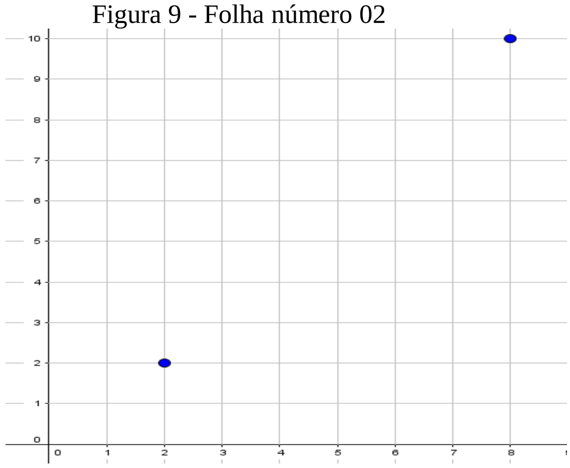


Fonte: resposta dos alunos (2016)

Observou-se que dentre os 17 grupos, todos escolheram o caminho de cor cinza afirmando que a menor distância entre dois pontos é uma linha reta. Pode-se observar uma questão intuitiva dos alunos, o conceito de distância, o qual é trata como "verdade absoluta" na geometria. Este conceito trabalhado ao longo de sua vida escolar aparece em seu cotidiano, e é isso que a atividade procura evidenciar na sua visão do conceito de distância.

Atividade 2 → Esta atividade tem por objetivo o reconhecimento da métrica Euclidiana. Foi entregue aos alunos a folha número dois. Nela encontra-se uma malha quadriculada contendo dois pontos (A e B), e foi perguntado qual o menor caminho que liga estes dois pontos e também o cálculo da distância entre eles. (Figura 9)

Figura 9 - Folha número 02



Fonte: Autor (2016)

Nesta atividade o objetivo geral foi de observar os diferentes processos de cálculo da distância que os alunos conseguiam realizar, reafirmando, assim, as noções já aprendidas em sua vida acadêmica sobre os conceitos Euclidianos.

Observou-se uma grande dificuldade no cálculo que os alunos realizaram para chegar a resposta solicitada. Alguns utilizaram a régua, outros contaram as casas por onde a reta passava apenas um grupo questionou em utilizar o teorema de Pitágoras para fazer este cálculo. A grande dificuldade apresentada não foi a de realizar o cálculo, mas sim de compreender a noção de distância em um plano cartesiano.

Percebeu-se nessa segunda atividade que os conceitos que envolviam cálculos na geometria não-euclidiana não estavam tão sólidos com os que envolviam a Atividade 1.

Ao final destas atividades introdutórias foi explicado sobre a visão Euclidiana de espaço e distância, explicado os processos de cálculos com foco principal no Teorema de Pitágoras, o qual é provado no livro de Euclides, essa ação teve como objetivo minimizar as dificuldades que os alunos apresentaram ao fazer os cálculos.

No decorrer desta explicação observou-se grande parte dos alunos refazendo seus cálculos, o que por um lado é uma boa referência, pois nota-se a percepção do erro e sua corrigi-lo. Com o trabalho em grupo a conversa ficou mais aberta e estes “erros” foram facilmente observados.

Vale ressaltar, que é de grande importância reafirmar a visão euclidiana para depois contrariá-la com a geometria do táxi, pois assim os alunos conseguem perceber de uma forma diferente estas duas visões.

Na sequência, passou-se para as atividades que buscavam fazer com que os alunos pudessem fazer a comparação entre as formas de solução de problemas encontrados na geometria euclidiana e não-euclidiana (geometria do táxi).

Atividade 3 → Para esta atividade foi entregue aos alunos a folha número três a qual possui um mapa de uma cidade e nela estão demarcados dois pontos (ponto A e B), nesta cidade encontram-se três possíveis caminhos entre os pontos. É perguntado qual o menor caminho e qual ele escolheria para se descolocar entre os pontos. (Figura 10)

Figura 10 - Folha número 03

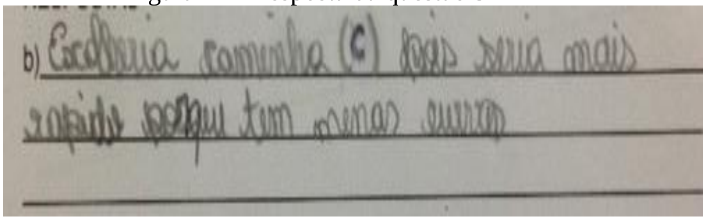
Fonte: Autor (2016)

O objetivo desta atividade foi apresentar a nova visão de métrica, pois uma pessoa não pode passar sobre as casas, ou seja, utilizar os conceitos de geometria euclidiana para encontrar a distância entre dois pontos, ou seja, deverá escolher outro caminho diferente do caminho dito por Euclides. Construindo então um novo conceito, uma nova geometria, a geometria do táxi.

Neste contexto os alunos são levados a aplicar um conceito com o qual está acostumado a usar, a geografia urbana e os caminhos que se faz todos os dias. De acordo com suas reações percebe-se que nunca tinham notado que algo tão comum fosse possível de uma aplicação científica.

Na Figura 11 é ilustrado um padrão de resposta obtido dos alunos, quando da realização da atividade.

Figura 11 - Resposta da questão 3



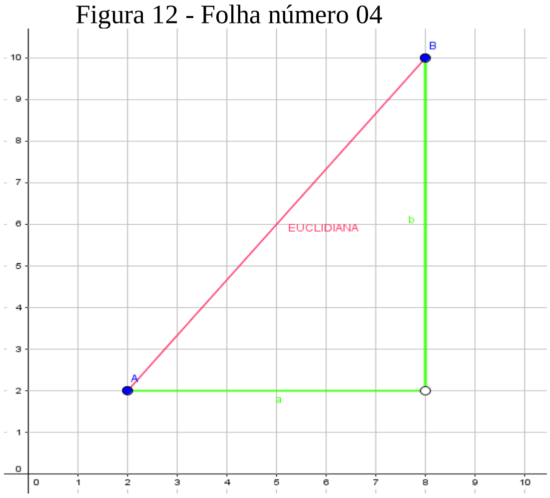
Fonte: Resposta dos alunos (2016)

Apenas um grupo percebeu que todos os caminhos possuíam a mesma distância entre os pontos, logo todos os caminhos seriam iguais matematicamente. Esta questão foi de grande importância, pois mostrou, de uma forma prática, que existem outras possibilidades para se encontrar o menor caminho entre dois pontos sem ser uma reta.

Com o término da atividade três levantou-se uma pequena discussão sobre esta nova geometria: como ela se comporta e quais são suas propriedades métricas. Foram dados alguns exemplos e no final desta discussão, foi apresentado, no quadro, o processo de cálculo desta distância não-euclidiana. Na sequência, passou-se para a Atividade 4.

Atividade 4 → Teve como objetivo a comparação entre as geometrias euclidiana e não-euclidiana. Foi entregue a folha número quatro aos alunos, os quais deveriam encontrar uma malha quadriculada em um plano cartesiano. (Figura 12)

Figura 12 - Folha número 04

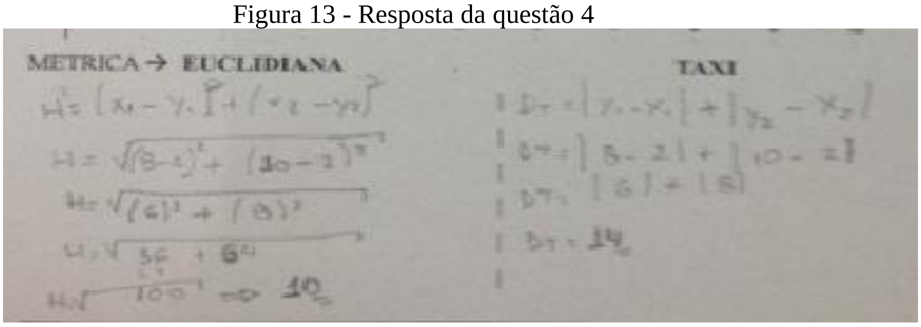


Fonte: Autor (2016)

Por meio desse plano, buscava-se que eles conseguissem visualizar dois pontos e consequentemente dois possíveis caminhos: um euclidiano e outro não-euclidiano, tendo então que fazer os devidos cálculos de distância, comparando no final as diferenças encontradas, nos cálculos realizados, tendo como foco as diferentes geometrias já estudadas.

A Figura 13 apresenta a forma como os cálculos foram feitos pelos alunos, comparando os procedimentos nas duas geometrias.

Figura 13 - Resposta da questão 4

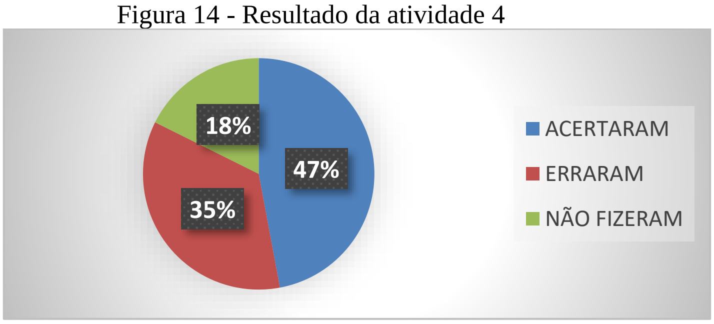


Fonte: Resposta dos alunos (2016)

Pode-se perceber, pela resposta acima que os alunos fizeram a comparação entre as diferentes ideias de métrica e assim conseguiram entender um pouco mais sobre a aplicabilidade da matemática e em especial da geometria, que muitas vezes é tida como um conteúdo complexo e totalmente abstrato, com relação com a realidade deles. Após essa atividade, passou-se para a próxima.

Com relação ao número de acertos dos alunos nessa questão, percebeu-se que quase a metade deles assimilaram os conceitos trabalhados, como mostra a Figura 14:

Figura 14 - Resultado da atividade 4



Fonte: Dados da pesquisa (2016)

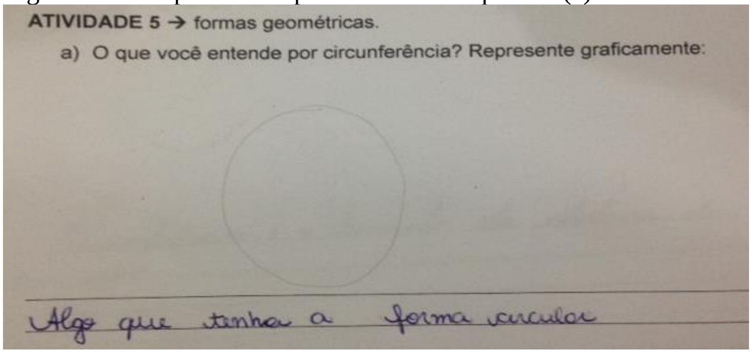
Notou-se que alguns alunos conseguiram entender a relação existente entre estas duas métricas, pois levantaram e afirmaram que a menor distância entre dois pontos sempre será a reta que os liga, mas dependendo da situação, em alguns casos como a dos motoristas, a menor distância que liga os pontos sempre será maior que a distância em linha reta.

Atividade 5 → O objetivo desta atividade, foi basicamente para que os alunos realizassem comparações entre as formas geométricas: a circunferência, nas duas geometrias, a do táxista e a de Euclides, pois as diferenças existentes são notáveis, assim facilitando a compreensão da diferença de métricas destas geometrias.

Diferente das demais atividades, essa Atividade 5, era composta por três questões:

Questão (a): É dado aos alunos uma folha em branco e pedido para que desenhe uma circunferência e explique com suas palavras o que ele entende por circunferência. As respostas obtidas foram semelhantes a apresentada por um aluno, conforme mostra a figura 15.

Figura 15 – Resposta dada por um aluno na questão (a) da atividade 5



Fonte: Resposta dos alunos (2016)

Após a primeira questão, o professor explica de forma expositiva as principais características de uma circunferência, entre as quais: o conceito de raio, diâmetro e corda.

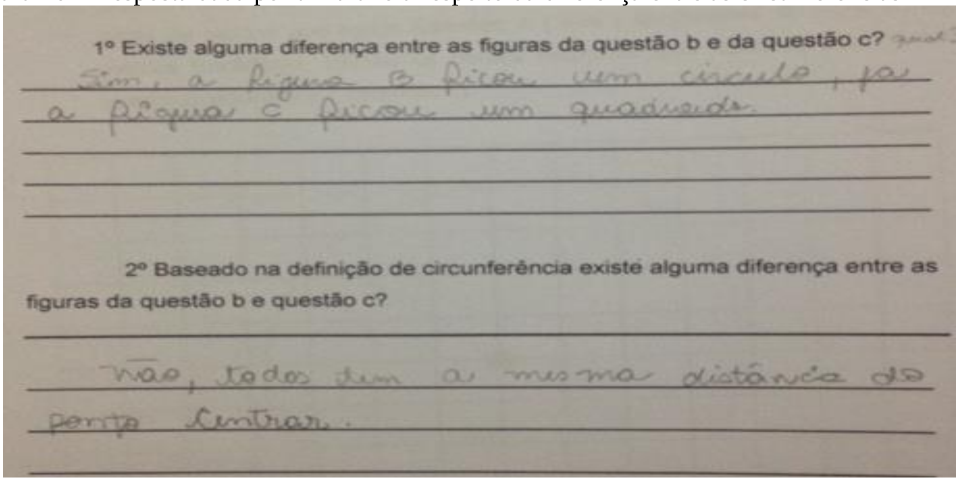
Com esta resposta pode-se perceber que, mesmo após passar pelo ensino fundamental e estar terminando o ensino médio, o aluno não tem uma clara compreensão de definição, a noção do conceito de um objeto matemático para com sua forma gráfica.

Questão (b): é repassado uma folha que contém um plano cartesiano com um ponto dado, nesta folha, os alunos deveriam traçar uma circunferência de raio 4 (unidade) na visão Euclidiana. Para cada grupo foi disponibilizado o uso de compassos. Nesta atividade os alunos deveriam fazer uma circunferência semelhante à da figura 4.

Questão (c): os alunos recebem uma folha com um segundo plano cartesiano, com um determinado ponto demarcado, e eles devem encontrar outros pontos que estejam distantes do ponto dado 4 unidades na métrica do Táxista. Nesta atividade os alunos deveriam fazer uma circunferência semelhante à da figura 5.

Com relação as questões (b) e (c), foi pedido para que os alunos descrevessem as diferenças encontradas nas duas figuras. A figura 16 mostra a resposta dada por um dos alunos.

Figura 16 – Resposta dada por um aluno a respeito da diferença entre as circunferências


1º Existe alguma diferença entre as figuras da questão b e da questão c?

Sim, a figura B ficou um circulo, ja a figura C ficou um quadrado.

2º Baseado na definição de circunferência existe alguma diferença entre as figuras da questão b e questão c?

Não, todos tem a mesma distância do ponto Centrar.

Fonte: Resposta dos alunos (2016)

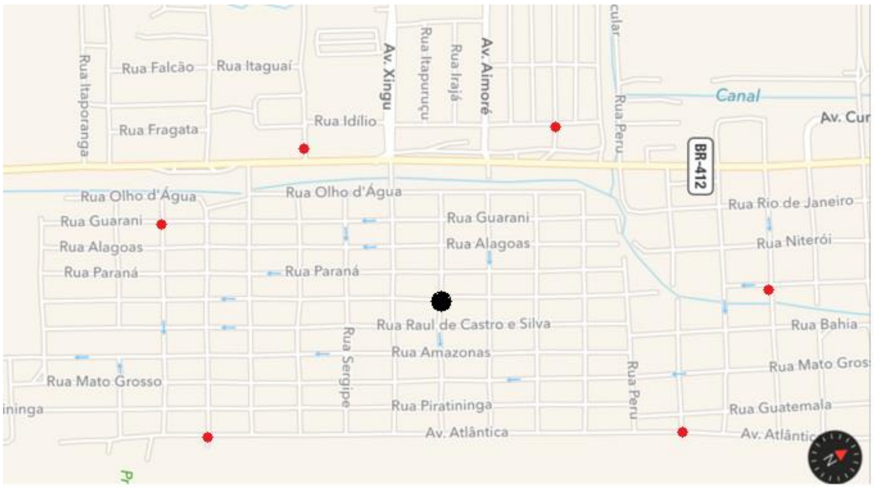
Após o término desta atividade, percebeu-se que os alunos conseguiram ter a compreensão, das diferenças entre a geometria euclidiana e a geometria do táxi, e souberam distinguir suas métricas e também as diferenças em suas formas geométricas, mais precisamente a circunferência.

Vale ressaltar que a atividade referente a circunferência conseguiu cumprir o seu objetivo, na medida que os alunos conseguiram perceber que as propriedades estudadas nas geometrias, são válidas para figuras com formas diferenciadas.

Para finalizar a aplicação foi feita uma última atividade, Atividade 6 na qual os alunos utilizaram-se dos conhecimentos adquiridos, para resolver a questão. Nesta tarefa aplicou-se tanto a noção de circunferência da geometria do táxi quanto à da geometria euclidiana.

Atividade 6 → Para enfatizar a diferença entre as geometrias estudadas, iniciou-se a última parte da aplicação, a qual trata de apresentar a circunferência na visão do táxista, foi escolhida a circunferência pelo fato de ser, visualmente a que mais se diferencia da visão euclidiana. (Figura 17)

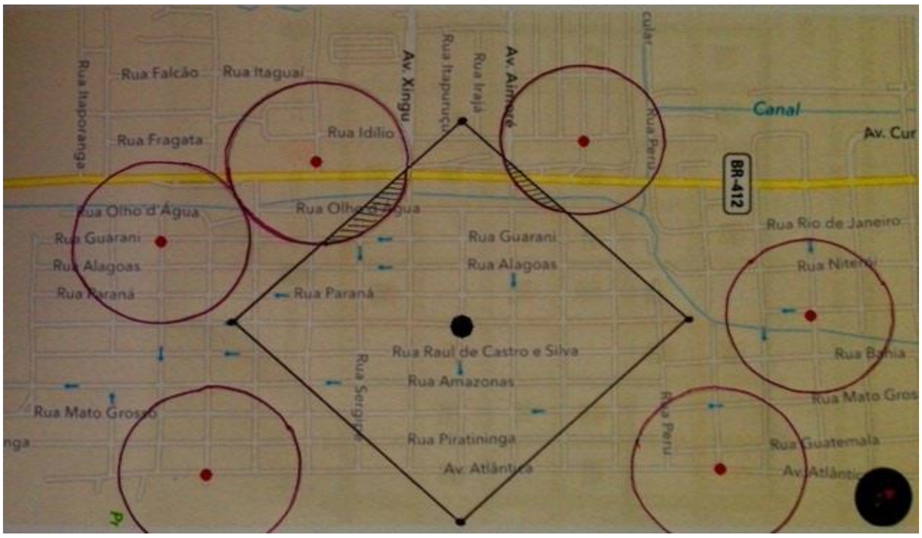
Figura 17 - Atividade número 06



Fonte: Autor (2016)

Teve como objetivo utilizar os conceitos adquiridos nas atividades anteriores a um problema real. O problema apresentava que considerando o ponto em preto como uma escola, e sabendo que os alunos moram dentro de uma área cujo raio é de quatro quadras da escola e que os pontos em vermelho, seriam possíveis focos da dengue, e sabendo que o mosquito transmissor atinge no máximo um raio de 300 metros. Os alunos deveriam desenhar as circunferências e observar se há interseções entre elas, como mostra a Figura 18.

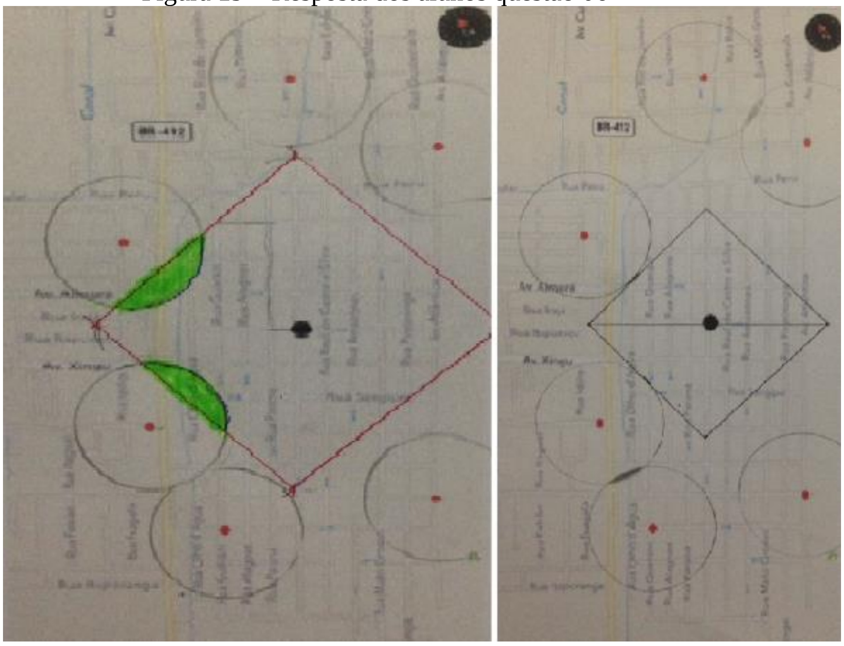
Figura 18 – Solução da Atividade número 06



Fonte: Autor (2016)

Busca-se com essa atividade aplicar em um único problema todo o ensinamento adquirido durante as etapas anteriores, podendo então ser feita uma observação sobre quais relações ou quais ideias foram assimiladas pelos alunos. Na figura 19 podemos visualizar algumas respostas dada pelos alunos. Observa-se que existe uma imprecisão quanto ao uso de compasso e régua, mas a noção ou relação entre as geometrias pode ser visualizadas com clareza.

Figura 19 – Resposta dos alunos questão 06

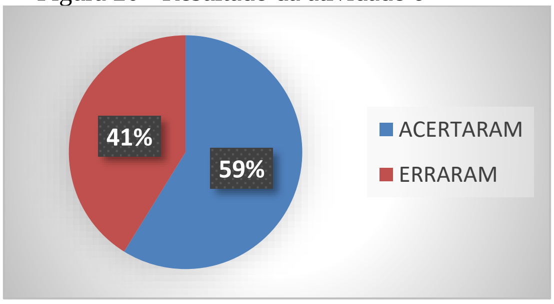


Fonte: Autor (2016)

De uma forma geral a turma assimilou o conteúdo proposto para a questão, durante a aplicação da questão surgiram dúvidas, as quais eram bem sustentadas pelos alunos, como por exemplo em relação aos trajetos sendo que a figura pode ser um pouco imprecisa na questão de distância, mesmo sendo exposto no início da questão, mas a verdadeira ideia e a que os conceitos ficaram bem esclarecidos e foram explorados pelos alunos.

Avaliando o número de acerto da turma, com relação a quantidade de acertos, percebeu-se que mais da metade da turma conseguiu assimilar o que havia sido trabalhado.

Figura 20 - Resultado da atividade 6



Fonte: Pesquisa realizada (2016)

Baseando-se nas respostas adquiridas nesta aplicação, observou-se um grande entusiasmo dos alunos para com o novo, a forma como viram que a matemática ou a geometria estão envolvidas nas escolhas que fazem em seu dia a dia e isso facilitou a inserção deste novo conceito.

Como o objetivo desse trabalho não era o de avaliar a forma de aprendizagem de um conceito novo, mas sim de trabalhar com um conceito novo relacionado ao antigo, não foram, feitas avaliações estatísticas sobre o conhecimento adquirido, apenas conclusões baseadas nas respostas dadas pelos alunos.

Considerações finais

Desde o surgimento da geometria nas civilizações antigas, até a construção dessa nova geometria na era moderna, a ciência da matemática traz estudos extraordinários e muito importantes para entendermos o mundo que nos cerca. A geometria, por sua vez, vem desvendando mistérios e abrindo novas portas para seu estudo.

Este trabalho se dedicou ao ensino da geometria, baseando-se na DCE do Paraná, que visa à inserção das geometrias não-euclidianas no ensino básico, a construção deste novo conceito veio por meio da geometria do táxi, considerada não-euclidiana pela sua diferente métrica. Aplicada no ensino médio com uma boa aceitação, introduzir uma nova noção de distância não é simples e exige muito tempo e dedicação.

Este trabalho apresenta apenas uma ideia de quantas dificuldades se tem ao tentar algo novo, mas foi extremamente apreciado desde a construção do breve histórico quanto na aplicação desta nova geometria.

Com uma geometria simples e de fácil aceitação, a geometria do táxi é apenas uma introdução para se iniciar um estudo muito grande, mas o mais importante neste trabalho foi construir este novo conceito podendo relacionar com o dia a dia do aluno, tornando a aplicação mais dinâmica.

O objetivo deste trabalho era trazer ao aluno uma nova visão para a geometria, introduzir um novo conceito, aplicar de forma simples e didática. Portanto, as geometrias não-euclidianas devem estar no currículo de nossos alunos e, assim, deixa-se uma forma de iniciar este estudo, para que o aluno conheça e aplique em seu cotidiano.

Referências

BARBOSA**,** J. L. M. *Geometria Hiperbólica*. 4. ed. Rio de Janeiro:IMPA, 2008.

BONOLA, R. *Non-Euclidean Geometry: a Critical and Historical Study of Its Development*. Tradução de H. S. Carslaw. New York: Dover, 1955.

BOYER, C.B. *História da Matemática.* Tradução de: Elza F. Gomide.1. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRAZ, F. M. *História da Geometria Hiperbólica.* Monografia (Especialização). Departamento de Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, 2009.

EVES, H. *Tópicos da Historia da Matemática.* Tradução de: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

KALEFF, A.M.; NASCIMENTO, R.S. *Atividades Introdutórias às Geometrias Não Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi*, In: Boletim Gepem. Rio deJaneiro. Anais. Rio deJaneiro: [s.n.], 2004

MLODINOW, L. *A Janela de Euclides: A História da Geometria, das Linhas Paralelas ao Hiperespaço*. Tradução de Enézio E. de Almeida Filho. SãoPaulo: Geração Editorial, 2008.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica. Matemática.* Curitiba: SEED, 2008.

Recebido 09/11/2016
Aceito 21/05/2017