

Média aritmética em diferentes situações: identificando níveis de interpretação de estudantes do Ensino Fundamental

Arithmetic mean in different situations: identifying elementary school students' interpretation levels

ROBSON DA SILVA EUGÊNIO¹

LILIANE MARIA TEIXEIRA LIMA DE CARVALHO²

CARLOS EDUARDO FERREIRA MONTEIRO³

Resumo

Este artigo apresenta resultados de pesquisa que analisa interpretações de estudantes do Ensino Fundamental sobre o conceito de média aritmética simples em diferentes situações. Participaram 8 estudantes do 5º ano e 8 estudantes do 9º ano. Eles responderam a um instrumento diagnóstico envolvendo elementos conceituais sobre média aritmética nas situações de pesquisa: contexto familiar, média, interpretação de gráficos e cálculo da média. As suas respostas foram categorizadas em quatro níveis: preestrutural, uniestrutural, multiestrutural e relacional. Os estudantes de ambos os anos de escolarização avançaram nos níveis de resposta dadas ao teste, mas os estudantes do 9º ano avançaram mais, colocando assim em evidência a importância do processo de escolarização na construção do conceito da média aritmética.

Palavras-chave: Média aritmética, Educação Estatística, Situações de interpretação da média aritmética.

Abstract

This article presents results of a study about the interpretations of elementary school students of arithmetic mean in different situations. The participants were 08 students from 5th grade and 08 students from 9th grade. They answered a diagnostic test with conceptual elements of arithmetic mean in research situations denominated: family context, media, interpreting graphs and averaging. Their responses were categorized into four levels: prestructural, uniestructural, multiestructural and relational. Students from both school years had an improvement of their levels of responses, but 9th grade students had an improvement more substantial, thus putting in evidence the importance of the educational process in the construction of the concept of arithmetic mean.

¹ Doutorando do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (Edumatec) do Centro de Educação (CE) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) – robsonseugenio@gmail.com

² Doutora em Educação pela Universidade Federal do Ceará- UFC, Docente do Edumatec e do Departamento de Administração escolar e Planejamento Educacional do CE/UFPE - lmilcarvalho@gmail.com

³ Doutor em Educação pela University of Warwick, Docente do Edumatec e do Departamento de Psicologia e Orientação Educacionais do CE/UFPE – cefmonteiro@gmail.com

Keywords: *Arithmetic mean, Statistics education, Situations interpretation of the arithmetic mean.*

Introdução

Este artigo apresenta o recorte de uma pesquisa de mestrado a qual investigou a compreensão sobre o conceito de média aritmética simples⁴ de estudantes do 5º e 9º anos do Ensino Fundamental. As tarefas de pesquisa incluíram a resolução de um teste e a utilização de um *software* que potencializa ações de organização e análise de dados estatísticos. O objetivo do estudo foi analisar como estudantes daqueles dois anos de escolarização interpretavam a média aritmética com e sem o auxílio do recurso do *software*. O objetivo deste artigo é refletir sobre como os estudantes compreenderam e interpretaram a média a partir dos diferentes tipos de problemas propostos, buscando identificar os possíveis níveis de resposta para cada ano de escolarização. A pesquisa empírica envolveu estudantes que estavam finalizando os estudos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, no 5º ano, e aqueles que estavam finalizando essa etapa de estudos, no 9º ano.

A média é um conceito que se relaciona a diferentes situações cotidianas que os estudantes vivenciam tais como: censo da população; notas escolares; resultados de concursos públicos; estimativa do valor a ser pago na conta do consumo de água ou energia elétrica; e em contextos de uso da linguagem coloquial. Essas diferentes situações de uso da média têm implicações nas compreensões de estudantes (WATSON; MORITZ, 1999).

No Brasil existem diversos documentos curriculares estaduais e federais que orientam o ensino do conceito de média no âmbito escolar. Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1997) sugerem que o ensino de conteúdos de Estatística, Probabilidade e Combinatória devem ser trabalhados desde o 1º Ciclo do Ensino Fundamental. O conceito de média aritmética simples é somente indicado a partir do 4º ano. Espera-se que no decorrer do 5º ano os estudantes sejam capazes de obter e interpretar a média.

Em relação aos anos finais do Ensino Fundamental os PCN fazem menção ao trabalho com a média, mas com perspectivas distintas. No 6º e 7º anos espera-se que os estudantes compreendam a média como medida de tendência central e também como ferramenta para a análise de dados – especificamente a média é apresentada como “indicador da tendência de uma pesquisa” (BRASIL, 1998, p. 74). Nos últimos anos do

⁴Doravante no texto utiliza-se o termo média referindo-se à média aritmética simples.

Ensino Fundamental (8º e 9º anos) é esperado que os estudantes já possuam certo conhecimento em relação à elaboração, interpretação de gráficos e tabelas, assim como em relação à análise de dados, devendo compreender a média enquanto representante de um conjunto de dados.

Em documentos mais atuais, como os Parâmetros da Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012), apresenta-se outra perspectiva para o ensino de Estatística, na qual se ressalta a importância do conceito de média ser trabalhado a partir do 5º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio. Subjacente a essa orientação tem-se a expectativa de que o estudante tenha um contato com esse conceito de forma longitudinal, possibilitando assim uma construção gradual de sentidos sistematizados.

Carvalho (2011) aponta que atividades sobre a interpretação da média associada a representações gráficas e tabulares, são ausentes em livros didáticos do Ensino Fundamental. Outros estudos evidenciam dificuldades que estudantes demonstram quando são solicitados a resolver situações problemas envolvendo a média associadas a gráficos estatísticos e também no contexto do uso de lápis e papel (BARIZON, 2011; LEITE, 2010; MELO, 2010; SILVEIRA, 2011).

As próximas seções apresentam discussões sobre aspectos conceituais da média aritmética e dos níveis de respostas dos estudantes em situações de resolução de problemas sobre esse tópico.

Conceituação, propriedades e significados da Média Aritmética

A média pode ser entendida como o ponto de equilíbrio entre os dados de uma distribuição, considerando os desvios dos valores. A média aritmética seria o valor que equilibra os dados como se fosse o ponteiro de uma balança e que assim equivaleria ao ponto central da massa de um conjunto de dados (NOVAES; COUTINHO, 2009).

Estudos anteriores sobre média apontam diferentes aspectos conceituais que precisariam ser abordados na escola. Por exemplo, Strauss e Bichler (1988) investigaram a compreensão do conceito de média entre 80 estudantes em Israel com idades entre 8 e 12 anos. Aqueles autores elencaram sete propriedades que deveriam ser ensinadas na escola, para que haja o domínio do conceito de média pelos estudantes (Quadro 01).

Quadro 01: Propriedades da média segundo Strauss e Bichler (1988)

Propriedades (P)	Significado
P1	A média está localizada entre os valores extremos;
P2	A soma dos desvios a partir da média é zero;
P3	A média é influenciada por cada um e por todos os valores;
P4	A média não coincide necessariamente com um dos valores do banco de dados que a compõe;
P5	A média pode ser um número que não tem correspondente na realidade física;
P6	O cálculo da média leva em consideração todos os valores, inclusive os nulos e os negativos;
P7	A média é um valor representativo do banco de dados a partir dos quais ela foi calculada.

Fonte: Strauss e Bichler (1988).

De acordo com Strauss e Bichler (1988), das sete propriedades citadas no Quadro 01, a P7 seria a mais significativa, pois envolve o seu significado como medida de tendência central. Em estudo de intervenção envolvendo pré e pós-testes esses pesquisadores constataram que, a mais fácil foi a P3, enquanto P6 e P7 foram aquelas em que os estudantes demonstraram maior dificuldade.

Essas propriedades delimitadas por Strauss e Bichler (1988) são fundamentais para uma compreensão conceitual de média, pois apresentam aspectos relevantes para identificar os seus elementos constitutivos.

Pesquisadores da área de Educação Estatística também vêm estudando a média e identificando outros elementos constitutivos. Por exemplo, Batanero (2000) identifica cinco tipos de elementos que constituem e perpassam os conceitos de média, mediana e moda.

O primeiro tipo refere-se ao que a autora denominou de *elementos extensivos*, os quais constituem o campo de problemas no qual surge o objeto conceitual. Batanero destaca que o reconhecimento dos problemas que envolvem o conceito de média é um aspecto fundamental para resolvê-los. Mas esse reconhecimento não se limita apenas a memorizar e aplicar os algoritmos e as fórmulas para se calcular as medidas de tendência central.

Outro tipo consiste nos *elementos atuativos*, ou seja, às práticas utilizadas pelos estudantes na resolução dos problemas (BATANERO, 2000). Assim, seriam *elementos atuativos*, ações tais como: dividir e somar os valores; encontrar o valor que mais se repete em uma tabela de frequências; e calcular frequências acumuladas.

O terceiro tipo refere-se aos *elementos ostensivos*, que consistem nas representações usadas para representar os conceitos, como palavras, tabelas e gráficos.

O quarto tipo estaria vinculado aos *elementos intensivos* que de acordo com Batanero (2000) configurariam as definições e propriedades características relacionadas ao conceito de média. Poderíamos entender as propriedades desenvolvidas por Strauss e Bichler (1988), como a exemplificação dos *elementos intensivos*.

Por fim, o quinto tipo estaria associado aos *elementos validativos*, os quais incluem argumentos e demonstrações utilizadas para explicar a outras pessoas a solução de problemas.

Batanero (2000) afirma que dentro do campo da Estatística, mesmo os conceitos mais simples como os de média e mediana, precisam de um trabalho específico para que os estudantes possam alcançar a compreensão de seus diversos significados. Ela também identifica quatro significados distintos sobre a média aritmética:

- Média na estimativa de uma quantidade desconhecida na presença de erros de medição;
- Média como uma quantidade equitativa a repartir para se conseguir uma distribuição uniforme;
- Média enquanto elemento representativo de um conjunto de dados;
- Média enquanto necessidade de conhecer o valor que será obtido com maior probabilidade, ao contar com um dado faltando em uma distribuição.

De acordo com Batanero (2000) espera-se que esses significados sobre a média sejam formalizados progressivamente a partir de diferentes situações-problemas com as quais os estudantes se deparam ao longo do seu processo de escolarização.

Neste artigo estaremos analisando os níveis de respostas que os mesmos esboçam em diferentes situações envolvendo a média.

Níveis de respostas sobre a média aritmética

Watson e Moritz (1999) desenvolveram uma pesquisa longitudinal, que investigou a exploração do entendimento dos conceitos de média por estudantes australianos do Ensino Fundamental. Os autores propuseram quatro questões sobre o conceito de média e mediana, envolvendo problemas situados em contexto familiar aos estudantes e no contexto da mídia. Nessa pesquisa, Watson e Moritz propuseram uma classificação adaptada de Biggs e Collis (1982) que elaboraram a Taxonomia SOLO (*Structure of*

Observing Learning Outcome), a qual poderia ser utilizada para mensurar e avaliar a qualidade da aprendizagem e também poderia ser empregada com objetivos curriculares e educacionais. Essa Taxonomia discute a possibilidade de se identificar níveis hierárquicos de complexidade sobre diversificados e distintos conteúdos. Com base nessa taxonomia, Watson e Moritz (1999) realizaram uma classificação das respostas dos estudantes sobre média aritmética em quatro níveis: *preestrutural*, *uniestrutural*, *multiestrutural* e *relacional* conforme é apresentado no Quadro 02.

Quadro 2 - Níveis de resposta sobre o significado da média

NÍVEL	SIGNIFICADO
Pré-estrutural	Respostas que não incluem elementos requeridos para identificar o significado da média no contexto da questão. Outra perspectiva para esse nível seria se os estudantes lembrassem a palavra, mas não soubessem dizer onde ela se aplicaria, não fazendo assim a relação com os termos envolvidos na pergunta.
Uniestrutural	<p>Descreve aquelas respostas que envolvem uma ideia simples sobre operação aritmética ou medição, contudo sem nenhum indicador de média ou medidas de tendência central explícita.</p> <p>Também são respostas em que os estudantes refletem sobre uma única ideia ou sinônimo para a média, sendo expressas algumas vezes por frases coloquiais de natureza descritiva e que não sugerem qualquer tipo de relação conceitual mais sólida.</p> <p>Por exemplo, na pergunta: o que significaria para você se alguém lhe dissesse que você está na média? Possíveis respostas uniestruturais seriam: “eu estou bem”; “eu sou uma pessoa normal” ou “o mesmo que todos os outros”. Sendo assim, são respostas que não demonstram uma compreensão mais profunda sobre o conceito de média, mas incluem uma ligação da pessoa com um grupo maior.</p>
Multiestrutural	<p>Contempla respostas mais elaboradas, situadas para além de uma única ideia geral e que descrevem como a média refere-se a um conjunto de dados a partir dos quais os estudantes podem estar calculando. Respostas que utilizam um método para a obtenção da média do conjunto de dados através de seu algoritmo também são multiestruturais.</p> <p>Esse nível pode ainda ser caracterizado por ideias que podem estar relacionadas com qualquer uma das medidas de tendência central – média, moda ou mediana – embora essas palavras possam aparecer ou não na resolução do problema.</p> <p>Entende-se que o pensamento desenvolvido pelo estudante vai recair em uma das medidas de tendência central, mesmo que eles não explicitem verbalmente o seu uso. Para responder à pergunta: o que significaria para você se alguém lhe dissesse que você está na média? O estudante que se encontra em um nível multiestrutural, poderia responder: “você está no meio como a maioria das pessoas”. Os pesquisadores destacam que o uso da expressão “meio” caracteriza uma compreensão intuitiva do conceito de mediana.</p>

Relacional	<p>Exibe uma compreensão integrada das relações entre os diferentes aspectos dos dados ou do contexto da tarefa, demonstrando um raciocínio crítico.</p> <p>Assim, não aparecem inconsistências na conclusão da tarefa. A média é concebida como elemento que relaciona todos os aspectos envolvidos na questão.</p> <p>São respostas que vão além da prática do algoritmo, porque os estudantes concebem a natureza dos dados e conseguem perceber a variação, refletindo sobre os dados.</p> <p>Em suma, nesse nível percebe-se um pensamento crítico em relação às variáveis envolvidas no problema. Por exemplo, se em uma distribuição de dados temos um valor discrepante que está fazendo com que a média se distancie do esperado, o estudante que se encontra nesse nível poderia perceber que o mencionado valor estaria afetando negativamente a média dessa distribuição. Outro exemplo seria avaliar se a média seria um bom indicador em uma distribuição de dados e se essa medida responde ao que se está analisando, ou seja, a média é uma boa medida nesse contexto? Nesse sentido o nível de resposta relacional sugere uma perspectiva de amadurecimento em relação a média e uma compreensão mais sistemática do objeto.</p>
-------------------	--

Fonte: Adaptado de Watson e Moritz (1999).

Watson e Moritz (2000) utilizaram essa classificação para aprofundar as análises sobre os níveis de respostas dos estudantes para resolver as questões. Os autores esperavam que os estudantes dessem respostas relacionais, contudo, a frequência das respostas de nível multiestructural se sobressaiu em relação às respostas dos demais níveis.

Watson (2006) investigou em profundidade os significados da média aritmética a partir da classificação já evidenciada nos estudos prévios mencionados (WATSON; MORITZ, 1999; 2000). Assim como nos estudos anteriores, Watson analisou os níveis de respostas de estudantes australianos sobre o conceito de média aritmética apresentado em situações familiares e no contexto da mídia. De um modo geral, os estudantes deram muita ênfase ao uso do algoritmo da média, situando-se as suas respostas em um nível multiestructural. Segundo a autora, o fato de conhecer o algoritmo não é condição suficiente para que os estudantes consigam interpretar as propriedades e situações em que a média se apresenta.

Esses níveis de respostas propostos e analisados por Watson e Moritz foram também utilizados no estudo que apresentamos neste artigo, cujo percurso metodológico é apresentado na seção seguinte.

Contexto e Método da Pesquisa

A pesquisa que apresentamos neste artigo é parte de um estudo mais amplo desenvolvido no curso de mestrado por Eugênio (2013) e apresentado parcialmente em Eugênio e Carvalho (2013). Participaram da pesquisa 16 estudantes do Ensino Fundamental, sendo oito do 5º ano (média de idade = 10,3 anos) e oito do 9º ano,

(média de idade = 14,2 anos), advindos de uma mesma escola pública localizada na Região Metropolitana do Recife, Pernambuco. Para salvaguardar a identidade dos estudantes participantes da pesquisa foram atribuídos nomes fictícios.

A escolha dos participantes levou em consideração orientações dos documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares da Educação Básica de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2012) e os PCN (BRASIL, 1997). Essas orientações preconizam que a média deve ser trabalhada estudada de forma longitudinal a partir dos anos iniciais e que deve ser sistematizado esse estudo nos anos finais do Ensino Fundamental e ensino médio, levando assim a aprendizagem desse conceito estatístico. Nesse sentido, optamos por incluir estudantes do 5º e do 9º ano, por eles se encontrarem finalizando os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, respectivamente.

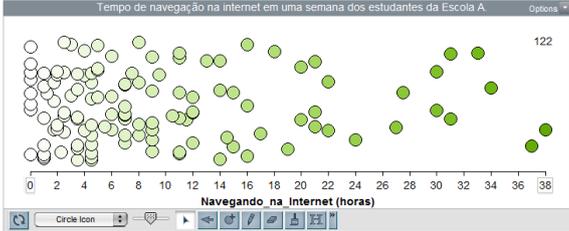
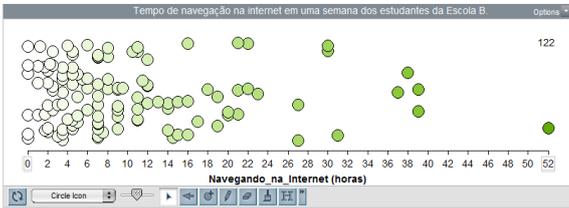
Enfocamos neste artigo os dados coletados a partir das respostas dos participantes a um instrumento diagnóstico sobre média composto por dez questões. Os estudantes responderam individualmente às tarefas de pesquisa em duas sessões, uma com os oito participantes do 5º ano e uma sessão com os do 9º ano. Na sessão de coleta de dados, cada estudante recebia uma folha impressa com as tarefas.

Neste artigo destacamos as cinco primeiras questões do instrumento diagnóstico, as quais as três primeiras foram adaptadas do estudo de Watson (2006), as outras duas questões foram elaboradas a partir de dados disponibilizados pelo software *TinkerPlots*⁵ e utilizadas no contexto da pesquisa de Eugênio (2013). O Quadro 03 apresenta as descrições das situações e as respectivas questões.

Quadro 03- questões do instrumento diagnóstico sobre a média

Situação	Descrição
Média relacionada a uma situação familiar aos estudantes	1ª) O que significaria para você se alguém lhe dissesse “ <i>que você está na média</i> ”?
Média relacionada a uma situação da mídia impressa	2ª) Uma pesquisa descobriu que “ <i>estudantes brasileiros do Ensino Fundamental assistem à TV uma média de 3 horas por dia</i> ”. a) O que significa a palavra média nesta frase? b) Como você acha que eles obtiveram esta média de 3 horas de TV por dia?
Média relacionada a uma situação da mídia impressa	3ª) Você está assistindo à televisão e ouve a seguinte notícia: “Em média, as famílias brasileiras têm 2,3 filhos” a) O que você pode dizer sobre essa notícia? b) Por que a média é 2,3 e não um número como 1, 2, 3 ou 4?

⁵ Software de Educação Estatística e Matemática.

<p>Média associada com atividade de interpretação de gráficos.</p>	<p>4^a) Foi realizada uma pesquisa com estudantes de duas escolas públicas da região metropolitana do Recife. Os pesquisadores perguntaram aos estudantes dessas escolas, quantas horas eles passavam por semana navegando na internet. Os resultados dessa pesquisa foram apresentados nos gráficos abaixo.</p> <p>Tempo de navegação na internet em uma semana dos estudantes da Escola A.</p>  <p>Tempo de navegação na internet em uma semana dos estudantes da Escola B.</p>  <p>Analisando os dados dos gráficos das escolas A e B responda as questões abaixo:</p> <p>a) O que você pode dizer sobre o número de horas navegadas na internet durante uma semana pelos estudantes da escola A e escola B?</p> <p>b) Qual o maior e o menor número de horas por semana que os estudantes da escola A navegam na internet?</p> <p>Maior número de horas:.....Menor número de horas:.....</p> <p>c) Qual o maior e o menor número de horas por semana que os estudantes da escola B navegam na internet?</p> <p>Maior número de horas:.....Menor número de horas:.....</p> <p>d) Indique no gráfico qual seria a média de horas por semana que os estudantes das escolas A e B passam navegando na internet.</p>
<p>Cálculo da média</p>	<p>5^a) Flávio trabalhava em uma loja de eletrodomésticos. No primeiro dia de trabalho ele entregou 4 geladeiras, no segundo 5, no terceiro 7 e no quarto 6. Qual foi a média de geladeiras entregues nesses dias?</p>

Fonte: Eugênio (2013)

Para a primeira questão, esperava-se que os estudantes pudessem dar respostas pessoais as quais levassem em consideração o sentido conceitual da palavra média, de acordo com suas vivências em sala de aula. Na segunda questão, a média é representada por um número inteiro e é solicitado dos estudantes que os mesmos expliquem como foi obtida aquela média encontrada na pesquisa. Já na terceira questão, a média é um número que não tem correspondente na realidade física estando também, nesse sentido, relacionada a propriedade 5 levantada por Strauss e Bichler (1988).

As questões 4a, 4b, 4c e 4d encontram-se relacionadas a explorações sobre a média no contexto da interpretação de dois *dotplots*⁶ produzidos no *TinkerPlots*. A informação dos gráficos utilizados no teste versa sobre uma pesquisa adaptada do banco de dados do *TinkerPlots* realizada em duas escolas (A e B), mostrando a quantidade de tempo que estudantes passavam na internet durante uma semana.

Observa-se que o número de casos para cada gráfico é o mesmo (122) e os dados variam de 0 a 38 na Escola A, com média de 9,46, e de 0 a 52 na Escola B com média de 10,07. O problema envolve uma situação de “amostras iguais e médias diferentes”. Na Escola B o último dado consiste em um *outlier*⁷, ou seja, um valor considerado atípico para a amostra, representando o caso de uma criança que passa 52 horas por semana na internet. Esse *outlier* tinha influência no valor da média da variável tempo que os estudantes passavam na internet em uma semana na Escola B; sem ele a distribuição da escola B ficaria semelhante a da Escola A, passando a ter os dados variando de 0 a 38 e com média de 9,64.

A questão 4a é de interpretação de gráficos, enquanto as 4b e 4c versam sobre a amplitude dos dados em termos dos seus pontos máximos e mínimos. A questão 4d é considerada com grau de dificuldade elevada, tendo em vista que os estudantes deveriam localizar simbolicamente a média no gráfico, além de estimarem o seu valor numérico.

A quinta e última questão trata de um problema que envolve o cálculo da média aritmética e foi baseada em questão utilizada por Melo (2010).

As respostas dos estudantes ao teste foram organizadas sob a forma de protocolos e analisadas a partir das categorias níveis de respostas propostas por Watson e Moritz (1999; 2000) e Watson (2006).

A categorização das respostas dos participantes da pesquisa nos níveis 0, 1, 2 e 3 foi realizada a partir de uma análise comparativa de três juízes, sendo dois ligados a pesquisa e um terceiro juiz que já desenvolveu pesquisa sobre o conceito de média. Numa comparação dessa categorização realizada pelos juízes, obteve-se em torno de 90% de concordância. Nos casos em que houve discrepância foi realizada uma releitura das respostas dos estudantes pelos dois primeiros juízes, até se estabelecer um consenso.

⁶ Gráfico de pontos.

⁷ Valor discrepante ou atípico representa uma observação que apresenta um grande afastamento das demais da série, ou seja, está fora da série ou que é inconsistente.

Resultados

Os resultados são apresentados em três subseções vinculadas com a descrição das situações de pesquisa e suas respectivas questões. As duas primeiras subseções apresentam os níveis de respostas dos estudantes em situação familiar e no contexto da mídia e em situações de interpretação de gráficos, enquanto a terceira apresenta as respostas a partir do cálculo da média.

Níveis de respostas dos estudantes em situação familiar e no contexto da mídia

Conforme foi descrito, a primeira questão do instrumento diagnóstico envolve o uso da média em situação familiar e as quatro demais questões destacam o uso da média tal como em situações da mídia impressa. Sendo que na segunda questão (2a e 2b) o valor da média é um número inteiro, enquanto na terceira questão (3a e 3b) o valor é um número decimal. As últimas questões seriam as mais difíceis, pois de acordo com Watson (2006) a média retratada por um número decimal costuma ser de difícil compreensão, porque esse valor não possui correspondência na realidade física. Assim, não existiriam 2,3 filhos ou 1,8 gols.

Na análise das respostas dos estudantes ao invés de trabalharmos com a perspectiva de acerto/erro, consideramos a adequação ou não da resposta ao problema posto.

Aquelas respostas consideradas adequadas foram analisadas a partir da classificação proposta por Watson e Moritz (1999). Por exemplo, uma resposta do tipo “é bom porque eu gosto” à primeira questão (O que significaria para você se alguém lhe dissesse “que você está na média?”), não demonstra consistência com o conceito de média, contudo é adequada ao contexto do problema. Esse tipo de resposta expressa comentários em geral sobre a questão, mas não considera de forma mais sistemática a sua estrutura. Respostas desse tipo foram categorizadas como preestrutural e codificadas como tipo 0.

Quando a resposta demonstrava uma relação mais singular, ou uma declaração coloquial que expressasse alguma noção sobre a média em relação a um conjunto de dados, essa resposta foi classificada como uniestrutural, sendo codificada como tipo 1.

Outras formas de respostas mais complexas incluíram níveis multiestruturais que foram codificadas como tipo 2. A resposta de Alice (9º ano) à 3ª questão oferece um exemplo de resposta dessa natureza.

Figura 01 – Resposta tipo multiestructural dada por Alice 9º ano.

3º) Você está assistindo televisão e ouve a seguinte notícia:

“ Em média, as famílias brasileiras têm 2,3 filhos “

a) O que você pode dizer sobre essa notícia?

*Que maioria das família têm no mínimo 2 a 3 filhos,
poucas são as que têm mais.*

Fonte: Eugênio (2013).

Essa abordagem de Alice expressa uma compreensão de média relacionando-a para a maioria e, portanto, pode ser interpretada como envolvendo a ideia de moda enquanto medida de tendência central. De acordo com a classificação de Watson (2006) mesmo que o estudante não tenha a consciência de que está usando a média, podemos inferir esse uso a partir da sua resposta, nesse sentido ele apresenta uma compreensão intuitiva. Na resposta relacional, codificada como tipo 3, o estudante precisaria apresentar explicitamente relações que apontassem para o conceito de média. Contudo, no caso desse estudo nenhuma resposta foi classificada nesse nível.

A Tabela 01 mostra os tipos de respostas para os cinco primeiros itens do teste diagnóstico, conforme classificação realizada após a análise comparativa dos juízes.

Tabela 01– Frequência de níveis de respostas para as questões iniciais do instrumento diagnóstico sobre a média.

Questões	Frequência de níveis de respostas							
	5º ano				9º ano			
	0	1	2	3	0	1	2	3
Q1	2	4	2	0	0	4	4	0
Q2a	8	0	0	0	1	2	5	0
Q2b	5	3	0	0	2	5	1	0
Q3a	7	0	1	0	1	1	6	0
Q3b	5	1	2	0	2	1	5	0
Total	27	8	5	0	6	13	21	0

Fonte: Eugênio (2013)

Observa-se que os tipos de respostas mais frequentes dos estudantes do 5º ano foram aqueles de nível preestrutural (Tipo 0), seguidas daquelas respostas que refletem uma ideia singular em relação à média, isso é, respostas uniestruturais (Tipo 1). No 9º ano, as respostas mais frequentes foram aquelas de nível multiestructural (Tipo 2), seguidas de respostas uniestruturais (Tipo 1). Respostas de nível relacional não emergiram nas respostas dos estudantes de ambos os tipos de escolarização.

Níveis de respostas dos estudantes em situações de interpretação de gráficos

Conforme mencionado no método, os gráficos da Escola A e B possuem o número igual de casos e variação nos dados; sendo que a variação é acentuada no gráfico da Escola B devido à presença do *outlier*.

A maioria dos estudantes do 5º ano (75%) errou a questão que requeria que eles interpretassem os dois gráficos. Em geral, esses estudantes interpretaram o problema visualmente, destacando que na Escola A, mais pessoas passaram mais horas na internet durante uma semana. Ao que parece, eles consideraram apenas a massa de dados, ignorando o *outlier* apresentado da escola B.

Com relação aos alunos do 9º ano, metade da amostra acertou a questão 4a. João, por exemplo, destaca a variabilidade dos dados ao afirmar que “Alguns alunos das 2 escolas passaram o mesmo tempo navegando e outros alunos passaram mais tempo”.

Com relação às questões 4b e 4c, a Tabela 02 apresenta o percentual de acerto dos estudantes para cada nível de escolarização.

Tabela 02 – Percentual de acerto nas questões 4b e 4c por nível de escolaridade.

Questão	Pontos	5º ano	9º ano
4b	Máximo	75%	62,5%
	Mínimo	75%	62,5%
4c	Máximo	87,5%	62,5%
	Mínimo	62,5%	62,5%
Média do percentual de acerto		75%	62,5

Fonte: Eugênio (2013).

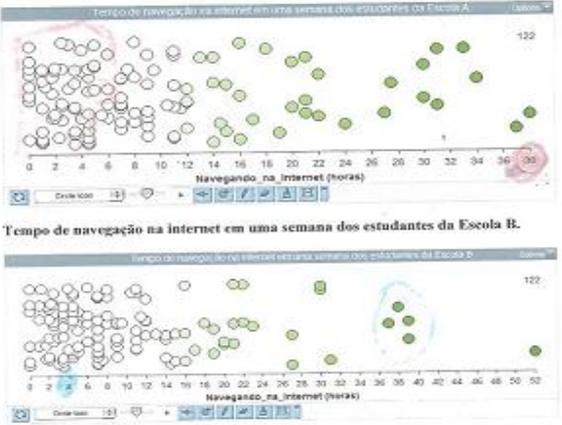
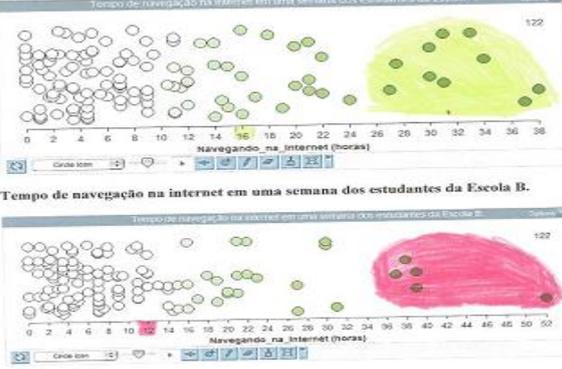
De uma maneira geral, os percentuais de acertos dos estudantes do 5º ano para os itens 4b e 4c foram superiores aos obtidos do 9ºano. Observa-se que a maioria dos estudantes de ambos os níveis de escolarização identificaram corretamente o ponto máximo e o ponto mínimo nos gráficos. Todavia, as análises indicaram, por um lado, que os estudantes do 5º ano estavam mais preocupados em realizar uma interpretação pautada nos valores máximos e mínimos, ou seja, observando os valores extremos. Por outro lado, os alunos do 9º ano pareceram prestar mais atenção à massa de dados e não apenas aos valores que estavam nos extremos.

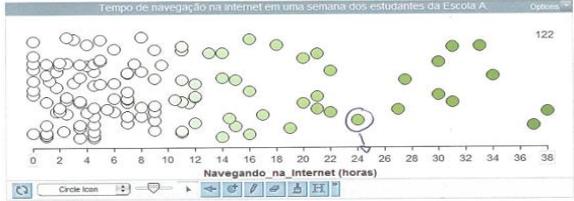
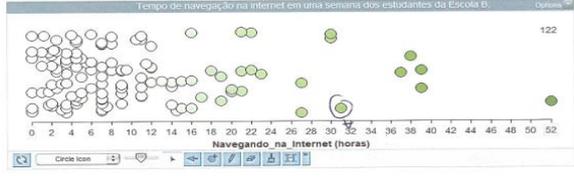
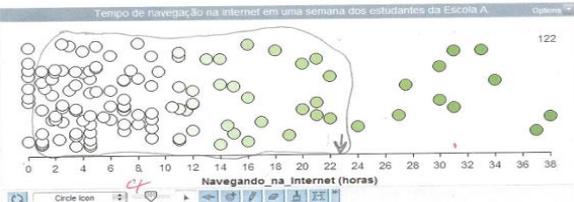
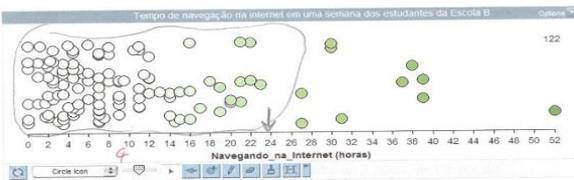
A questão 4d envolveu a estimativa simbólica da média no gráfico e a estimativa numérica da média, ou seja, o estudante iria circular uma região ou ponto específico do gráfico e estimaria um valor para representar a média naquela situação. Como os estudos prévios de Watson e Moritz (1999; 2000) e de Watson (2006) não foram projetados para situações de uso da média no contexto da interpretação de gráficos,

tentamos buscar um padrão de estratégias passíveis de serem categorizadas a partir da classificação que eles propuseram. Essa forma de análise se constituiu em inovação implementada nos estudos de Eugênio (2013).

Analizamos as respostas de cada estudante conforme apresentada no Quadro 04 e salientamos que nesse quadro apresentamos dois casos apenas de interpretação do 5º e 9º anos por conta da limitação do número de páginas do artigo.

Quadro 04 – Exemplos de estratégias dos estudantes para estimar simbolicamente a média na situação de interpretação de gráficos (Questão 4d).

Nome/ Ano	Representação da média no gráfico	Categorização
Rose /5º	<p>Tempo de navegação na internet em uma semana dos estudantes da Escola A.</p>  <p>Tempo de navegação na internet em uma semana dos estudantes da Escola B.</p>	<p>Circula uma massa de dados em ambas as distribuições, as quais não incluem a média real. Estima os valores para a média em diferentes locais da escala distanciados da região do gráfico circulada. Aparentemente não faz relação entre os aspectos simbólicos e numéricos da média (preestrutural).</p>
Eva /5º	<p>Tempo de navegação na internet em uma semana dos estudantes da Escola A.</p>  <p>Tempo de navegação na internet em uma semana dos estudantes da Escola B.</p>	<p>Circula os valores máximos de cada distribuição e estima um valor numérico para as médias, os quais se distanciam dessa região para a escola A cuja média de horas é 9,4 e aproxima-se na escola B cuja média é 10,07. Utiliza uma única estratégia para a resolução do problema nos dois gráficos (multiestrutural).</p>

<p>Alice /9º</p>	<p>Tempo de navegação na internet em uma semana dos estudantes da Escola A.</p>  <p>Tempo de navegação na internet em uma semana dos estudantes da Escola B.</p> 	<p>Circula um <i>plot</i> para localizar a média em ambas as distribuições. Estima o valor numérico da média como sendo o valor do <i>plot</i>. A sua resposta parece envolver a ideia de média como sendo um valor absoluto associado a um caso individual. O valor se distancia do valor real da média (uniestrutural).</p>
<p>Mario /9º</p>	<p>Tempo de navegação na internet em uma semana dos estudantes da Escola A.</p>  <p>Tempo de navegação na internet em uma semana dos estudantes da Escola B.</p> 	<p>Circula a massa de dados numa região que inclui o valor da média para os dois gráficos. Estima um valor para a média dentro da região circulada, contudo distanciado do valor real (multiestrutural).</p>

Fonte: Eugênio (2013).

A Tabela 03 apresenta uma síntese dos níveis de respostas observados na localização simbólica e estimativa numérica da média pelos estudantes do 5º e 9º anos na questão 4d.

Tabela 03: Níveis de respostas dos estudantes na resolução da questão 4d do teste diagnóstico.

Nível de respostas	5º ano	9º ano
Preestrutural	25%	0%
Uniestrutural	37,5%	12,5%
Multiestrutural	37,5%	75%
Relacional	0%	0%
Não respondeu	0%	12,5%
Total	100%	100%

Fonte: Eugênio (2013).

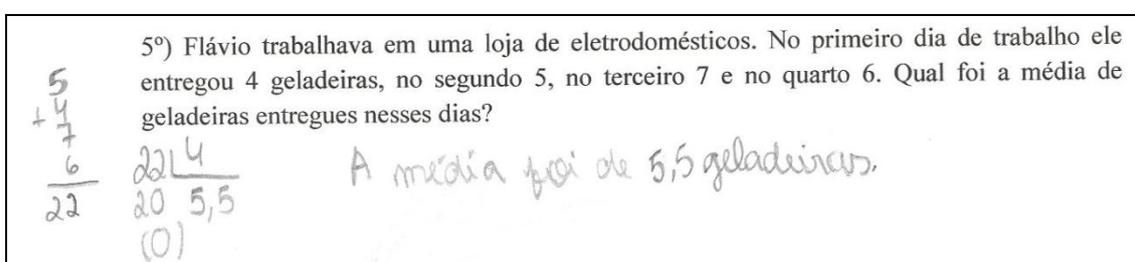
Observa-se uma tendência dos estudantes do 5º ano participantes da pesquisa a estimarem simbólica e numericamente a média em termos de respostas uniestruturais e multiestruturais. Com relação aos estudantes do 9º ano, em geral eles responderem em

nível multiestructural. Ao que parece, os estudantes do 9º ano tiveram uma percepção de que a massa de dados poderia indicar o local onde a média poderia ser estimada. Essa possibilidade se enquadraria na propriedade 7 levantada por Strauss e Bichler (1988) que descreve ser a média um valor representativo do banco de dados a partir dos quais ela foi calculada.

Respostas dos estudantes ao item de cálculo da média

Na resolução da quinta questão do teste diagnóstico apenas o estudante João do 9º ano acertou, como podemos observar na Figura 02 abaixo.

Figura 02 – Cálculo da média realizado por João 9º ano.



5º) Flávio trabalhava em uma loja de eletrodomésticos. No primeiro dia de trabalho ele entregou 4 geladeiras, no segundo 5, no terceiro 7 e no quarto 6. Qual foi a média de geladeiras entregues nesses dias?

$$\begin{array}{r} 5 \\ +4 \\ +7 \\ +6 \\ \hline 22 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 22 \overline{)4} \\ 20 \\ \hline 20 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

A média foi de 5,5 geladeiras.

Fonte: Eugênio (2013).

Dentre os estudantes que não resolveram corretamente essa questão, cinco somaram as quantidades de geladeiras ($4 + 5 + 7 + 6$) e deram 22 como resposta. Os demais apresentaram respostas diversificadas, envolvendo apenas um valor numérico, vejamos como: quatro alunos escreveram que a média era 4 (um do 5º ano e três do 9º); dois alunos do 5º ano, referiram que a média era 5; duas alunas, uma do 5º ano e outra do 9º referiram que a média era 2 e 2,5, respectivamente; e, uma estudante do 9º ano referiu que a média era 13.

Considerações Finais

Percebemos que a aprendizagem da média aritmética em diferentes situações, vai além do que o estudante sabe ou não sabe, é uma compreensão que deveria desenvolver-se no decorrer do processo de escolarização. Nas situações de uso da média em situação familiar e da mídia, observou-se que a maioria dos estudantes do 5º ano respondeu a partir de respostas singulares e sem uma análise mais específica aos dados do problema. Os do 9º ano, por sua vez, resolveram os problemas a partir de respostas mais elaboradas e que envolveram a noção de média como um conjunto de dados.

A despeito desse avanço na abordagem da média em relação à escolarização, observou-se a ausência de respostas relacionais nas abordagens dos estudantes do 9º ano. Esse resultado é preocupante, pois coloca em evidência a ausência de um raciocínio crítico em relação ao uso da média nas situações estudadas.

Os resultados dos estudantes em atividades sobre média associada a interpretação de gráficos mostraram-se complexas mesmo para aqueles do 9º ano. Deixando assim perceptível a ausência de um trabalho articulado entre os conteúdos de média e construção e interpretação de gráficos.

Mas podemos perceber que houve um avanço na compreensão dos estudantes de ambos os anos no decorrer da resolução do instrumento diagnóstico. Após o contato com a média a partir do contexto familiar que requeria deles um conhecimento mais intuitivo, eles passaram à interpretação da média no contexto da mídia impressa. Acreditamos que a resolução desses problemas pode ter contribuído para os estudantes mobilizarem diferentes estratégias, usando conhecimentos do senso comum, mas também envolvendo um pouco mais de reflexões sobre a média. Nas situações da média associada a gráficos, embora os estudantes tenham apresentado dificuldades em realizar estimativas simbólicas e numéricas, acreditamos que eles tiveram a oportunidade de refletir sobre relações entre aspectos visuais e conceituais da média.

Nesse sentido, as situações propostas no teste diagnóstico poderiam ser pensadas como uma possibilidade didática para o ensino da média na escola. Em particular, situações de resolução da média associada a interpretação de gráficos conforme aponta Eugênio (2013) consiste em assunto pouco abordado em pesquisas na área de Educação Estatística no Brasil. Nesse sentido, essa forma de se estudar a média associada a interpretação de gráficos, se constitui em abordagem que poderia ser realizada na educação básica como forma de se ampliar a visão sobre média aritmética. Além disso, podem ser desenvolvidas pesquisas futuras sobre a problemática, para assim estabelecer uma ponte entre dois temas muito importantes da Estatística: medidas de tendência central e interpretação de gráficos.

Referências

BARIZON, E. Validação de uma escala de autorregulação de estratégias de aprendizagem estatística de estudantes da terceira série do ensino médio de São Paulo. 2011. 196f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) -- Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

BATANERO, C. Significado y comprensión de las medidas de posición central. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. **UNO: Revista de didáctica de las matemáticas**, n. 25, p. 41-58, 2000.

BIGGS, J. B.; COLLIS, K. F. **Evaluating the quality of learning**: The SOLO taxonomy. New York: Academic Press, 1982.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: primeiro e segundo ciclos: apresentação dos temas transversais**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARVALHO, J. I. F. **Média Aritmética nos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental**. 2011. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) -- Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

EUGÊNIO, R. S. **Explorações sobre a média no software TinkerPlots 2.0 por estudantes do Ensino Fundamental**. 2013. 230 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) -- Programa de Pós-Graduação. Centro de Educação. Universidade Federal de Pernambuco. Recife/PE, 2013.

EUGÊNIO, R. S.; CARVALHO, L. Estudantes do Ensino Fundamental explorando noções conceituais sobre média no *Software Tinkerplots 2.0*. **Perspectivas da Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v.6, n.12, p. 67-82, jul/dez, 2013.

LEITE, A. P. **Estimativa das Medidas de Tendência Central Uma Intervenção de Ensino**. 2010. 161f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) -- Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

MELO, M. C. M. **Fazendo média: compreensões de alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2010. 125 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) -- Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

NOVAES, D. V.; COUTINHO, C. Q. S. **Estatística para Educação Profissional**. São Paulo: Atlas, 2009.

PERNAMBUCO, **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco: parâmetros curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio**. Recife: Secretaria de Educação, 2012.

SILVEIRA, E. M. **Elaboração e validação de uma escala de atitudes em relação à Estatística para o ensino médio**. 2011. 152f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) -- Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

STRAUSS, S.; BICHLER, E. The development of children' concepts of the arithmetic average. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 19, n. 1, p. 64-80, 1988.

WATSON, J. M. **Statistical literacy at school: Growth and goals**. Mahwah: Lawrence Erlbaum, 2006.

WATSON, J. M.; MORITZ, J. B. The beginning of statistical inference: Comparing two data sets. **Educational Studies in Mathematics**, v. 37, p. 145–168, 1999.

WATSON, J. M.; MORITZ, J.B. The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning*, v. 2, n. 1-2, p. 11-50, 2000.

Recebido em 20/09/2016
Aceito em 03/11/2016